

קוטר הגרף:

$$2^*(\log k + 1) = \theta(\log k)$$

ביט ניתן להעביר או דרך גרף ה"שתי וערב", או דרך העץ הבינארי, כאשר השיקול הוא מהירות לעומת כמות הביטים שניתן להעביר בו-זמנית; קשה להעביר דרך העץ הבינארי הרבה ביטים, כי המעברים בו צרים מאוד – אבל, הביטים עוברים בו מהר מאוד, בניגוד למעבר דרך הגרף שתי וערב שהמצב בו הפוך.

נניח כי הגרף אותו תיארנו לעיל, הוא למעשה מכונת מצבים **טרמינסטית**.

נגדיר:

$$Z_t = \{v_{ij} : 1 \leq j \leq m, j > t\} \cup \{u_j : j > t\}$$

וכן נגדיר את ϕ_t מספר הקשתות שנכנסות לגרף העץ הבינארי שלא מתוך Z_t

נשים לב כי:

$$\phi_1 = 1$$

$$\phi_2 = 1$$

$$\phi_3 = 2$$

$$\phi_4 = 1$$

$$\phi_5 = 2$$

$$\phi_6 = 2$$

$$\phi_7 = 3$$

ככלל, נשים לב כי התוצאה היא שהערך ϕ_t הוא למעשה מספר הביטים שסימנם 1 (=משקל המינג) של t .

תכונה: לכל T , $\sum_{i=1}^T \phi_i \leq 2T$, (מס' ערכי ה-1 ב-prefix באורך T , הוא לא יותר מ- $2T$).

נסמך: ϕ_t - מס' המצבים האפשריים של Z_t בזמן $t-1$.

נשים לב כי המצב ההתחלתי הוא בודד, ולכן:

$$\phi_1 = 1$$

טענה 1: אם האלגוריתם מסיים לרוץ ב-T יחידות זמן, אז $\varphi_T \geq 2^m$ (*). הדבר ברור, מכיוון שבזמן T- מספר המצבים האפשריים עבור כל אחד מהקודקודים שבעמודה האחרונה הוא 2, ולכן מס' המצבים האפשרי השונה יהיה גדול שווה ל- 2^m .

טענה 2: אם $t < k$ אז $\varphi_t < 2^{L2^t}$ (**)

הוכחה: נראה כי מתקיים: $\varphi_{t+1} \leq \varphi_t 2^{\phi_t L}$

הדבר אינטואיטיבי מכיוון שאינפורמציה חדשה מתקבלת אך ורק דרך העץ הבינארי והרי שכמות הקשתות מהעץ שמכניסות לעץ מידע חדש הוא בהגדרה ϕ_t הרי שכמות הביטים החדשה שנכנסת היא $\phi_t L$ והרי שזה מוכיח את האמור לעיל.

לכן, לאחר הפעלת רקורסיה נקבל:

$$\varphi_{t+1} \leq \varphi_1 2^{L \sum_{k=1}^t \phi_k} = 1 * 2^{L2^t}$$

מסקנה: זמן ריצה של של אלגוריתם FT על הגרף הנתון הוא **לפחות**

$$\text{Min}(k-1, \frac{m}{2L})$$

זאת מכיוון שאין סיבה כי $T > k-1$ מכיוון שיש לעשות $k-1$ צעדים כדי שכל הביטים יגיעו דרך גרף ה"שתי וערב" מהשולח למקבל, והרי שלפי (*) ו-(**):

$$2^m \leq \varphi_T < 2^{L2^T}$$

ולפיכך חייב להתקיים כי $L2^T > m$, קרי $T \geq \frac{m}{2L}$

נבחר את m להיות $\sqrt{n2L}$ וכיוון ש- $k \cong \frac{n}{m}$ נקבל חסם תחתון של $\sqrt{\frac{n}{2L}}$ עבור זמן הריצה (בשני צידי המינימום).

רדוקציה של FT לעץ פורש מינימלי

עכשיו נחזור לחסם תחתון על עץ פורש מינימלי.

בהינתן בעיית FT נבנה הגרף כמקודם עם המשקלים הבאים:

כל קשתות המסלולים: (v_{ij}, v_{ij+1}) - משקל 0

כל קשתות העץ הבינארי – משקל 0

משקל כל קשת: (u_i, v_{ji}) כאשר $1 < j < k$ - משקל 10

משקל כל קשת: (u_k, v_{jk}) - משקל 1

משקל כל קשת: (u_1, v_{j1}) - יהיה 0 או 2 לפי הביט ה-j שהשולח ב-FT צריך להעביר

בכך למעשה נוכל ליצור עץ פורש מינימלי:

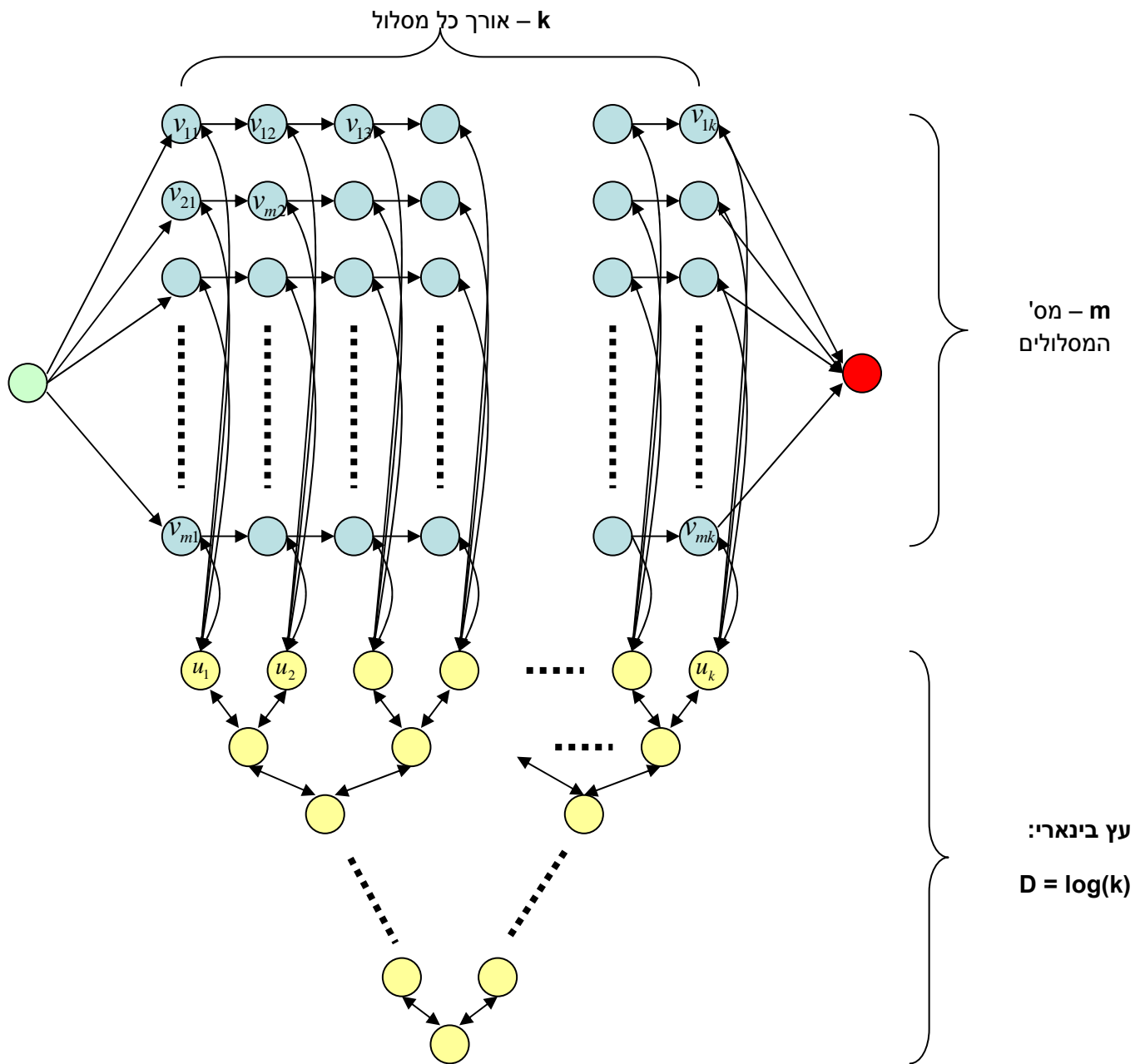
- מכיוון שהמשקולות שמעבירות לעץ הבינארי יהיו כבדות מאוד, הרי שלא נעבור דרכו, אלא רק דרך הנקודות בהן משקל הקשת (u_1, v_{j1}) יהיה 2.
- בוודאי שלא נחזור אליו כאשר אנו כבר ב"תוך" גרף ה"שתי וערב".
- לפיכך – נימנע ממצב בו יוצר מעגל.

למעשה ניתן לראות, כי פתרון בעיית העפ"מ יביא לפתרון בעיית ה-FT. מכיוון שראינו כי אין פתרון מהיר לבעיית ה-FT (החסם התחתון מתואר לעיל), הרי שאותו חסם תחתון אשר מצאנו רלוונטי גם לבעיית העפ"מ.

בנוסף, ניתן לראות כי:

- אם נחליף את העץ הבינארי לכוכב, הקוטר של הגרף יירד ל-4 והחסם התחתון מתדרדר ל- $\Omega(n^{\frac{1}{3}})$
- אם נחליף את העץ הבינארי בקליקה על צמתי u_i , החסם יירד ל- $\Omega(n^{\frac{1}{4}})$
- אם נצליח להוריד את קוטר הגרף ל-2, נוכל למצוא אלגוריתם שרץ בזמן $O(\log n)$.
- במידה וניצור קליקה על הגרף נוכל למצוא אלגוריתם שרץ בזמן $O(\log \log n)$.

נספח א' – תיאור משפחת הגרפים $G_n(m,k)$



נשים לב כי ניתן לחלק את הגרף לשני "תת גרפים" – תת גרף "שתי וערב" $(m \cdot k)$, ותת גרף ה"עץ הבינארי"

מקבל



שולח

