

# תכנון וניתוח אלגוריתמים

## בחינה סופית

1.2.10

פרופ' פת-שמיר

הוראות:

- משך הבחינה: 3 שעות.
- ניקוד: כל ארבע תשובות מלאות יזכו לציון 95 (חלקי תשובות יילקחו בחשבון). יש לענות על כל השאלות כדי לקבל 100.
- מותר להיעזר רק ברשימות.
- בהצלחה!

שאלות:

1. בדומה לבעיית המזכירה, ממתנינים  $n$  מועמדים לראיון. ביכולתכם לקבוע את סדר הראיונות, ולאחר כל ראיון אתם מודיעים למועמד "התקבלת" או "תודה רבה, אולי בפעם אחרת." ההבדל הוא שהפעם, עליכם לשכור לא את הטוב ביותר אלא את המועמד השני בטיבו (נניח שאין מועמדים זהים בטיבם). תארו אלגוריתם הסתברותי שמצליח בהסתברות חיובית בלתי תלויה ב  $n$  לבחור את המועמד השני בטיבו. נתחו את הסתברות ההצלחה של האלגוריתם שלכם ל  $n$  נתון וכאשר  $n \rightarrow \infty$ .
2. לאחר התרסקות חללית, נמצאה תיבה עם כפתור וצג, וגם שרידי המפרט טכני שלה. כך נודע שבתיבה מאוחסנים  $n$  מספרים שונים, ובכל לחיצה על הכפתור, הצג מראה מספר אקראי מתוכם (בהתפלגות אחידה). כדי לחקור את סיבות ההתרסקות, עלינו לחסום את  $n$  מלמעלה, אך למרבה הצער, ערך  $n$  אינו ידוע.
  - 2.1. נניח שידוע כי המספרים המאוחסנים הם בדיוק הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$ . הציעו דרך להעריך את  $n$  עד כדי מקדם  $\varepsilon$  בהסתברות  $1 - \delta$ , כלומר, לכל  $0 < \varepsilon < 1$  ו  $0 < \delta < 1$  נתונים, עלינו למצוא  $N$  כך ש  $\Pr[(1 - \varepsilon)n < N] > 1 - \delta$ . מהו מספר הלחיצות הנדרשות למציאת  $N$  כזה?
  - 2.2. נניח עתה שידוע שהמספרים המאוחסנים שונים, אך הם יכולים להיות כלשהם (כלומר אין קשר בין ערך המספרים לערך  $n$ ). תנו חסם תחתון (אסימפטוטי, כפונקציה של  $n$ ) על מספר הלחיצות הנדרש כדי לתת חסם  $N$  כך ש  $\Pr[n < N] > 1/2$ . הסבירו. (הערה: הערך  $1/2$  נבחר שרירותית וניתן להחלפה בכל קבוע  $0 < p < 1$ . הכוונה היא למצוא  $K$  כך שבהסתברות טובה,  $K$  לחיצות יספיקו לחסום את  $n$ ).
3. עליכם להקים מערך חרום המספק שרות אמבולנסים לכל הישובים במחוז מסוים. כקלט, אתם מקבלים רשימה של אתרים אפשריים למיקום תחנות המערך: לכל אתר יש עלות הקמה, ורשימת הישובים במחוז אותם הוא יכול לשרת (האמבולנסים חייבים להגיע בזמן!). תארו אלגוריתם יעיל המייצר הצעת מחיר להקמת המערך. מה ניתן לומר על טיב ההצעה?
4. בצוות התכנון של מערכת זימון (paging) יש תומך פנאטי באלגוריתם A ותומכת פנאטית באלגוריתם B, ובלתי אפשרי לשכנע אותם לוותר האחד לשנייה או להפך. ההנהלה בוחנת שתי הצעות פשרה כדלהלן.
  - I. חלוקה צעד-צעד: אם הפריט המבוקש במטמון, אין שאלה. כאשר הפריט אינו במטמון, ההחלטה איזה פריט

לפנות "מתחלקת" בין שני האלגוריתמים לפי זוגיות הצעד. אם הצעד הוא זוגי, הפינוי נעשה לפי אלגוריתם A, ואם אינו זוגי, לפי אלגוריתם B. למשל, אם A הוא LRU ו B הוא FIFO, בצעד פינוי זוגי ייזרק הפריט שהתבקש בזמן הישן ביותר, ובצעד פינוי אי-זוגי ייזרק הפריט שנכנס למטמון בזמן הישן ביותר. II. חלוקה אחת ולתמיד: בתחילת כל ריצה המערכת מטילה מטבע ולפי תוצאות ההטלה, נבחר אלגוריתם זימון (A או B) בו המערכת משתמשת לאורך כל הריצה.

4.1. מה תוכלו לומר על מקדם התחרותיות של המערכת בכל אחת מההצעות, אם ידוע כי A הוא  $k_1$ -תחרותי וכי B הוא  $k_2$ -תחרותי? נמקו.

4.2. מה תוכלו לומר על מקדם התחרותיות של המערכת בכל אחת מההצעות, אם ידוע כי A הוא LRU וכי B הוא FIFO? נמקו.

5. עלינו לתזמן קבוצת ג'ובים באופן סדרתי על מעבד יחיד. לכל ג'וב  $i$  יש אורך  $L_i$  ומשקל  $V_i$ . עלינו לסדר את הג'ובים כך שזמן ההמתנה הכולל הממושקל ימוזער. למשל אם אורכי הג'ובים  $a, b, c$  הם (לפי הסדר) 1, 2, 3 ומשקלם (בהתאמה) הם 3, 8, 1 אז זמן ההמתנה הכולל בסידור  $a, b, c$  הוא  $1 \cdot 2 + (1+2) \cdot 3 = 11$ : ג'ובים  $b, c$  ממתנים ל  $a$ , וג'וב  $c$  ממתין גם ל  $b$ . בדומה, בסידור  $b, c, a$  זמן ההמתנה הכולל הוא  $3 \cdot 3 + (3+1) \cdot 2 = 17$ . תארו אלגוריתם יעיל למציאת סידור אופטימאלי, הסבירו מדוע הוא נכון ונתחו את הסיבוכיות שלו.

6. הוכיחו כי הבעיה הבאה היא NP-קשה:

קלט: גרף לא מכוון  $G=(V,E)$ .

שאלה: האם ניתן לצבוע את צמתי הגרף בחמישה צבעים (כך שאין שני צמתים סמוכים בעלי אותו צבע)?

**בהצלחה!**