# תכנון וניתוח אלגוריתמים

## בחינה סופית

14.2.6

ד"ר פת-שמיר

הוראות:

- יש לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
- מותר להשתמש בכל חומר עזר כתוב, לא כולל ספרים.
- משך הבחינה 3 שעות ללא הארכה.

1. במערכת נתונה קיים זיכרון מטמון (cache) היכול להכיל $k > 1$ מילים. כאשר מילה מסוימת מבוקשת, על המערכת לספקה מתוך המטמון: אם המילה כבר במטמון זמן השרות הוא $1/k$, ואחרת זמן השרות הוא $1+(1/k)$. אנו מחפשים אלגוריתם הממזער את זמן השרות לכל סדרת בקשות. תפקיד האלגוריתם להחליט איזה מילה לזרוק מהמטמון כאשר הוא מלא.

   1.1. תנו אלגוריתם תחרותי דטרמיניסטי לניהול המטמון והוכיחו כי מקדם התחרותיות שלו קטן מ $k$.

   1.2. תנו חסם תחתון למקדם התחרותיות של כל אלגוריתם דטרמיניסטי לניהול המטמון.

   1.3. הוכיחו כי מקדם התחרותיות של כל אלגוריתם אקראי לניהול המטמון הוא לפחות 6/5.

2. <u>זיווג</u> בגרף הינו קבוצת קשתות זרות, כלומר כל צומת נוגע לכל היותר בקשת אחת בקבוצה. זיווג הוא <u>מכסימלי</u> אם אי אפשר להוסיף לו אף קשת. תארו אלגוריתם מבוזר (דטרמיניסטי או אקראי) לחישוב זיווג מכסימלי, ונתחו את סיבוכיות הזמן שלו. מהו גודל ההודעות באלגוריתם, בביטים?
   (*<u>רמז</u>:* חשבו על גרף הקשתות של הגרף המקורי: בגרף הקשתות כל קשת e מיוצגת ע"י צומת v(e), ושני צמתים v(e) ו v(e') מחוברים אם"ם הקשתות e ו e' הן סמוכות בגרף המקורי.)

3. לבעית מזעור מסוימת ידוע כי התפלגות הקלטים היא סטַציונרית, כלומר הקלט להרצה הוא משתנה אקראי בלתי תלוי בקלטים אחרים, ולכל הקלטים התפלגות זהה (כלומר הקלטים הם iid random variables).
   ברשותנו שני אלגוריתמים דטרמיניסטים A ו B לבעיה. נסמן $t_A$ את ערך הפלט של אלגוריתם A, ו $t_B$ את ערך הפלט של אלגוריתם B ($t_A$ ו $t_B$ הם משתנים אקראיים כיוון שהם פונקצייה של הקלט). נגדיר את אלגוריתם C, שלכל קלט נתון מריץ את A ואת B, ופולט את התוצאה הטובה יותר(הקטנה) בין הפלטים שלהם. נסמן את תוצאת האלגוריתם המורכב $t_C$ (שאף הוא מ"א).

   3.1. הוכיחו כי $E[t_C] \le \min(E[t_A], E[t_B])$.

   3.2. תנו קריטריון הכרחי ומספיק להתקיימות $E[t_C] = \min(E[t_A], E[t_B])$.

   3.3. נניח כי קיימים a,b כך ש $\Pr[t_A>a] \ge 0.75$, וגם $\Pr[t_B>b] \ge 0.75$. הוכיחו כי $\Pr[t_C>\max(a,b)] \ge 0.5$.

4. בעיה זו עוסקת במודלים לפתיחת מרכזי שירות ללקוחות. נתונים $n$ לקוחות, כאשר לכל לקוח נתון מיקומו. נרצה לפתוח $k$ מרכזי-שירות, כאשר כל מרכז מוגדר על ידי מיקומו. המחיר ללקוח הוא המרחק של הלקוח ממרכז השרות הקרוב ביותר אליו. מטרתנו למקם מרכזים באופן שימזער את סך המחיר לכל הלקוחות. נניח כי אין שני לקוחות השוכנים באותה נקודה.

4.1. נניח כי הלקוחות נמצאים על קו ישר, ויש לפתוח מרכז יחיד. תן אלגוריתם עם סיבוכיות $o(n^2)$ (או קטן!) המוצא את המיקום האופטימלי למרכז זה, והוכח את נכונותו. *רמז*: הנח כי המרכז ממוקם בנקודה $x$, ובדוק כיצד משתנה פונקצית המטרה כאשר המרכז זז מעט ימינה או שמאלה.

4.1.1. (בונוס) תן אלגוריתם פולינומי המוצא את המיקומים האופטימליים ל $k$ מרכזים על קו. הוכח את נכונותו ונתח את זמן הריצה.

4.2. בסעיף זה נניח כי הלקוחות נמצאים במרחב מטרי כלשהוא, ויש לפתוח $k$ מרכזים (במיקום כלשהוא במרחב) ל $k$ קבוע. תן אלגוריתם המשיג קירוב 2 לאופטימום, נתח את יחס הקירוב שלו ואת זמן הריצה. *רמז*: הראה כי כל מרכז בפתרון האופטימלי ניתן להחליף במרכז הממוקם על לקוח מסוים בלי שמחיר הפתרון יגדל בהרבה.

בהצלחה!

# פתרונות

שאלה 1

1.1

נשתמש בכל אלגוריתם עם מקדם תחרותיות $k$ למספר ההחטאות. למשל, אנו יכולים להשתמש ב LRU, או ב FIFO. נראה כי מקדם התחרותיות של האלגוריתם רק משתפר במודל החדש. נקבע את סדרת הבקשות. נסמן $n$ את אורך הסדרה, ונניח כי מספר ההחטאות האופטימלי הוא $m$. אזי המחיר האופטימלי הוא $OPT = n \cdot 1/k + m$. מצד שני, עפ״י הנחה מובטח לנו כי מספר ההחטאות של האלגוריתם שלנו הוא לכל היותר $km$. לכן המחיר שמשלם האלגוריתם הוא לכל היותר $ALG = n \cdot 1/k + km$. מכאן נובע שמקדם התחרותיות של האלגוריתם במודל החדש מקיים

$$\frac{ALG}{OPT} \le \frac{n/k + km}{n/k + m} < k.$$

לכל $n>0$. יתרה מזאת, המקדם עולה מונוטונית עם $m$, ולכן המקדם חסום ע״י הערך למספר ההחטאות המכסימלי. כיוון שמספר ההחטאות של האלגוריתם חסום ע״י $n$, אנו מקבלים שמקדם התחרותיות במודל החדש הוא (ע״י הצבה $m=n/k$):

$$\frac{ALG}{OPT} \le \frac{n/k + n}{n/k + n/k} = \frac{k+1}{2}.$$

1.2

נשתמש בטיעון החסם התחתון למספר ההחטאות כפי שניתן בכיתה. נקבע אלגוריתם דטרמיניסטי כלשהוא. יש $k+1$ מילים שונות; נבקש תמיד את המילה שהאלגוריתם אינו מחזיק. האלגוריתם האופטימלי יחטיא לכל היותר פעם אחת מתוך $k$ בקשות, והאלגוריתם הדטרמיניסטי יחטיא בכל בקשה. לכן

$$\frac{ALG}{OPT} \ge \frac{k \cdot (1/k) + k \cdot 1}{k \cdot (1/k) + 1 \cdot 1} = \frac{k+1}{2}.$$

1.3

נשתמש בטיעון החסם התחתון למספר ההחטאות כפי שניתן בכיתה: מספיק להראות חסם תחתון לתוחלת המחיר של כל אלגוריתם דטרמיניסטי כאשר הקלט הוא אקראי. הקלט מיוצר ע״י בחירה אקראית אחידה מתוך $k+1$ מילים שונות. נגדיר פאזות באינדוקצייה, כאשר פאזה מסתיימת לפני שהאלגוריתם האופטימלי מחטיא. לפי הניתוח בכיתה, אורך כל פאזה בממוצע הוא $kH_k$; בכל בקשה האלגוריתם מחטיא בהסתברות $1/k$, ובכל פאזה מספר ההחטאות האופטימלי הוא 1. כיוון ש $k>1$ אנו יכולים להסיק כי מקדם התחרותיות הוא לפחות

$$\frac{ALG}{OPT} \ge \frac{kH_k \cdot (1/k) + H_k \cdot 1}{kH_k \cdot (1/k) + 1} = \frac{2H_k}{H_k + 1} = 2 - \frac{2}{H_k + 1} \ge 2 - \frac{2}{(3/2)+1} = \frac{6}{5}.$$

שאלה 2

נשים לב כי קבוצת קשתות היא זיווג מכסימלי בגרף G אם״ם בגרף הקשתות EG, קבוצת הצמתים המתאימה היא בלתי תלויה מכסימלית (MIS): שתי קשתות הן זרות אם״ם הצמתים המתאימים להן בגרף הקשתות לא מחוברים; וניתן להוסיף קשת לזיווג אם״ם ניתן להוסיף את הצומת המתאים לקבוצה בלתי תלויה בגרף

הקשתות. לכן האלגוריתם הוא אמולצייה של אלגוריתם ל MIS בגרף הקשתות (למשל האלגוריתם של לובי): לכל קשת נְמַנֶה את אחד משני קצותיה כ"צומת אחראי", נניח עפ"י ID. הצמתים האחראים יריצו את אלגוריתם ה MIS באופן הבא: בכל סיבוב, צומת אחראי לקשת e שולח הודעות (לפי האלגוריתם ל MIS) לכל הצמתים האחראיים על הקשתות הסמוכות ל e. הצמתים האחרים רק מעבירים את ההודעות ליעדיהן.

סיבוכיות הזמן גדלה לכל היותר פי 2, כי המרחק בין צמתים אחראיים של קשתות סמוכות הוא לכל היותר 2. מכאן שאם נשתמש באלגוריתם של לובי תוחלת זמן הריצה היא $O(\log|E|)=O(\log n)$. אבל מספר ההודעות שצומת אחד צריך לשלוח או לקבל בסיבוב אחד יכול להיות $\Delta$ (הדרגה המכסימלית בגרף), כי צומת אחד עלול להיות אחראי לכל הקשתות בהן הוא נוגע. כיוון שגודל ההודעות באלגוריתם ל MIS הוא $O(\log n)$ ביטים (לתאור דרגה ו ID), גודל ההודעות באלגוריתם לזיווג הוא $O(\Delta \log n)$.

## שאלה 3

### 3.1

לקלט I, נסמן A(I) B(I) ו C(I) את תוצאות אלגוריתמים A, B ו C בהתאמה. בסימון זה נקבל עפ"י הגדרות כי

$$E[t_C] = \sum_I \Pr[I]\cdot C(I) = \sum_I \Pr[I]\cdot \min(A(I),B(I)) \le \sum_I \Pr[I]\cdot A(I) = E[t_A].$$

באופן דומה, $E[t_C] \le E[t_B]$.

### 3.2

שוויון יחול אם"ם אלגוריתם אחד תמיד נותן תוצאות עדיפות מהאחר, כלומר או שלכל קלט I עם הסתברות חיובית $A(I)\le B(I)$, או שלכל קלט I עם הסתברות חיובית $B(I)\le A(I)$.

נניח ראשית שלכל קלט I עם הסתברות חיובית $A(I)\le B(I)$. אז

$$E[t_C] = \sum_I \Pr[I]\cdot C(I) = \sum_I \Pr[I]\cdot \min(A(I),B(I)) = \sum_I \Pr[I]\cdot A(I) = E[t_A],$$

ובדומה $E[t_C] = E[t_B]$ אם לכל קלט I עם הסתברות חיובית $B(I)\le A(I)$.

נניח עתה כי $E[t_C] = E[t_A]$ (המקרה של $E[t_C] = E[t_B]$ הוא זהה). אם קיים קלט $I'$ עם $\Pr[I']>0$ כך ש $B(I')<A(I')$ נקבל סתירה, כי אז

$$\begin{aligned} E[t_C] &= \sum_I \Pr[I]\min(A(I),B(I)) \\ &= \Pr[I']\cdot B(I') + \sum_{I\ne I'} \Pr[I]\cdot\min(A(I),B(I)) \\ &\le \Pr[I']\cdot B(I') + \sum_{I\ne I'} \Pr[I]\cdot A(I) \\ &< E[T_A] \end{aligned}$$

### 3.3

נגדיר הקבוצות $L_A=\{I : A(I) > a\}$ ו $L_B=\{I : B(I) > b\}$. כיוון שעפ"י עקרון ההכלה-הדחה

$$\Pr[L_A \cup L_B] \ge \Pr[L_A] + \Pr[L_B] - \Pr[L_A \cap L_B],$$

וכיוון ש $\Pr[L_A \cup L_B] \le 1$ באופן טריביאלי, אנו מקבלים כי

$$\begin{aligned}&\Pr[I > \max(a,b)] = \Pr[I \in L_A \cap L_B]\\ &\ge \Pr[I \in L_A] + \Pr[I \in L_B] - \Pr[I \in L_A \cup L_B]\\ &\ge 0.75 + 0.75 - 1 = 0.5\end{aligned}$$

שאלה 4

4.1

ראשית, נראה כי הפתרון האופטימלי נמצא בדיוק בחציון.

הוכחה: נניח בה"כ כי הלקוחות ממוינים משמאל לימין, כלומר $x_1 < x2 <...< x_n$. נניח כי הפתרון האופטימלי נמצא בנקודה $x$. נסמן ב- $k$ את האינדקס הגדול ביותר של לקוח עבורו $x_k \le x$, כלומר יש בדיוק $n\text{-}k$ ללקוחות לימין המרכז. נתבונן בערך פונקצית המטרה כאשר המרכז זז ε ימינה, ונניח כי ε קטן מספיק כך שהמרכז לא "מדלג" על אף לקוח (כלומר $k$ נשאר קבוע). מרחק כל נקודה מימין למרכז יקטן ב ε ומרחק כל נקודה משמאל למרכז יגדל ב ε, ולכן ערך פונקצית המטרה ישתנה ב-$\varepsilon(k-(n-k))= \varepsilon(n-2k)$. בנקודת האופטימום חייב להתקיים שווין, אחרת הזזה לאחד משני הצדדים תקטין את האופטימום, ולכן האופטימום מקיים $k=n/2$, כלומר הנקודה היא החציון של הנקודות.

והאלגוריתם הוא פשוט מציאת החציון. זמן הריצה הוא $O(n \log n)$ ע"י מיון, או $O(n)$ אם משתמשים באלגוריתם מתוחכם לבחירת חציון.

4.1.2

ראשית, נראה כי בפיתרון האופטימלי, אוסף הלקוחות שמקבלות שירות מאותו שרת מהווים אינטרוול של הלקוחות: תכונה זאת נובעת מהעובדה שאם יש ללקוח לא קיצוני של שרת A שקרוב במידה שווה לשרתים A ו B, אז הלקוח הקיצוני של A קרוב יותר ל B. האלגוריתם לפתרון הבעייה הכללית הוא תכנות דינמי. נראה כאן גרסא לא יעילה אך פשוטה ופולינומית: נגדיר $Cost(i,j,m)$ להיות המחיר האופטימלי לשרות הקטע $[x_i,x_j]$ באמצעות $m$ שרתים. ברור כי ניתן לחשב $Cost(i,j,m)$ ע"י מעבר על $(j-i-1)$ חלוקות של האינטרוול ו $(m-1)$ אפשרויות של מספר שרתים לכל חלוקה. גודל הטבלה הוא $O(n^2k)=O(n^3)$. נתחיל מחישוב כל הערכים ל $k=1$ ע"י החציון, ונתקדם לערכי $k$ גדולים יותר. כל ערך בטבלה הוא מינימום של $O(kn^2)$ ערכים, וכך הזמן הכולל הוא $O(k^2n^4)=O(n^6)$.

(הערה: ניתן לצמצם את זמן הריצה ל $O(n^2\log k)$ ע"י שימוש באלגוריתם Floyd-Warshall.)

4.3

נראה שאם נחליף מרכז בלקוח הקרוב ביותר אליו, מחיר הפתרון לכל היותר יוכפל. יהי C מרכז, ויהי $j$ הלקוח הקרוב ביותר אל C. החלפתו של המרכז C במרכז ששוכן על הלקוח $j$ יקיים: לכל לקוח $i$ שקיבל שירות ב-C, העבודה שיבצע בפתרון החדש היא לכל היותר פי 2 מהעבודה המקורית.

הוכחה: יהי $i$ לקוח ששורת על-ידי מרכז C. אזי המחיר בפתרון המקורי הוא $d(C,i)$ והמחיר בפתרון החדש הוא$d(j,i)$ . אבל מאי-שוויון המשולש, וכיוון ש כיוון ש-$j$ הוא הקרוב ביותר ל-C, נקבל

$d(j,i) \le d(j,C)+d(C,i) \le 2d(i,C)$, וגמרנו.

מכאן האלגוריתם: מצא המחיר למיקום מרכזים בכל תת-קבוצה של $k$ לקוחות, ובחר את הפתרון הטוב ביותר.

זמן הריצה: מספר הקבוצות $O(n^k)$ מוכפל ב-$O(nk)$, שהוא זמן מציאת המרכז הקרוב ביותר לכל לקוח.