

# תכנון וניתוח אלגוריתמים

## בחינה סופית

14.4.8

ד"ר פת-שמיר

הוראות:

- משך הבחינה: 10 שעות. יש להגיש הפתרונות עד 7 בערב 14.4.8 באחת מהדרכים הבאות: (1) בדוא"ל ל [algs@eng.tau.ac.il](mailto:algs@eng.tau.ac.il), (2) בפקס ל 03-643-6392 או (3) לחדר 213 בבניין תוכנה. לא מומלץ לשלוח רק ברגע האחרון! (במיוחד במקרה של משלוח בפקס).
- משקל כל שאלה 25 נקודות. פתרונות חלקיים יזכו בניקוד חלקי.
- מותר להיעזר רק ברשימות וספרים.
- תקשורת בנושאי המבחן מותרת רק עם סגל הקורס, הזמין ב [algs@eng.tau.ac.il](mailto:algs@eng.tau.ac.il).

שאלות:

- נתון אוסף קבוצות  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ , ונסמן  $X = \bigcup_{i=1}^m S_i$ . תת-אוסף  $H \subseteq C$  נקרא כיסוי כפול ל  $X$  אם לכל איבר  $x \in X$  קיימות לפחות שתי קבוצות שונות  $S, S' \in H$  כך ש  $x \in S \cap S'$ . כלומר כל איבר ב  $X$  מכוסה ע"י לפחות שתי קבוצות ב  $H$ . חשבו על הבעיה של מציאת כיסוי כפול כנ"ל המכיל מספר קטן ביותר של קבוצות (השוו: בכיסוי בקבוצות [set cover] "רגיל", הדרישה היא שהפלט יכסה את כל אבר ב  $X$  לפחות פעם אחת).
  - 1.1 (5 נק') תנו תנאי הכרחי ומספיק לקיום כיסוי כפול.
  - 1.2 (20 נק') תארו אלגוריתם קרוב יעיל לבעיה זאת ותנו חסם עליון קטן ככל האפשר על מקדם הקרוב שלו. הוכיחו את טענותיכם.
- ידוע כי שכיחות הצדיקים בסדום היא  $p > 0$ , אנשי סדום בוחרים משלחת של באופן הבא: עוברים על התושבים אחד-אחד, וכל תושב נכלל במשלחת בהסתברות קבועה  $q$  (בלתי תלויה בבחירות האחרות). נסמן מספר תושבי סדום ב  $N$ .
  - 2.1 (5 נק') ל- $p, q$  נתונים, מהי תוחלת מספר הצדיקים במשלחת?
  - 2.2 (5 נק') ל- $p$  נתונים, מצאו תנאי על  $q$  המבטיח שהסיכוי להימצאות לפחות צדיק אחד במשלחת הוא לפחות  $\frac{1}{2}$ . מתי אין תנאי כזה?
  - 2.3 (5 נק') ל- $p$  נתונים, מצאו תנאי על  $q$  המבטיח שהסיכוי שהמשלחת מורכבת כולה מצדיקים הוא לפחות  $\frac{1}{2}$ . מתי אין תנאי כזה?
  - 2.4 נניח עתה שהמשלחת נבחרה ע"י  $\sqrt{N}$  דגימות אקראיות (עם החזרה), והתברר שִפְּלֹלִים בה 15 צדיקים.
    - 2.4.1 (5 נק') תנו הערכה  $\hat{p}$  על גודל  $p$  כפונקציה של  $N$ .
    - 2.4.2 (5 נק') מצאו חסם על הסטייה מההערכה שנכון בהסתברות לפחות  $2/e$ , כלומר מצאו ביטוי  $f(N)$  כך שמתקיים  $\Pr[|p - \hat{p}| < f(N)] > 2/e$ .

3. מערכת מוגדרת באופן הבא. בכל צעד, עשויים להגיע מספר ג'ובים לשכת. לכל ג'וב זמן ריצה ידוע מראש, וערך שנע בין אורך הג'וב לפעמיים אורך הג'וב. (אפשר להניח שזמני הריצה והערכים הם מספרים שלמים, ושהמערכת מתקדמת בצעד אחד כל יחידת זמן שלמה.) כאשר ג'וב מגיע, השרת חייב להחליט מייד: לדחות אותו (ובכך לאבדו לנצח), או לקבל אותו. אם הג'וב מתקבל, הוא מתחיל לרוץ מיד. לשרת מותר לקבל ג'וב אחר לפני שהג'וב הקודם סיים לרוץ: במקרה זה הג'וב הקודם נזרק ואובד. ברצוננו למצוא אלגוריתם on-line המביא למקסימום את סך כל הערך של ג'ובים שרצו עד תום. (כלומר, ג'וב שנזרק לפני סיומו הוא חסר כל ערך.)

3.1. (10 נק') האלגוריתם החמזן מוגדר ע"י הכלל הבא: אם מגיע ג'וב שהערך שלו גדול יותר מערך הג'וב אותו משרת השרת כרגע, הג'וב הנוכחי ייזרק לטובת החדש הגדול יותר. הוכיחו שמקדם התחרותיות של האלגוריתם החמזן אינו חסום ע"י קבוע (תנו חסם תחתון גדול ככל האפשר).

3.2. (5 נק') תארו אלגוריתם תחרותי לבעיה זאת (ללא ניתוח).

3.3. (5 נק') חסם תחתון: תנו דוגמא רעה ככל האפשר לאלגוריתם שלכם, ונתחו את יחס התחרותיות בדוגמא זאת.

3.4. (5 נק') חסם עליון: חסמו את יחס התחרותיות של האלגוריתם שלכם לכל הקלטים. רמז: לכל ג'וב שהאלגוריתם מסיים, חסמו את סכום ערכי כל הג'ובים שהאלגוריתם החמיץ (ואופטימום יכול היה לקחת).

4. אנו מתכננים מסע בין-כוכבי מכדור הארץ לאלפא קנטאורי. יש בדרך מספר תחנות ביניים אפשריות  $x_0, x_1, \dots, x_m$  (כדור הארץ הוא  $x_0$ , היעד הוא  $x_m$ ).

המרחקים בין התחנות נתונים ע"י פונקציית מרחק  $d(x_i, x_j)$ , המקיימת  $0 \leq d(x_i, x_j) < \infty$  לכל  $0 \leq i, j \leq m$ . ההנעה של החללית היא ע"י פיצוץ מבוקר בתחילת כל קטע במסלול, כך שכללי המסע הם כדלהלן:

- כמות הדלק הנדרשת לעבור קטע באורך  $z$  היא  $z^2$ .
  - מותר לפצל המסלול ל  $K$  קטעים לכל היותר, ל  $K$  פרמטר שלם חיובי נתון.
- (10 נק') תארו אלגוריתם יעיל המקבל את פונקציית המרחקים  $d$  ואת  $K$ , ומוצא מסלול שצריכת הדלק שלו מזערית. הסבירו מדוע האלגוריתם נכון (5 נק'), ונתחו את סיבוכיות הזמן (5 נק') והזיכרון (5 נק') שלו.

**--בהצלחה!**