ניתוח של אלגוריתמים – שיעור 14

מרצה: פרופ' בועז פת שמיר

סיכום: סיימון קורמן

חישוב מבוזר II (Distributed Computing)

חסם תחתון לבחירת מנהיג על טבעת

מספר ההודעות:

נראה חסם תחתון לאלגוריתמים מבוססי השוואות (comparison based), כלומר כאלו שמסתכלים רק על ההשוואה בין המספרים ולא על הערכים עצמם.

- התנהגות של אלגוריתם:
  - מתי שולח הודעות ולמי
  - מתי מסיים
  - מי מוכרז כמנהיג

הערה: אלגוריתם מבוסס השוואות מתנהג אותו הדבר אם משנים את המזהים, כל עוד שומרים על סדרם היחסי.

- נסתכל על מודלים בהם השוני היחיד בין המחשבים הוא במזהים שלהם ובקלט.

משפט: כל אלג' סימטרי המבוסס השוואות הבוחר מנהיג בטבעת מגודל n שולח $\Omega(n\lg n)$ הודעות

נניח שאלגוריתם רץ t זמן. ב – t זמן אפשר, לכל היותר, ללמוד את 2t+1 המזהים שבמרחק לכל היותר t. נשתמש בטיעון של סימטריה – אם יש שני צמתים עם אותה "תמונה" אז אף אחד מהם לא יבחר כמנהיג (כי אז גם השני היה בוחר). "אותה תמונה" – הכוונה, עד כדי סדר.

הגדרה: שתי גזרות בגודל t יקראו *שקולות* אם הן מכילות מזהים שסדרם היחסי זהה.

למה 1: אם לשני מחשבים בטבעת יש שכונת-k שקולה, אז שניהם יתנהגו באותו אופן בכל זמן $t \le k$.

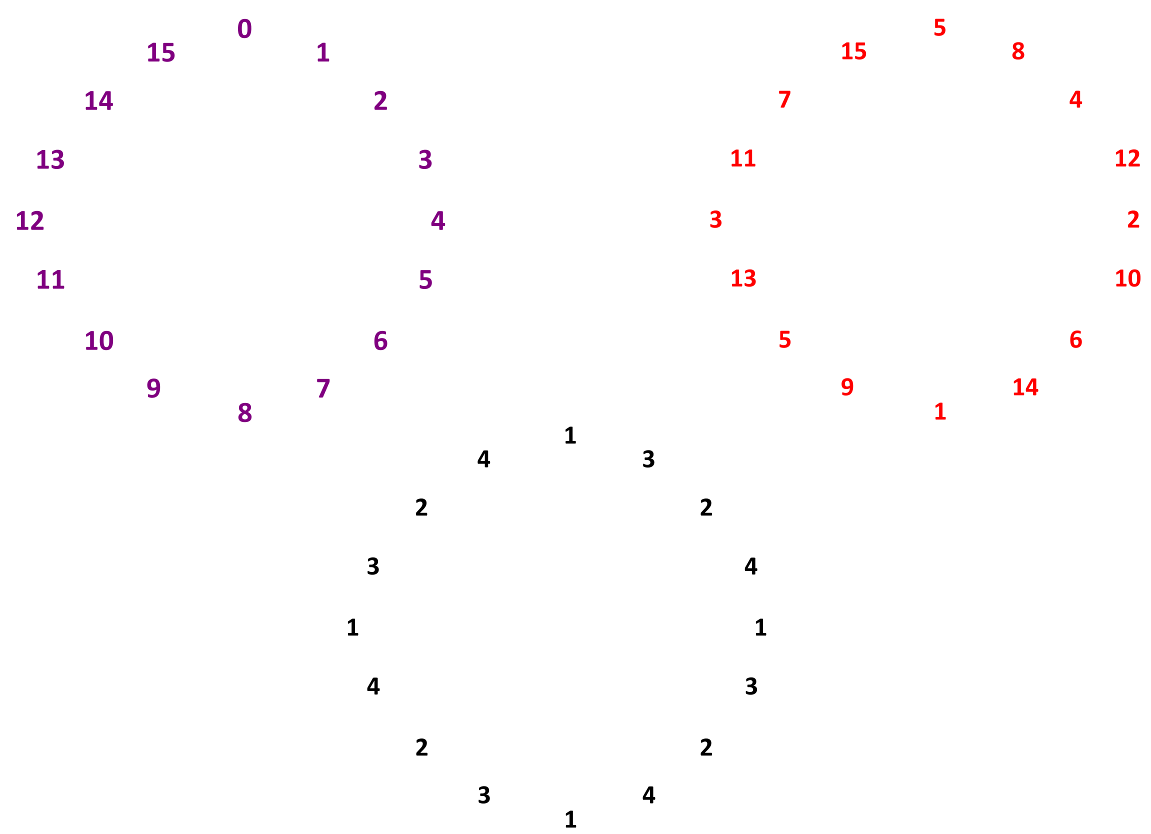
הוכחה: מההגדרות.

נשתמש ב - טבעת היפוך ביטים

דוגמא: מעגל של 4 ביטים -

- הסגול הוא הסידור המקורי

- האדום נוצר בעקבות היפוך סדר הביטים (למשל 5=0101 הופך להיות 10=1010)
- והשחור מראה מחזוריות של 4 בסדר של המספרים לאחר ההיפוך



- נעבוד עם טבעות שגודלן חזקת 2

<u>למה 2</u>: לכל $k<\frac{n}{8}$ קיימות לפחות $\frac{n}{2(2k+1)}$ גזרות שקולות בגודל 2K+1 בטבעת היפוך ביטים בגודל n.

<u>הוכחה</u>: נסמן $j=2^{\lceil \lg(2k+1)\rceil}$ (חזקת 2 הראשונה שגדולה מ- 2k+1) ונחלק את הטבעת לגזרות מגודל j. מספר הגזרות הוא: $\frac{n}{j}>\frac{n}{2k+1}$.

נחלק כך שהגזרה הנתונה מגודל 2k+1 מוכלת באחת מהגזרות בגודל j.

כיוון שלכל i, הביטים הנמוכים i בייצוג בינארי של מספרים עוקבים הוא מחזורי עם מחזור של 2^i, הסדר היחסי של המזהים בטבעת היפוך ביטים זהה בכל הגזרות.

<u>תוצאה</u>: אם מעבד כלשהו שולח הודעה בזמן k אז מספר ההודעות ששלחו בזמן k הוא לפחות $\frac{n}{2(2k+1)}$

הוכחה: למה 1 + למה 2

הוכחת המשפט:

מספר ההודעות הוא לפחות:

$$\sum_{k=0}^{n/8}\frac{n}{2(2k+1)} \geq \frac{n}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n/8}\frac{1}{k} = \frac{n}{6}\cdot H_{n/8} \geq \frac{n}{6}\cdot\lg\frac{n}{8} = \Omega(n\lg n)$$

הערה: ההגבלה של "מבוססי השוואות" הכרחית כי אחרת, ניתן לפתור ע"י n הודעות באופן הבא-

אלגוריתם שאינו מבוסס השוואות

- אם ה id של הוא i, שדר "מנהיג" בזמן n*i
- אם העברתי הודעת מנהיג כבר קודם, העבר הלאה וסיים לעבוד

- יש כאן רק n הודעות, אבל הבעיות הן:

- הזמן: n*(id מינימאלי)
- הנחות של סינכרוניות מושלמת וידיעת n

חסם תחתון לצביעת טבעת בשלושה צבעים

משפט: הזמן הנחוץ לצביעת טבעת בגודל n בשלושה צבעים ע"י אלגוריתם דטרמיניסטי היא לפחות $\Omega(\lg^* n)$

נקבע סצנריו (דוגמא קשה)

- נניח שהמזהים הם 1,...,n (לא מסודרים)

הגדרות:

$$W_{S,n} = \{(x_1,\ldots,x_S) : 1 \leq x_1 \leq n \quad s.t. \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$$

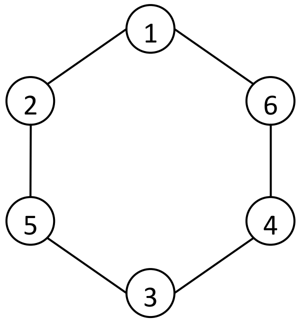
אלגוריתם שצובע בזמן t הוא פונקציה φ

$$\varphi : W_{2t+1}, n \rightarrow [1,\ldots,c]$$

נגדיר גרף $B_{S,n}$: הצמתים $W_{S,n}$ והקשתות יהיו $(x_1,\ldots,x_S)(x_2,\ldots,x_{S+1})$ אם $x_1 \neq x_{S+1}$. כלומר, זה גרף על ה"מראות" של הצמתים.

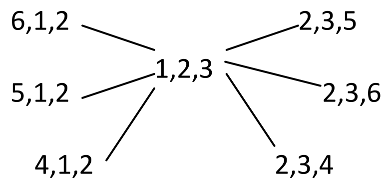
למה 1: אם φ צובע חוקית את R_n (טבעת מגודל n) ב-c צבעים, אז אפשר לצבוע את $B_{2t+1,n}$ ב-c צבעים.

דוגמא:



$W_{3,n} = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)(1,2,6),(2,1,3),(21,4)...\}$

B_{3n} :



(אלו רק השכנים של 1,2,3 בגרף)

<u>הוכחה</u>: שני צמתים סמוכים ב- R_n משרים שתי גזרות בגודל 2t+1 שהן שכנות ב- $B_{2t+1,n}$. אם הצמתים יקבלו צבעים שונים ב R_n אז הצמתים המקבילים ב- $B_{2t+1,n}$ יקבלו צבעים שונים.

<u>מסקנה</u>: מספר הצבעים הנחוץ לצבוע טבעת ב-t זמן $\leq$ מספר הצבעים הנחוץ לצבוע את הגרף $B_{2t+1,n}$

נראה כי: $\chi(B_{2t+1,n}) \geq \lg^{(2t)} n$

נגדיר גרף מכוון $\overline{B}_{S,n}$ באופן הבא

- צמתים: $(x_1,...,x_S)$ ממוינים $(x_1 < x_2 < ... < x_S)$

- קשתות (מכוונות) $(x_1,...,x_S) \rightarrow (x_2,...,x_{S+1})$

<u>אבחנה</u>: $\chi(\overline{B}_{S,n}) \leq \chi(B_{S,n})$

כי $\overline{B}_{S,n}$ הוא תת גרף של $B_{S,n}$ (כשמתעלמים מהכווניות)

<u>נגדיר</u>: גרף קשתות (line graph) LG(H) של גרף מכוון H מוגדר ע"י:

- צמתים: קשתות של H
- קשתות: מצומת e_1 ל- e_2 אם הזנב של e_2 הוא הראש של e_1 בגרף H

למה: $\overline{B}_{S+1,n} = LG(\overline{B}_{S,n})$

הוכחה:

- ניקח קשת ב- $\overline{B}_{S,n}$: $(x_1,...,x_S) \to (x_2,...,x_{S+1})$ אז $(x_1,...,x_{S+1})$ צומת ב- $\overline{B}_{S+1,n}$

- שתי קשתות עוקבות ב- $\overline{B}_{S,n}$ הן $(x_1,...,x_S) \to (x_2,...,x_{S+1}) \to (x_3,...,x_{S+2})$ והקשת המתאימה ב- $\overline{B}_{S+1,n}$ היא $(x_1,...,x_{S+1}) \to (x_2,...,x_{S+2})$ וזה נובע ישירות מההגדרות.

למה: לכל גרף מכוון H: $\chi(LG(H)) \ge \lg \chi(H)$

הוכחה: נניח שנתונה צביעה של LG(H) ב-k צבעים.

אז זוהי צביעת הקשתות של H, כך שלכל שתי קשתות עוקבות $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3$ מתקיים שצבען שונה.
נצבע כעת את צמתי H ב- 2^k צבעים:

- הצבע של צומת ב-H יהיה וקטור בינארי של k ביטים, המציינים את צבע הקשתות הנכנסות לצומת. בוקטור הזה מופיע הביט "אחד" לכל צבע של קשת שנכנסה לצומת.

- זוהי צביעה חוקית של H: אם $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2$ ב- H אז הצבע של e_1 מודלק ב - v_2 וכבוי ב- v_1 (מחוקיות הצביעה של LG(H))

תוצאה: $\chi(\overline{B}_{S,n}) \ge \lg^{(s-1)} n$

הוכחה: נסתכל על $\overline{B}_{1,n}$ זהו קליק שהצמתים שלו הם $\{1,2,...,n\}$ וכל זוג צמתים מחוברים ולכן: $\chi(\overline{B}_{1,n}) = n$

על פי הלמה: $\chi(\overline{B}_{2,n}) \ge \lg \chi(\overline{B}_{1,n}) \ge \lg n$

מסקנה: $\chi(B_{2t+1,n}) \ge \lg^{(2t)} n$ (השתמשנו כאן גם ביחסי הצביעה שבין B ל $\overline{B}$)

משפט: לאלגוריתם הצובע טבעת בשלושה צבעים מתקיים: $t \ge \frac{1}{2}(\lg^* n - 1)$

הוכחה: צריך ש- $\chi(B_{2t+1,n}) \le 3$

כלומר, ש- $\lg^{(2t)} n \le 3$

וזה שקול לכך ש- $t \geq \frac{1}{2}(\lg^* n - 1)$

<u>הערות</u>:

- שינוי מ-3 צבעים למספר אחר היה משנה רק את הקבוע
- החסם תופס לגרף כללי