

תכנון וניתוח אלגוריתמים - שעור מספר 3

להלן רשימת בעיות קנוניות שהן NP שלמות:

1. 3-צביעה של גרף (3COL).
2. קליקה בגרף (Clique) – הקלט: גרף $G = (V, E)$ ומספר K . השאלה: האם יש ב- G קליקה בגודל של לפחות K ? [קליקה = קבוצת צמתים שבין כל שתי צמתים יש קשת].
3. סכום תת-קבוצה (Subset Sum).
4. מעגל המילטוני (HC - Hamiltonian Circuit) – קלט: גרף $G = (V, E)$. שאלה: האם יש מעגל קשתות המבקר בכל צומת בדיוק פעם אחת?
5. מסלול אוילר (Euler Path) (בעיה יותר 'קלה' מאשר מעגל המילטוני) – קלט: גרף $G = (V, E)$. שאלה: האם יש מעגל קשתות המבקר בכל קשת בדיוק פעם אחת? **משפט:** גרף הוא אוילרי אם"מ הוא קשיר ולכל צומת יש מספר שכנים זוגי.

MIS – Maximum Independent Set בלתי תלויה מקסימאלית

קלט: גרף $G = (V, E)$, מספר K .

שאלה: האם קיימת תת-קבוצה בלתי תלויה בגודל של לפחות K של צמתים בגרף? [קבוצת צמתים היא בלתי תלויה אם אין אף קשת בין חברי הקבוצה].
טענה: MIS היא NP שלמה (ניתן להוכיח זאת ע"י רדוקציה מקליקה – בהינתן קלט לקליקה \bar{E} $G = (V, E), K$, נבנה קלט ל- MIS ע"י בניית גרף חדש תוך שימוש בקבוצת הקשתות המשלימות \bar{E} ואותו קבוע K).

VC – Vertex Cover בעיית כיסוי צמתים

קלט: גרף לא מכוון $G = (V, E)$, מספר K .

שאלה: האם יש קבוצת צמתים בגודל לכל היותר K הנוגעת בכל קשתות הגרף?
טענה: VC היא NP שלמה.
הוכחה: רדוקציה מ- MIS :

תהיה $S' \subseteq V$ קבוצת צמתים אז S' בלתי תלויה אם ורק אם $V - S'$ כיסוי צמתים

נכונות – S' בלתי תלויה אם אין אף קשת ששני קצותיה ב- S' \Leftrightarrow אין אף קשת שאין לה קצה ב- $V - S'$

הגדרה - בעיית אופטימיזציה:

תחום הקלט – קבוצת מחרוזות.

אפיון הפלט – ניתן ע"י פרדיקט Π שאומר שלכל מחרוזת קלט x יש לפחות מחרוזת פלט y כך ש

$\Pi(x, y)$ נכון. האופטימיזציה מתבטאת במדד לפלט: $\square^+ \rightarrow \sum^* g$ כש- g היא פונקציית מטרה

שמתאימה מספר לכל צמד (x, y) כך ש- $\Pi(x, y) = True$.

2 סוגי בעיות אופטימיזציה:

a. בבעיית מזעור (min) – המטרה היא למצוא פלט כך ש $\Pi(x, y)$ נכון וגם g קטן ככל

האפשר (לדוגמא VC).

b. בבעיית מקסימיזציה (max) – המטרה היא למצוא פלט כך ש $\Pi(x, y)$ נכון וגם

g גדול ככל האפשר (לדוגמא MIS).

אלגוריתם קירוב לבעיית מינימיזציה – Approximation Algorithms

אלגוריתם A הוא אלגוריתם קירוב לבעיה נתונה עם מקדם ρ אם לכל קלט x לבעיה מתקיים:

$$\frac{g(A(x))}{g(OPT(x))} \leq \rho ; OPT(x) = \arg \min_y \{g(y) : \Pi(x, y)\}$$

כאשר OPT הוא הפתרון האופטימאלי ו- ρ הוא מקדם הקירוב ו- $\rho \geq 1$ (במקרה ש- $\rho = 1$ הפתרון המקורב הוא הפתרון האופטימאלי).

$$\frac{g(A(x))}{g(OPT(x))} \geq \rho ; OPT(x) = \arg \max_y \{g(y) : \Pi(x, y)\} \text{ - עבור בעיות מקצון נדרוש ש- } (\rho \leq 1 - 1)$$

דוגמא: אלגוריתם קירוב ל-VC – האלגוריתם החמדן:
כל עוד בגרף יש קשת:

1. בחר קשת (u, v) כלשהיא.
 2. הוסף את הקשת לפלט.
 3. הורד את כל הקשתות שנוגעות בצמתים u ו- v . (חזור ל-1)
- משפט:** האלגוריתם החמדן הוא 2-קירוב ל-VC ($\rho = 2$).

הוכחה: מכל קשת שמורידים לפחות אחד הצמתים חייב להיות בכל כיסוי קשתות. בנוסף, בכל איטרציה אנו מוסיפים לפחות צומת אחת חדשה מכל כיסוי צמתים.

דוגמא: בעיית הסוכן הנוסע – TSP – Traveling Salesman Problem

קלט – רשימת ערים ומרחק בין כל זוג ערים (בדר"כ נתון כגרף $(G = (V, E))$).

פלט – פרמוטציה של הרשימה (מסלול מסוים) כאשר המטרה היא למזער את אורך המסלול הכולל שמתחיל ומסתיים באותה עיר ועובר בכל שאר הערים פעם אחת בדיוק.

בעיית הכרעה המתאימה ל TSP היא בעיית מעגל המילטוני *Hamiltony circuit*. כאן הקלט הוא גרף לא מכוון והשאלה האם קיים מסלול מעגלי בגרף המבקר בכל צומת עם אחת בדיוק.

משפט: בעיית TSP היא NP קשה.

הוכחה: ע"י רדוקציה ממעגל המילטוני: בעיית המסלול ההמילטוני היא בעיה NP שלמה ולכן התוצאה היא שבעיית TSP היא NP קשה. בהינתן קלט $G = (V, E)$ ל- HC , נייצר מופע של בעיית ההכרעה ל

TSP – ע"י הוספת נתון K ושאלה: האם יש מעגל כנ"ל באורך $K \geq$?
פתרון: נבנה גרף שבו הצמתים הן הערים והמרחק נתון לפי:

$$d(u, v) = \begin{cases} 1, & (u, v) \in E \\ 2, & (u, v) \notin E \end{cases} ; K = n$$

טענה: במופע שייצרנו ל- TSP יש מעגל באורך $K \geq$ אם"מ במופע המקורי $G = (V, E)$ יש מעגל המילטוני.

הוכחה: אם יש מעגל באורך $K \leq$ יש מעגל באורך n . אנו מבקרים בכל צומת פעם אחת בדיוק רק באמצעות קשתות במשקל 1.

משפט: בעיית הקירוב ל- TSP לכל מקדם ρ קבוע היא NP קשה.

הוכחה: ע"י רדוקציה ממעגל המילטוני כמקודם רק המרחקים אחרים:

$$d(u, v) = \begin{cases} 1, & (u, v) \in E \\ \rho n + 1, & (u, v) \notin E \end{cases}; K = n$$

אם יש מעגל המילטוני (HC) אז יש מסלול TSP באורך n , אם אין מעגל המילטוני אז כל מסלול TSP אורכו לפחות $\rho n + 1$. [אם היה אלגוריתם ρ קירוב ל TSP אז אפשר היה לפתור את HC].

הגדרה: מטריקה *Metric*: בהינתן קבוצה v עם פונקציית מרחק שמקיימת $d: v \times v \rightarrow \mathbb{R}^+$ היא מטריקה אם:

- (1) לכל $v \in V$ $d(v, v) = 0$
- (2) לכל $u, v \in V$ $d(u, v) \geq 0$
- (3) לכל $u, v \in V$ $d(u, v) = d(v, u)$
- (4) לכל $w, u, v \in V$ $d(u, v) \leq d(v, w) + d(w, v)$ (אי-שוויון המשולש).

הגדרה: TSP מטרי: כמו TSP רגיל אבל במקרה הזה פונקציית המרחק בין ערים היא מטריקה.

משפט: יש אלגוריתם פולינומי שהוא 2-קירוב ל TSP מטרי.
אלגוריתם ל – TSP מטרי:

- (1) בנה עץ חיפוש מינימאלי (MST) על הגרף הנכנס כקלט.
- (2) הכפל כל קשת ב – MST (כלומר להוסיף קשת).
- (3) מצא מסלול אויילר בגרף.
- (4) פלוט את המסלול לאחר "קיצורי דרך", כלומר, עוקבים אחרי המסלול האויילרי, אם ביקרנו כבר בעיר אזי נדלג עליה לעיר הבאה ע"י קפיצה לעיר הרצויה.

ניתוח מקדם קירוב:

1. אורך מסלול TSP אופטימאלי אינו קצר ממשקל MST. אם ניקח מסלול TSP ונשמיט ממנו קשת נקבל עץ פורש - $MST \leq w(OPT - \{e\}) < w(OPT)$.
 2. אורך המסלול האויילרי הוא בדיוק 2MST.
 3. אורך מסלול הפלט לכל היותר כאורך המסלול האויילרי בגלל אי-שוויון המשולש.
- לסיכום:

$$w(ALG) \stackrel{(3)}{\leq} w(EulerTour) \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot w(MST) < 2 \cdot w(OPT)$$

כדי לקבל קירוב טוב יותר נגדיר את המושג **זיווג בגרף**: קבוצת קשתות שאינן נוגעות אחת בשנייה.
עובדה: ניתן למצוא בזמן פולינומי זיווג בעל משקל מירבי בכל גרף.

קירוב 1.5 ל – TSP מטרי:

נחליף את שלב 2 באלגוריתם המקורי ב:
מצא זיווג מושלם מינימאלי על הצמתים בעלי הדרגה האי-זוגית.

ניתוח מקדם קירוב:

טענה: משקל זיווג מינימום $\geq \frac{1}{2}$ אורך מסלול TSP אופטימאלי.

הוכחה: נסתכל על מעגל של הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית ומספר זוגי של צמתים (מעגל שמתקבל מה – OPT ע"י קיצורי דרך). אזי: $w' \leq w(OPT)$.

נסמן: $w1$ – משקל הקשתות הזוגיות; $w2$ – משקל הקשתות האי-זוגיות. $w1 + w2 = w'$.

$$\min(w1, w2) \leq \frac{w'}{2} \leq OPT$$

תוצאה:

$$w(ALG^*) \leq w(EulerTour) = w(MST) + w(matching) \leq OPT + \frac{OPT}{2} = \frac{3}{2}OPT$$

עץ פורש – Spanning Tree

עץ פורש לגרף הוא קבוצת קשתות של G שנוגעת בכל הצמתים, קשירה וחסרת מעגלים.
במובני אופטימיזציה, מעניין למצוא עץ פורש מינימאלי (MST): בגרף ממושקל, עץ פורש מינימאלי
הוא עץ פורש בעל משקל קשתות מזערי.
משפט: יש אלגוריתם פולינומי ל-MST.