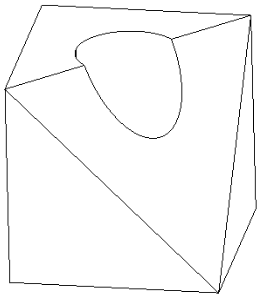
שיעור מס' 8 - גיאומטריה תאורית א': נקודות וישרים במערכת מונג'

אנו מתחילים עכשיו פרק חדש בקורס בשם גיאומטריה תיאורית. הגיאומטריה התיאורית באה לעזור לנו להבין כיצד נראים גופים והיטלים בגודל אמיתי, בלי העיוות של הפרספקטיבה. לדוגמה: אם יש לנו קוביה עם קדח במרכזה, אין לנו בעיה לצייר את שלושת ההיטלים שלה, אבל אם נוריד חלק מהקוביה שעובר דרך הקדח בצורה כזו:

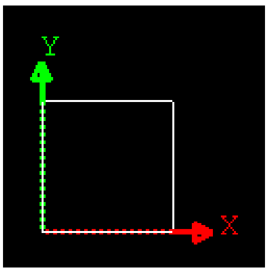


(pic-H1)

יש לנו בעיה. אין לנו מושג איך אמור להיראות הקדח החתוך, מה הגודל האמיתי שלו, מה הזווית וכו'. כאן באה לעזרתנו הגיאומטריה התיאורית. אך הבה נתחיל מהבסיס.

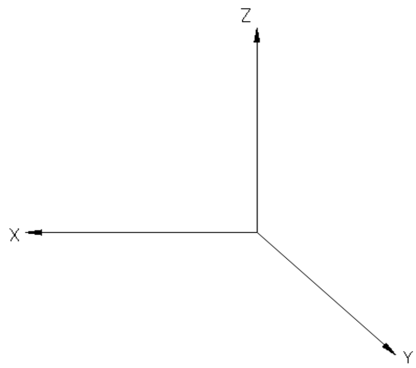
חלק א' – הגדרת מערכת הצירים של מונג' (Monge):

עד עכשיו עבדנו עם מערכת צירים רגילה – X,Y



(pic-H2)

מעתה, נעבוד במערכת צירים אחרת הנקראת מערכת מונג', על שם ממציאה הצרפתי, שחי לפני כ-200 שנה. על מנת לקבל מערכת מונג', תחילה עלינו להגדיר מערכת צירים במרחב. נעשה זאת בצורה הבאה:

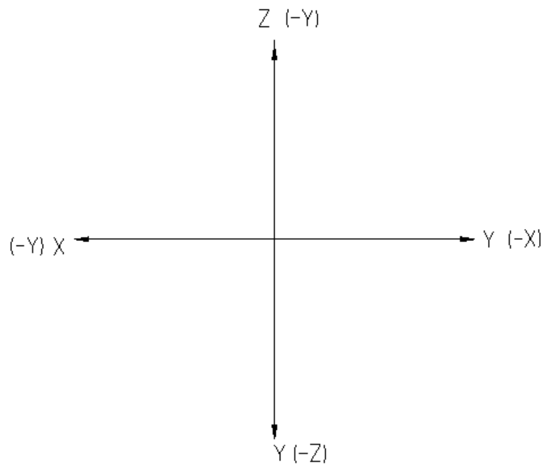


(pic-H3)

כלומר, ציר x החיובי הוא שמאלה, ציר z החיובי הוא למעלה ואילו ציר y החיובי יוצא אלינו, מאונך למישור הדף. בצורה כזו נקבל שלושה משטחים אותם נגדיר בצורה הבאה:

- מישור XZ יהיה מישור החזית.
- מישור XY יהיה מישור הרצפה.
- מישור YZ יהיה מישור הפרופיל.

כעת נדמיין שאנו גוזרים בעזרת מספריים לאורך ציר Y, עד לראשית הצירים.
כתוצאה מגזירה זו, אם "נפתח" את המישורים, נקבל את מערכת הצירים הבאה:



(pic-H4)

ציר Y מתפצל לשני צירים וצירי X ו-Z נשארים במקומם.

מונג' נתן שם לכל אחד מהמישורים הראשיים (XZ,XY,YZ) והם:

- XZ – ייקרא מישור $\pi 2$.
- XY – ייקרא מישור $\pi 1$.
- YZ – ייקרא מישור $\pi 3$.

היות ואלו צירים, נסמן אותם מעתה בקו ציר.

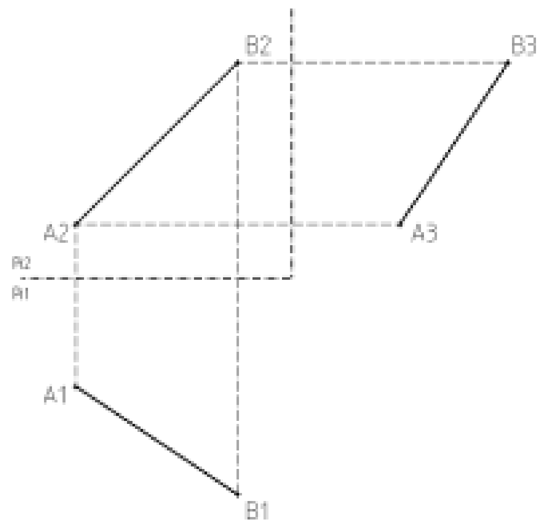
<u>חלק ב' – יצירת קווים ונקודות במערכת מונג':</u>

עכשיו, נתחיל לעבוד במערכת מונג'. נתחיל מהדבר הפשוט ביותר והוא נקודות. לכל נקודה במרחב אנו מגדירים 3 קואורדינטות – A (6 , 5 , 3). במידה ונתונות לנו 3 הקואורדינטות, אין לנו בעיה למצוא את הנקודה בכל אחד מהמישורים. במישור XY תהיה הנקודה במיקום (6 , 5) וכן הלאה.

נניח שנתונה לנו נקודה רק באחד המישורים. למשל מישור $\pi 2$. אזי, יש לנו את ערכי X ו-Z של הנקודה, ואנו יודעים על אילו ישרים תימצא הנקודה במישורים $\pi 1$ ו-$\pi 3$. במידה והנקודה נתונה בשני מישורים, לא תהיה לנו שום בעיה לאכן אותה על הישרים ולמצוא את מיקומה המדוייק במישור השלישי. דבר דומה עשינו בזמנו בשיטת 45 המעלות בשרטוט הטכני.

- חשוב מאוד: כאשר אנו מציירים נקודות בשלושת ההיטלים, יש לרשום ליד כל נקודה את מספר המישור שלה. כלומר, נקודה A ב-$\pi 2$ תירשם כ-A2 וכן הלאה.

כעת נעבור לקווים. כל קו ישר מוגדר חד משמעית על ידי שתי נקודות. אבל עם נקודות אנחנו כבר יודעים לעבוד, נכון? ניקח לדוגמא קו כלשהו במרחב, ונצייר אותו בשלושת ההיטלים.



(pic-H5)

בתמונה זו אנו רואים את הקו AB בשלושת ההיטלים שלו.

<u>חלק ג' – קווים מיוחדים והגדרת אורך אמיתי של קו:</u>

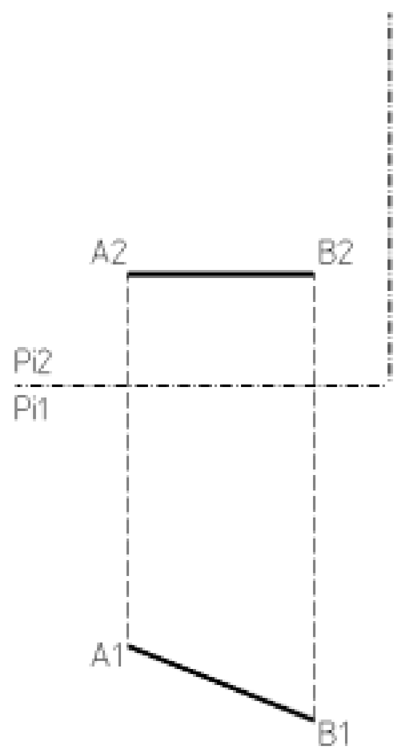
שימו לב: האם אנו יודעים מהו אורכו האמיתי של הקו AB? האם יש היטל בו הוא מופיע באורכו האמיתי? התשובה היא לא.

נגדיר מספר קווים מיוחדים שיקלו על עבודתנו בגיאומטריה תאורית:

1. קו אופקי – כל קו הנמצא במישור המקביל למישור הרצפה (לא משנה באיזו זווית).
2. קו אנכי – כל קו הנמצא במישור מאונך למישור הרצפה.
3. קו פרופיל – כל קו הנמצא במישור מקביל למישור הפרופיל (YZ).

מה שמיוחד בקווים אלו, הוא שאם אנו רואים אותם במישור המתאים, הם ייראו לנו באורך אמיתי. בואו נראה: נניח שיש לנו קו כלשהו הנמצא במישור מקביל למישור הרצפה. הרי שכשנסתכל עליו מלמעלה (מבט על) ייראה לנו הקו באורך אמיתי. כנ"ל לגבי קו פרופיל וקו אנכי (במישור פאי 2).
כיצד נדע לזהות קו באורך אמיתי?

במידה ויש לנו את שלושת המישורים ($\pi 1$, $\pi 2$, $\pi 3$), ואנו רואים שבאחד ההיטלים, קו כלשהו מקביל לאחד מקווי הציר, אזי, בהטל מעבר לקו הציר, ייראה הקו באורך אמיתי.



(pic-H6)

אנו רואים את קו AB באורך אמיתי במישור ה1. מדוע? אנו יודעים שקו הציר X הוא למעשה מישור הרצפה (בהיטל קצה). מכאן, שכל קו שמקביל לציר ה-X נמצא במישור מקביל לרצפה. וכבר הסכמנו שכל קו במישור המקביל לרצפה ייראה באורך אמיתי במבט על. באופן דומה ניתן לראות אורך אמיתי לגבי כל הצירים. חשוב לזכור שהכלל הזה עובד גם הפוך, כלומר, אם יש לנו קו באורך אמיתי, אז במישור הצמוד לו הוא יופיע כקו מקביל.

- כאשר נתון לנו קו כלשהו באורך אמיתי, יש לסמן עלי א.א.

חלק ד' – הגדרת היטל קצה:

נגדיר מושג: היטל קצה. היטל קצה הוא למעשה ההיטל של נקודה, קו או מישור על מישור המאונך להם. כלומר, היטל קצה של קו, יהיה על מישור המאונך לקו. מכאן, שהיטל קצה של קו הוא נקודה. באופן דומה, היטל קצה של מישור הוא קו וכן הלאה.

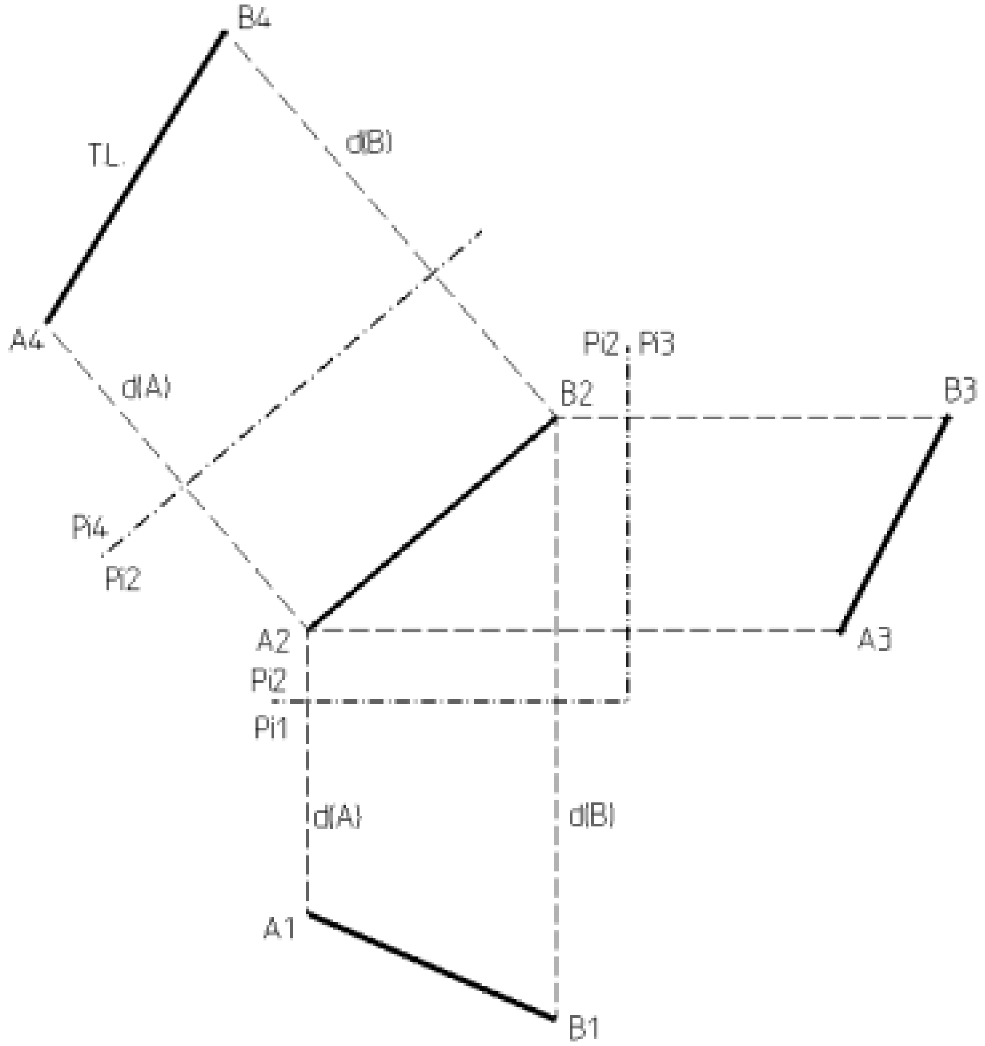
אפשר לראות זאת טוב מאוד על ידי ניסוי הכדור: קחו כדור מושלם וציירו אותו בדו-מימד. תקבלו עיגול. עכשיו קחו עיגול ונסו לצייר אותו במבט צד (מאונך ב-90 מעלות למישור העיגול) ותקבלו קו. כעת נסו לצייר את הקו במישור המאונך לו ב-90 מעלות ותקבלו נקודה. זוהי הדגמה של כל היטלי הקצה.

חלק ה' – מישורי עזר ומציאת אורך אמיתי של קו:

כעת נלמד כיצד למצוא קווים באורך אמיתי. כמו שראינו בדוגמה הראשונה של קו AB, לפעמים, באף אחד מההיטלים לא יהיה הקו נתון באורכו האמיתי. לשם כך, נצטרך ללמוד להשתמש במישורי עזר אותם נגדיר בעצמנו. נניח שנתון לנו קו AB בשלושת ההיטלים, ואנו רואים שהוא אינו באורך אמיתי באף אחד מהם. כידוע, קו באורך אמיתי יימצא מצידו השני של קו ציר המקביל לו. מכאן, שהדבר הראשון שעלינו לעשות הוא לשרטט קו ציר חדש במקביל לקו שאת אורכו אנו רוצים לגלות.

1. שרטוט קו ציר מקביל לקו שאת אורכו אנו רוצים לגלות (במרחק של בערך 8 מילימטר מהקו) וניתן לו שם – ה4. אפשר לתת כל שם כל עוד זה לא ה1, 2 או 3.
2. כעת נעביר שני קווי צמד מאונכים לקו הרצוי כך שיחתכו את קו הציר וימשיכו למרחק נכבד.
3. כעת נמדוד את המרחק בין נקודות A1, B1 לקו הציר (X) ונסמן את המרחקים ב-d(a) ו-d(b). את המרחקים האלו נקצה מקו הציר ה4 על

הקווים המאונכים. נחבר את הנקודות ונקבל את קו A4B4 באורך אמיתי.
כמובן שנציין עליו א.א. או T.L.(true length).



(pic-H7)

חשוב לזכור שאת הקו המקביל אפשר לפתוח מכל מישור שרוצים. בדוגמא מ-$\pi 2$.

<u>חלק ה' – יחסים בין קווים:</u>

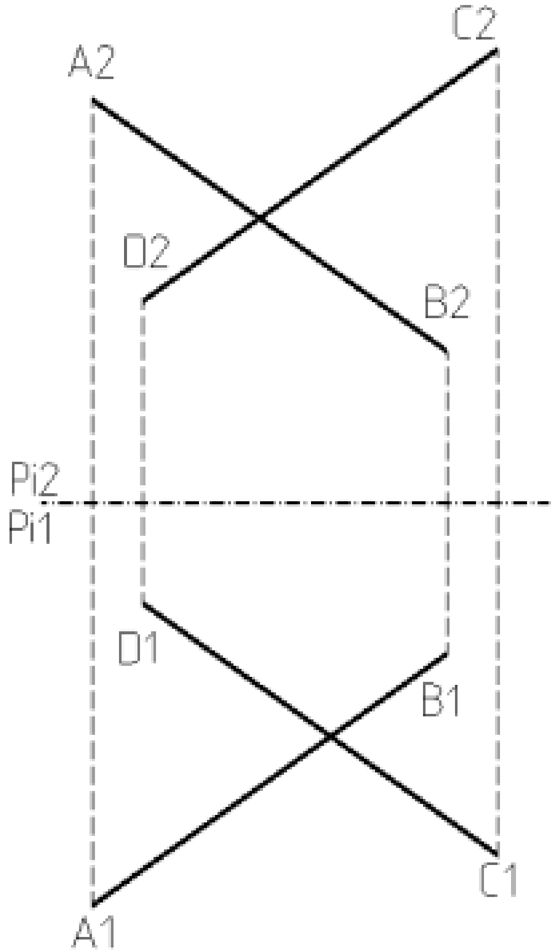
הדבר הבא שנלמד הוא יחסים בין קווים. בשיעורי הבית שלכם יש שאלה על יחסים בין קווים והכוונה אינה ליחסים בין אורכי הקווים. אנו מגדירים מספר תכונות לקווים:

1. קווים נחתכים – אלו שני קווים במרחב אשר יש להם נקודת מגע משותפת. כלומר, יש נקודה אחת במרחב ששייכת לשניהם. מכאן, שלא משנה מאיזו נקודת מבט נסתכל עליהם, תמיד תהיה להם נקודת מגע (חיתוך) משותפת.

2. קווים מקבילים – אלו שני קווים אשר אפשר להעביר דרכם מישור אחד בו יהיו מקבילים. כלומר, לא רק שמישוריהם מקבילים אלא הם עצמם מקבילים. מכאן, שלא משנה מאיזו נקודת מבט נסתכל, הם ייראו מקבילים.
3. קווים מצטלבים – זהו כנראה המקרה המעניין ביותר. קווים מצטלבים הם קווים הנמצאים על מישורים מקבילים, אולם, שלא בדומה לקווים מקבילים, לא ניתן להעביר דרכם אף מישור בו הם מקבילים. מכאן, שישנם מבטים בהם ייראו הקווים נחתכים וישנם מבטים בהם ייראו מקבילים.

כיצד נדע להבחין בין קווים מצטלבים לקווים נחתכים?

נניח שיש לנו במרחב זוג קווים נחתכים. נקרא להם AB ו-CD.



(pic-H8)

קל לראות שנקודות החיתוך של שני הקווים אינן נמצאות על אותו ישר. אבל הרי נקודת החיתוך היא בעלת אותה קואורדינטה x גם במישור $\pi 1$ וגם במישור $\pi 2$.
אם כן, הקווים שלפנינו אינם קווים נחתכים כי אם מצטלבים בלבד. כאשר הקווים נחתכים, תהיה נקודת החיתוך ביניהם תמיד על אותו ישר המאונך לקו הציר המפריד בין שני המישורים.