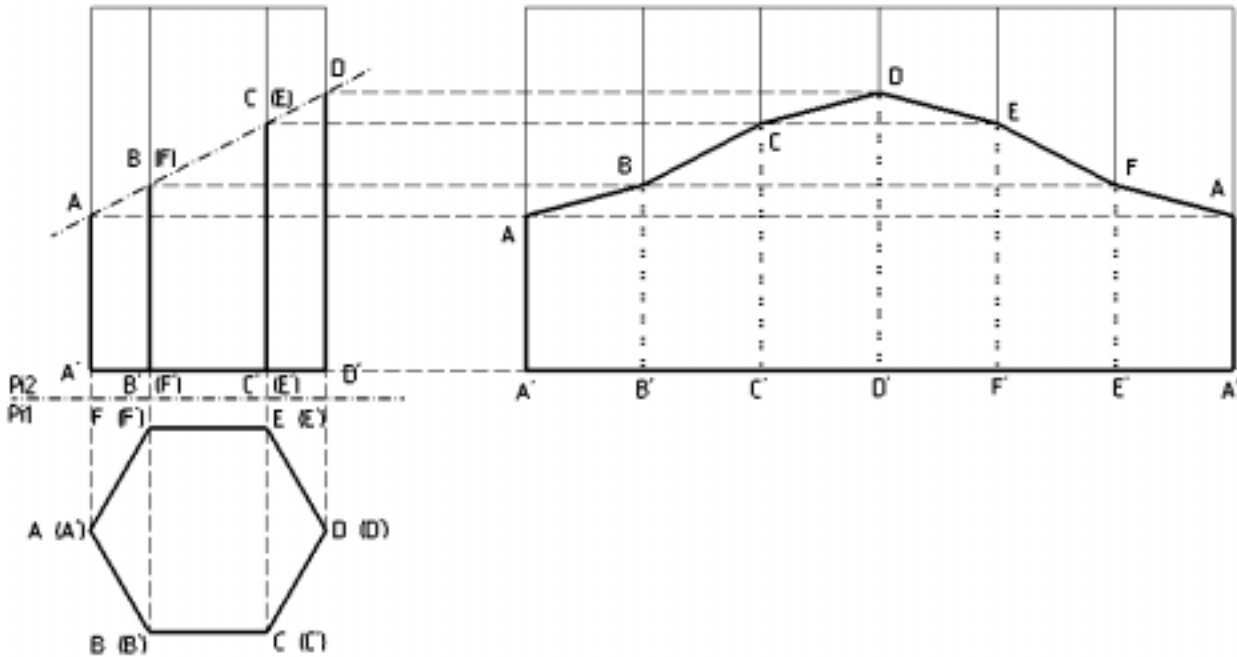




במידה ואנו מטפלים במנסרה חתוכה, חישוב אורך המלבן ישאר כמות שהוא (מפני שהבסיס לא נפגם) אבל את גובהי המקצועות נצטרך לחשב בנפרד עבור על מקצוע של המנסרה. על מנת להקל על העבודה, נעבוד על הפרישה של המנסרה השלמה. על כל קו קיפול נקצה את האורך המתאים למקצועות המנסרה. את קצות הקטעים נחבר בקווים ישרים (עם סרגל) בצורה הבאה:

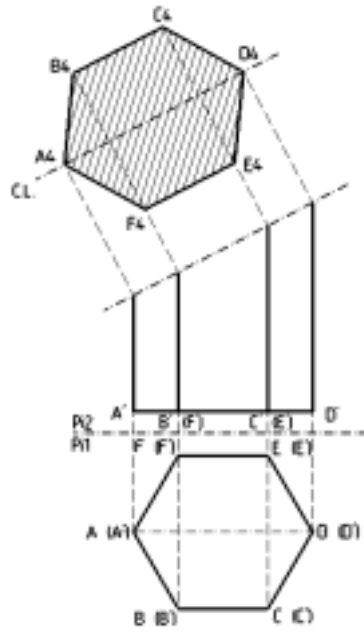


(pic-K2)

עתה עלינו למצוא את הגודל האמיתי של מישור החתך של המנסרה. על מנת לעשות זאת, יש שתי שיטות:

1. היות ומישור החתך נמצא בהיטל קצה ב- $\pi 2$ , אזי אפשר לפתוח מישור מקביל, לפרוש ולקבל את מישור החתך בגודל אמיתי.
2. עבודה בעזרת קו ציר. נעביר קו ציר באמצע החתך ב- $\pi 1$ , ונפתח קו ציר מקביל למישור החתך. נמדוד את מרחקה של כל נקודת קצה ב- $\pi 1$  מקו הציר ונקצה אותו משני צידי הציר שפתחנו. נקבל את מישור החתך.

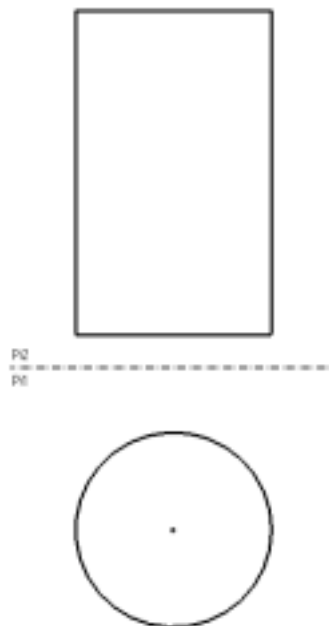
ראה איור בעמוד הבא:



(pic-K3)

חלק ב' – פרישה, חיתוך ומציאת ג.א. של מישור חתך בגליל

הגוף השני שנלמד לפרוש הוא גליל. בדומה למנסרה, נתחיל עם מבט פנים ועל של הגליל:

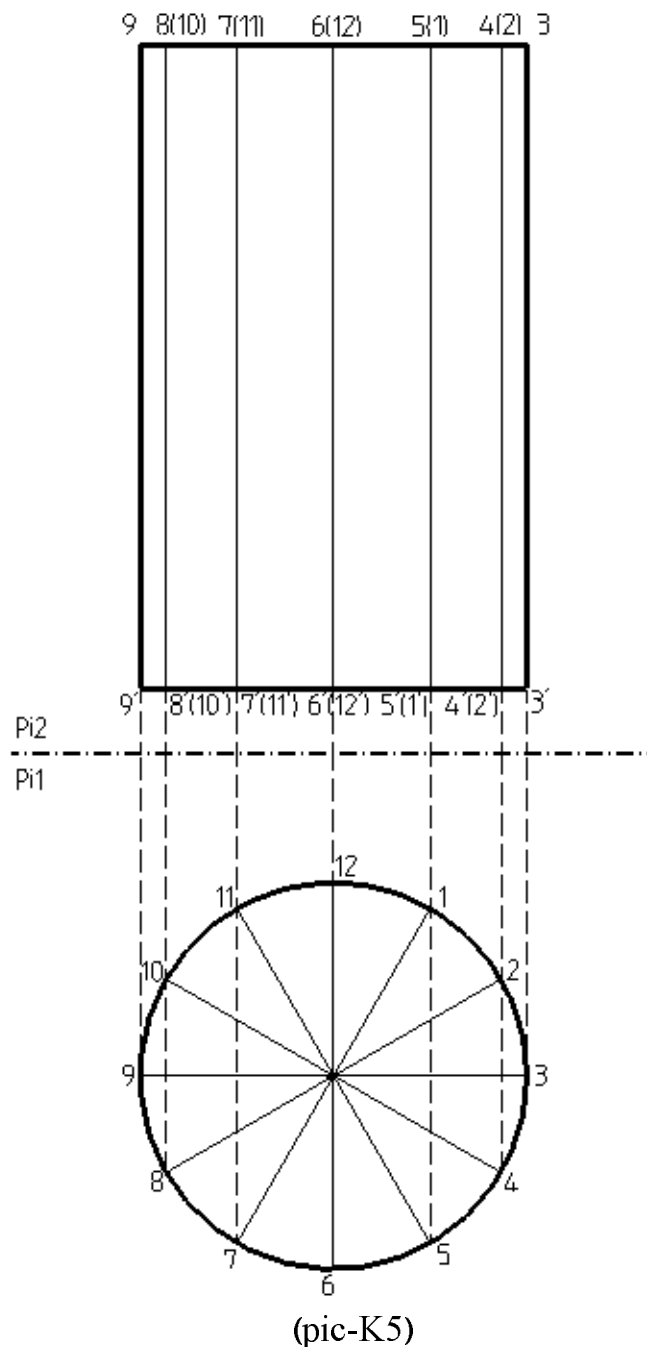


(pic-K4)

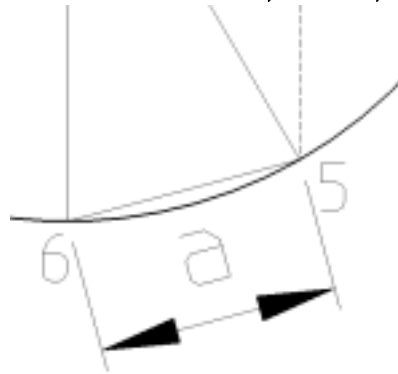


אם נחשוב על זה טוב, גליל הוא מקרה פרטי של מנסרה – בעל אינסוף מקצועות בבסיס. היות ואין באפשרותנו לצייר אינסוף קווים ולעבוד כמו במקרה של המנסרה, נבצע קירוב. את הקירוב נבצע בצורה הבאה:

1. נקצה על היקף המעגל (במישור  $\pi 2$ ) 12 נקודות (על ידי סרגל זוויות או מחוגה) בדומה לשעון מחוגים.
2. את הנקודות נמספר בדומה לשעון, כלומר, 12 למעלה, 6 למטה וכן הלאה. חשוב להבין, שכל נקודה כזו, מייצגת למעשה היטל קצה של קו אנכי הנמצא על מעטפת הגליל.
3. נעלה קווי צמד ונסמן את הנקודות גם בהיטל פנים.

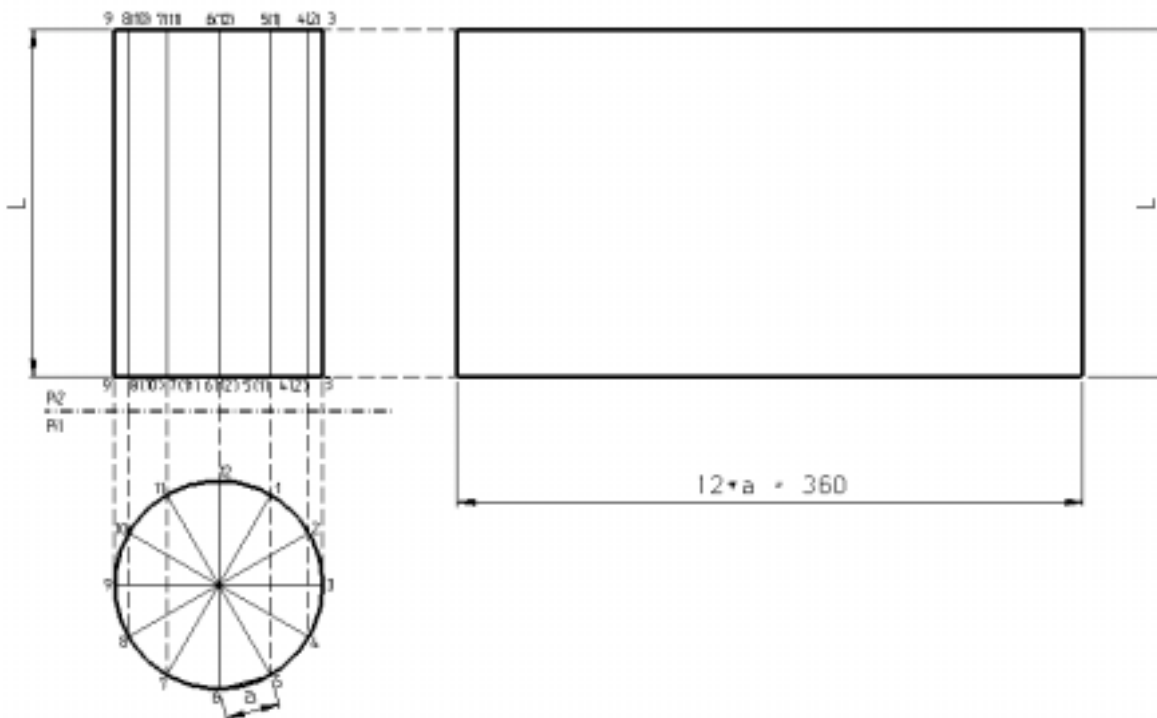


4. נמדוד את המרחק בין שתי נקודות צמודות (a) ונכפיל את המרחק ב-12.



(pic-K6)

5. נקצה את המרחק על הנייר וזה יהיה אורך המלבן. יש לזכור שבגיאומטריה תיאורית כל הפעולות נעשות באופן גרפי ולא מתמטי ולכן אין לחשב את אורך המלבן על ידי חישוב מתמטי של היקף המעגל. הסטייה תהיה קטנה ביותר מפני שבחלוקה ל-12 אורך הקשת מתקרב מאוד לאורך המיתר.
6. נמדוד את אורכו של אחד מהקווים האנכיים, למשל קו 5-5' וזה יהיה גובה המלבן.
7. על המלבן לא נקצה קווי קיפול כי על הגליל אין כאלו. הפרישה תהיה פשוט מלבן חלק.



(pic-K7)

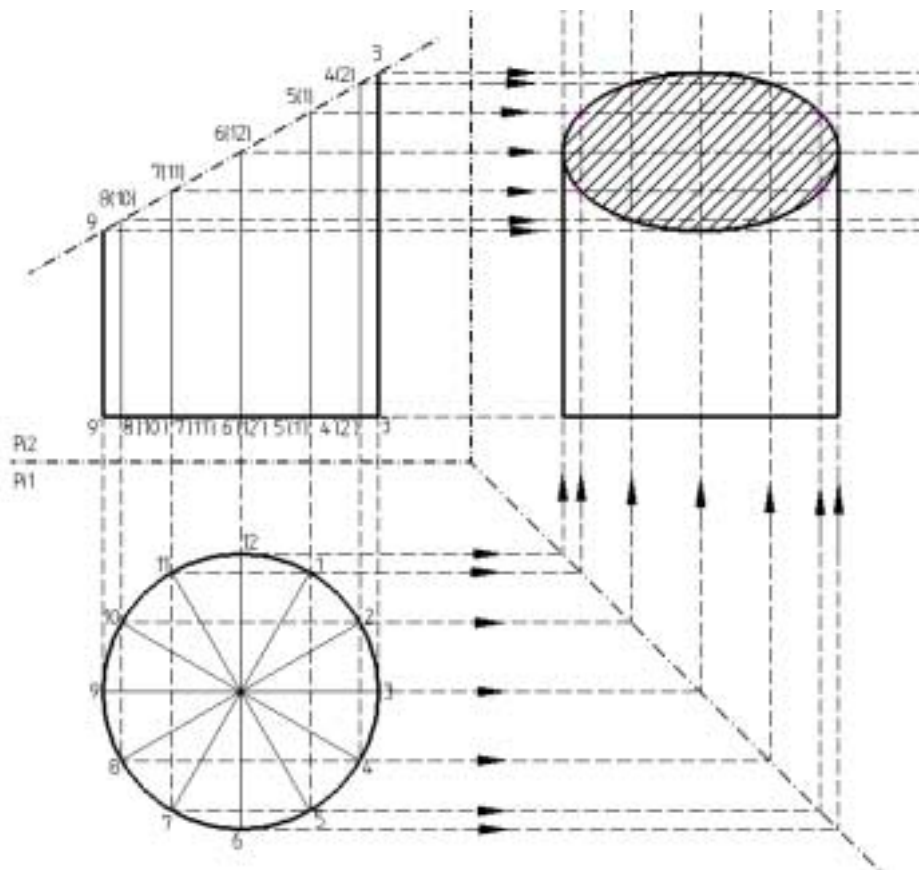
סמסטר ב' - תשס"ב  
בסיוע תוכנת CIMatron  
עמוד 5 מתוך 25

תקצירי שעורים בגאומטריה תאורית - מאת יוסי רוז'נקו  
הכנה למעבדה הוירטואלית לגרפיקה הנדסית ולתיב"ם  
שעור מס' 11 - פרישות מעטפת וחתכים



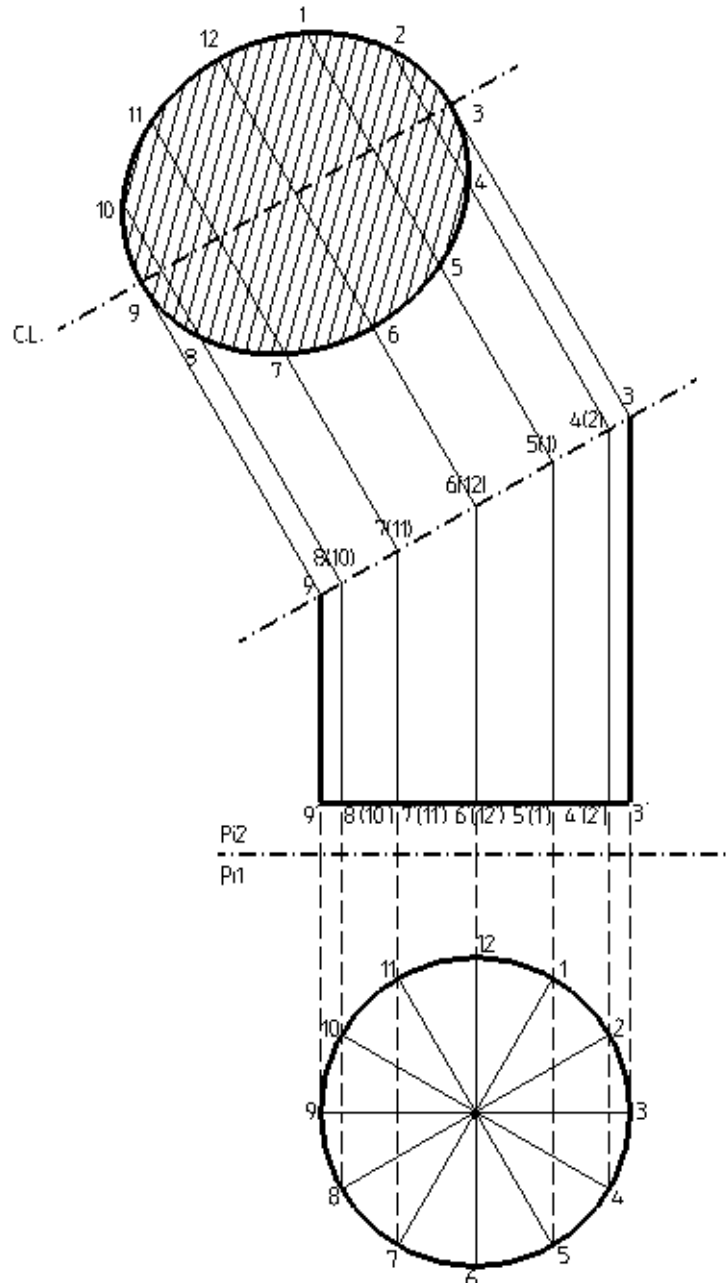
המעניין הוא לפרוש גליל שחתכו אותו. על מנת לפרוש גליל חתוך, נצטרך בראש ובראשונה להשלים את ההיטל השלישי. כרגיל, יהיו נתונים לכם שני היטלים ויהיה עליכם להשלים את השלישי. במקרה שלנו, מישור החתך נתון ב- $\pi 1$ .  
על מנת להשלים את ההיטל השלישי, נבצע מספר פעולות:

1. כמו קודם, נחלק את המעגל (במישור  $\pi 1$ ) ל-12 חלקים שווים (רצוי). נעשה זאת או על ידי מד זווית, או על ידי מחוגה או על ידי סרגלי זוויות. למען הנוחות, נחלק את המעגל ל-12 כך שיחפוף את השעות בשעון (זה מקל על העבודה). החלוקה ל-12 תיתן קירוב יחסית טוב להשלמת ההיטל.
2. נמספר כל אחת מהנקודות על המעגל על פי השעון (נקודה עליונה 12, נקודה תחתונה 6). על נקודה על היקף הגליל, מציינת למעשה קו אנכי.
3. נעלה קווי צמד למישור  $\pi 2$  עד שנגיע לבסיס הגליל. נמשיך את קווי הצמד עד לקו החתך.
4. נסמן את נקודות המפגש של קווי הצמד וקו החתך ב-6', 7' וכן הלאה.
5. כעת נמשוך מכל נקודה המסומנת בתג קו צמד למישור  $\pi 3$  ובשיטת 45 מעלות נצליב עם קווי צמד שנוציא ממישור  $\pi 1$ .
6. נקבל למעשה אסופה של נקודות המתארת אליפסה. כאמור, 12 נקודות נותנות קירוב טוב של האליפסה אבל אפשר לחלק ליותר אם רוצים להגיע לדיוק רב יותר.
7. נחבר את הנקודות לאליפסה בעזרת סרגל עקלתונים או בזהירות ביד חופשית.
8. נקווקו את מישור החתך בשלושת המישורים.



(pic-K8)

מציאת ג.א. של מישור – עתה עלינו למצוא את ה-ג.א. של מישור החתך, כלומר, הגודל האמיתי של האליפסה. על מנת למצוא ג.א. עלינו לצאת ממישור שבו החתך נמצא ב-ה.ק. במקרה זה, נמצא היטל הקצה במישור  $\pi_2$ . נפתח מישור חדש, נעתיק את הנקודות ונשרטט את האליפסה. נשתמש שוב בשיטה השניה שלמדנו והיא שרטוט מישור החתך על ידי ציר סימטריה.

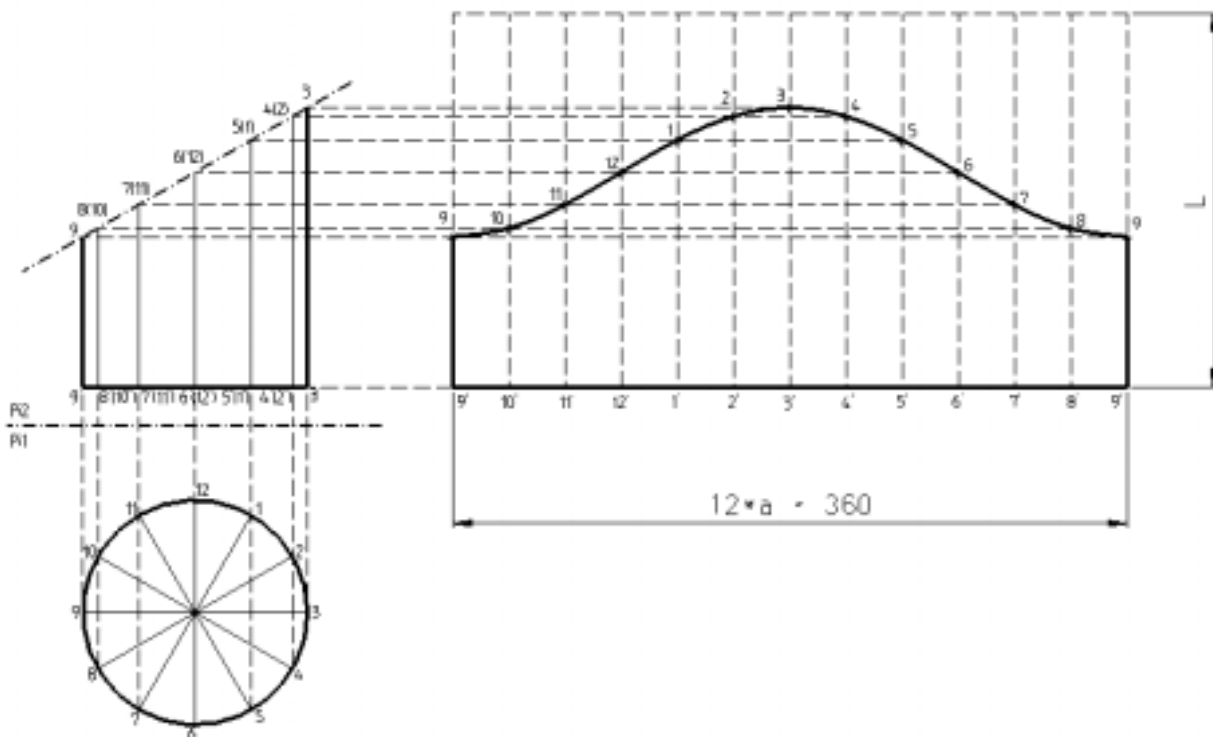


(pic-K9)

דבר אחרון שעלינו לעשות הוא לפרוש את הגליל החתוך.

סדר פעולות:

1. נתחיל בשרטוט בקווים חלשים של פרישת גליל מלא, דהיינו – מלבן. למעשה נצייר רק שני קווים אופקיים ולא נסגור את המלבן.
2. כמו קודם, בפרישת הגליל הרגיל, נקצה 12 קטעים וזה יהיה אורך המלבן. נשלים בקווים חלשים את המלבן.
3. בעקרון, לא משנה מאיזו נקודה נתחיל אבל היות ואנו רוצים לחסוך בכסף, נבחר את הפרישה כך שקו החיבור (הקו שלאורכו נחבר את הפרישה במידה ונרצה ליצור חזרה את הגליל) יהיה הקצר ביותר. במקרה שלנו נבחר את נקודה 9. חשוב לזכור שכשנמספר את הקטעים נתחיל מ-9 בצד אחד ונסיים ב-9 בצד שני (כי למעשה ברגע שביצענו את הגזירה לאורך קו 9 יצרנו קו נוסף).
4. נעלה מכל נקודה קו אנכי חלש שיחבר בין שני הקווים האופקיים של המעטפת.
5. עתה, עלינו להקצות על כל קו שכזה את אורכו האמיתי (אחרי החיתוך). אם נסתכל טוב, נראה שבמישור  $\pi/2$ , אנו רואים את האורך האמיתי של הקווים (כי הם קווים אנכיים).
6. נמדוד את האורך של כל קו (מהבסיס עד קו החתך) ונקצה אותו על הקו המתאים במעטפת. לדוגמא: מדידת האורך של 6'-6 ונקצתו על הקו האנכי שיוצא מנקודה 6 בפרישה.
7. בסופו של דבר נקבל אסופה של נקודות שתיצור קו מתאר עקלתוני כלשהו. נחבר את הנקודות בעזרת סרגל עקלתונים או ביד חופשית (בזהירות) ונקבל את קו המתאר. לאחר מכן נחזק את קווי המתאר.



(pic-K10)

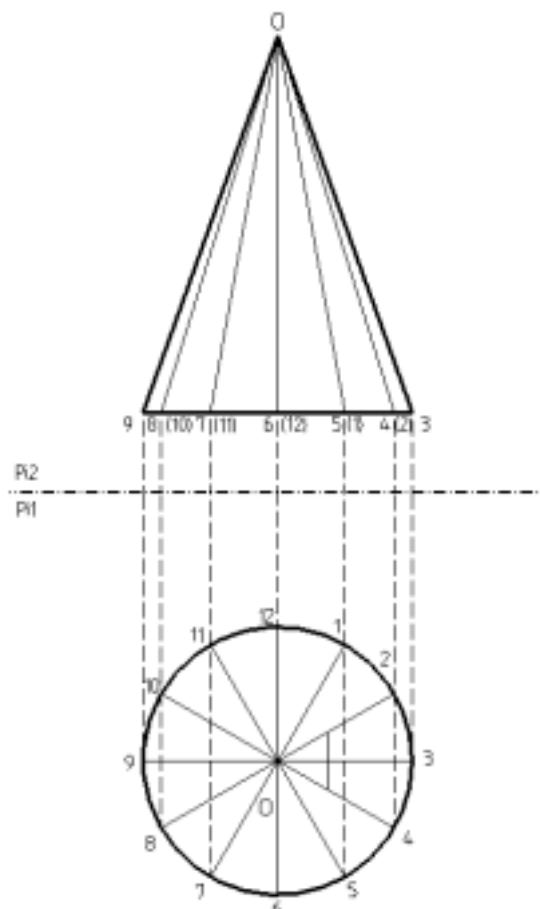


### חלק ג'- פרישה, חיתוך ומציאת ג.א. של מישור חתך בחרוט

חרוט הוא מקרה מעניין יותר. נתחיל בפרישה של חרוט שלם. המעטפת של חרוט שלם, הוא בעצם איזושהי גזרה של עיגול. על מנת לשרטט מעטפת של חרוט, עלינו להבין איך נוצר חרוט. לחרוט יש קו יוצר, קו ציר ורדיוס. אם נסובב את הקו היוצר סביב קו הציר נקבל את החרוט. כאשר אנו משרטטים את הגיזרה, רדיוס הגיזרה צריך להיות בעצם אורך הקו היוצר.

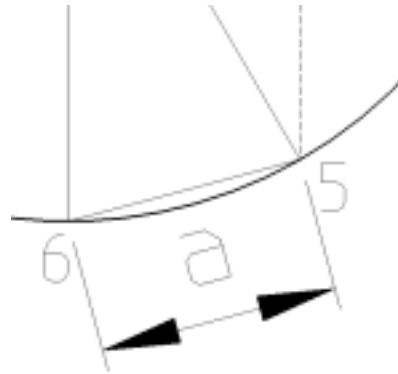
סדר פעולות:

1. נחלק (כמו בגליל) את החרוט ל-12 חלקים.
2. נסתכל על מישור  $\pi 2$ . נבחר את הנקודה הנמצאת בקצה השמאלי של בסיס החרוט. הקו היוצא מנקודה זו לקודקוד החרוט (9-O), גם הוא קו יוצר. הקו היוצר הזה הוא באורך אמיתי (כי במישור  $\pi 1$  הוא אופקי). אם כן, מצאנו את הרדיוס. חשוב לזכור שבחרוט, אורך קו המתאר הוא אורך הקו היוצר (מה שצייננו בתחילת השיעור על זיהוי אורכים אמיתיים).



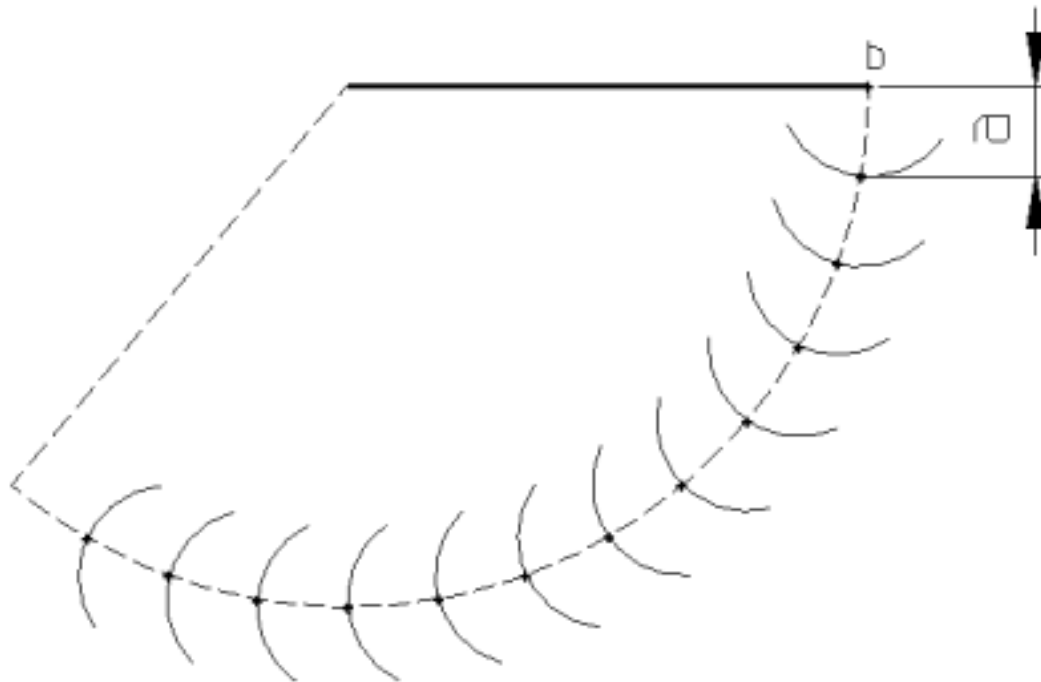
(pic-K11)

3. נפתח את המחוגה למפתח השווה באורכו לאורך הקו היוצר ונשרטט גיזרה (כרגע אנו עוד לא יודעים מה אורך הקשת). חשוב שהגיזרה תהיה ארוכה מספיק (משהו בסביבות 120 מעלות).
4. נמדוד את המרחק בין שתי נקודות על הבסיס (בדיוק כמו בגליל).



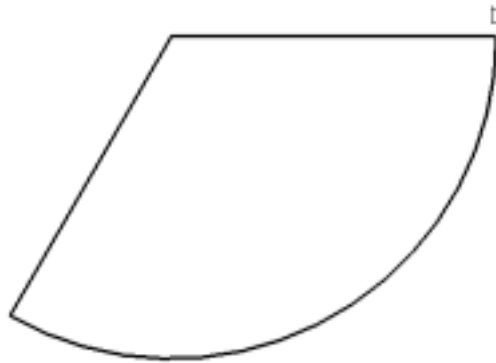
(pic-K12)

5. נקצה 12 קטעים כאלו על הקשת שיצרנו. הקצאת הקטעים תבוצע בצורה הבאה: נפתח את המחוגה למפתח  $a$ , נציב את החוד בקצה הקשת (נקודה b) ונשרטט גיזרה קטנה שתחתוך את הגיזרה הגדולה. נשאיר את המחוגה באותו מפתח ועתה נציב את החוד בנקודת החיתוך של שתי הגזרות. כך נמשיך עד שנקבל 12 מרחקים שווים על הקשת. מכאן יש לנו את אורך הקשת.



(pic-K13)

6. לבסוף נמחק את שאריות הגיזרה המיותרות והגזרות הקטנות ונחזק את מה שנשאר.

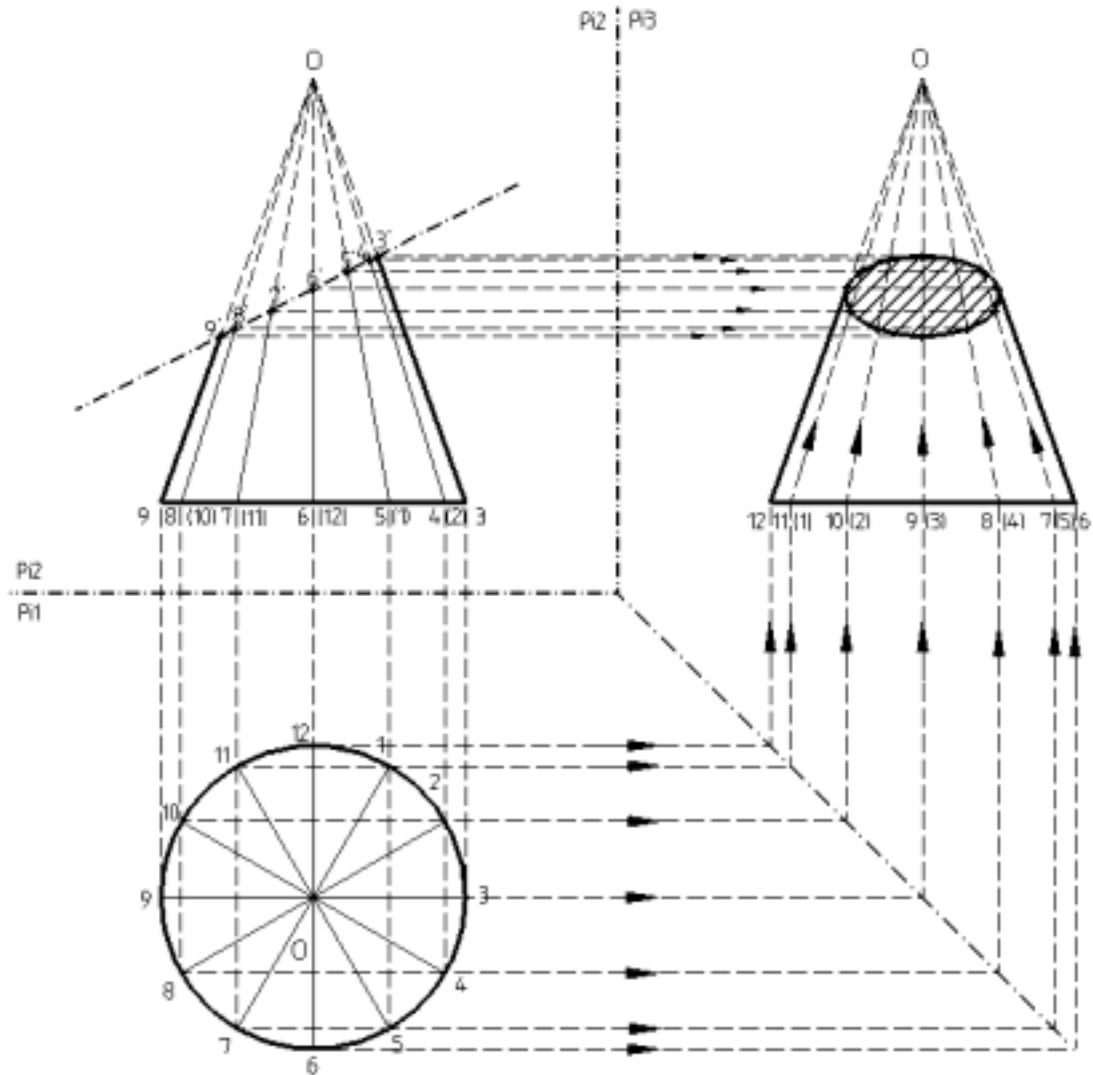


(pic-K14)

### חרוט קטום:

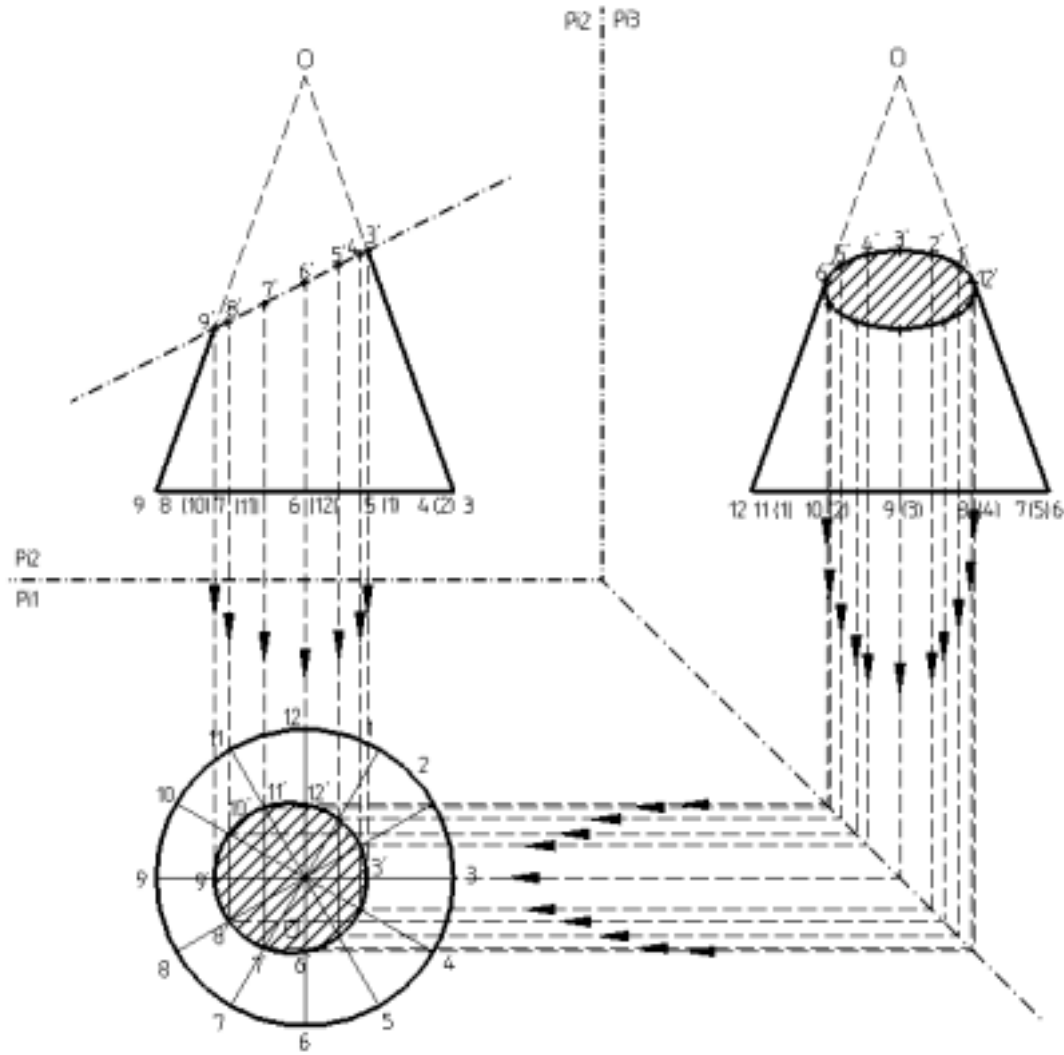
תחילה נשלים את ההיטל השלישי. על מנת להשלים את ההיטל השלישי, נבצע מספר פעולות:

1. כמו בגליל, המעגל ב- $\pi 1$  כבר מחולק וממוספר.
2. נעלה מכל נקודה קו צמד למישור  $\pi 2$  עד שנגיע לבסיס החרוט. חשוב לזכור כאן, שהנקודה 5 למשל, אינה מייצגת את הקו 5-5' כי זה אינו קו אנכי כמו בגליל. היא מייצגת את הקו מהבסיס לקודקוד (5-0).
3. מכל נקודה על בסיס החרוט במישור  $\pi 2$ , נמתח קו עזר לקודקוד (כי הרי הקווים ב- $\pi 1$  הם מההיקף לקודקוד).
4. את נקודות המפגש של קווי הצמד עם קו החתך, נסמן ב-5', 6'...
5. נמתח קווי צמד ממישור  $\pi 1$  לקו 45 מעלות ונעלה למישור  $\pi 3$  עד שנגיע לבסיס החרוט. משם, בדיוק מאותה סיבה כמו ב-2, נמשוך קווי עזר לקודקוד. נקודות ההצטלבות בין קווי העזר מ- $\pi 2$  לקווי העזר שיצאו מ- $\pi 1$ , יתנו לנו את הנקודות 5', 6'... במישור  $\pi 3$ .
6. נקבל במישור  $\pi 3$  אסופה של נקודות המגדירה קו מתאר של אליפסה.
7. בעזרת סרגל עקלתונים או בזהירות ביד חופשית, נשלים את האליפסה. ראה איור בעמוד הבא:



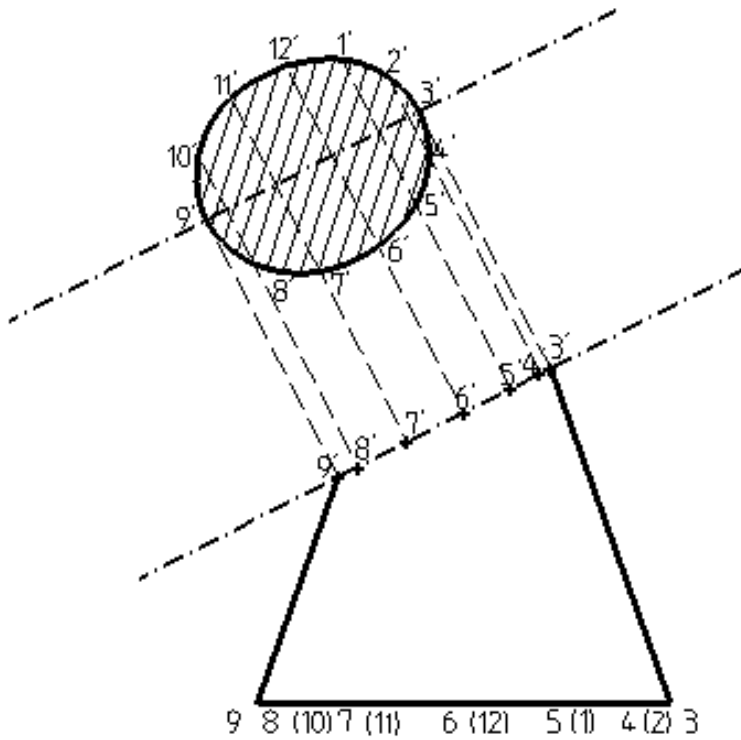
(pic-K15)

8. עתה נמצא את מישור החתך ב- $\pi_1$ . על מנת לעשות זאת נעביר את נקודות 1'-12' למישור  $\pi_1$  על ידי קווי צמד ישרים בשיטת 45 מעלות (כמו נקודה רגילה).
9. נקווקו את מישור החתך בשלושת ההיטלים. ראה איור בעמוד הבא:



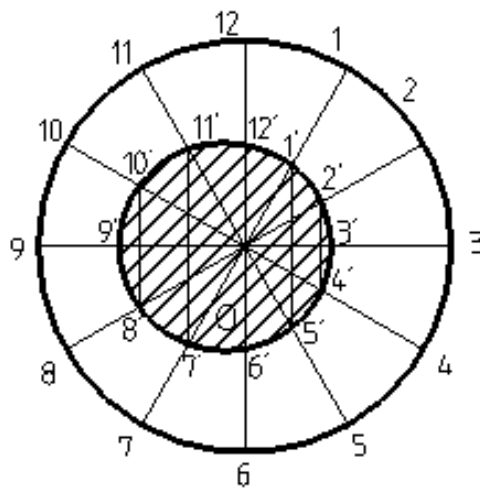
(pic-K16)

- (מפאת חוסר המקום לא צוינו בשרטוט כל הנקודות).
- מציאת הגודל האמיתי של מישור החתך תבצע באותה צורה כמו בגליל. נעביר קו ציר מקביל לקו החתך במרחק מספיק מהחרוט ונמדוד את המרחקים בין הנקודות על היקף החתך ב- $\pi$ . נקצה את המרחקים משני צידי קו הציר (אורכי הקווים  $4'-O$ ,  $5'-O$  וכן הלאה) ונקבל:



Pi2

Pi1

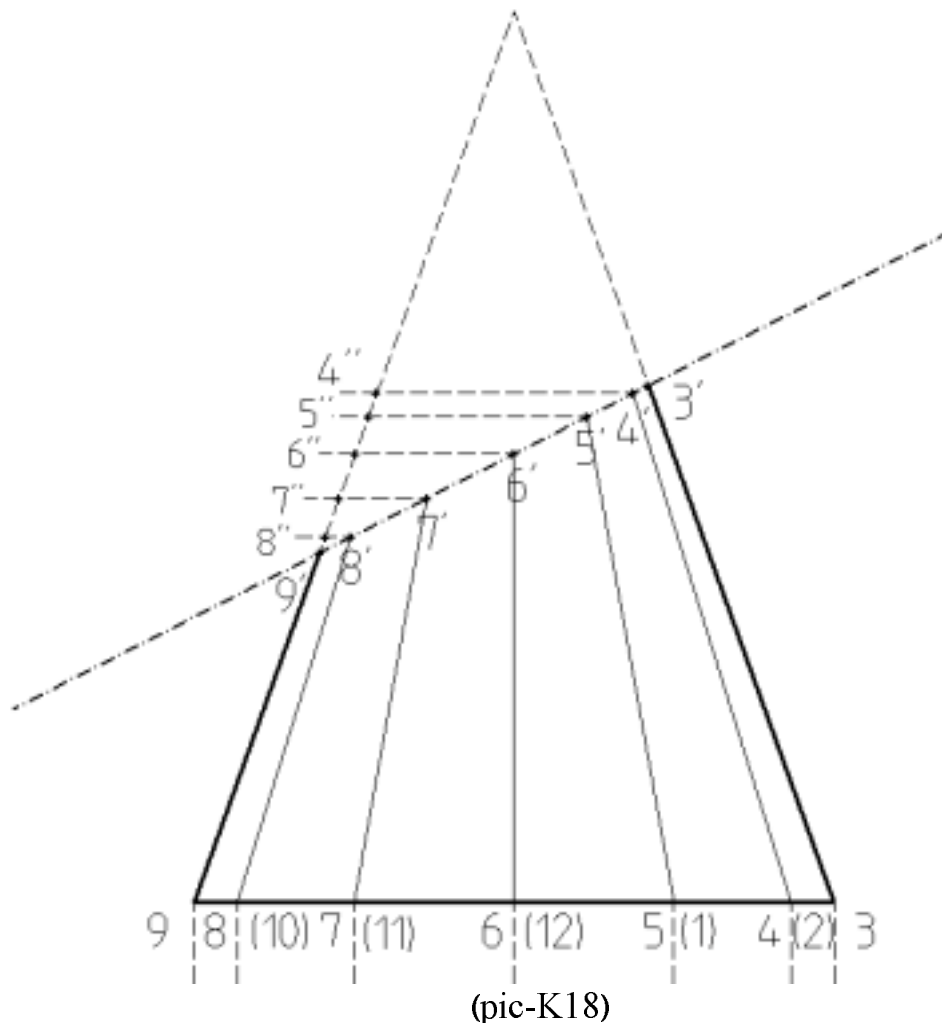


(pic-K17)

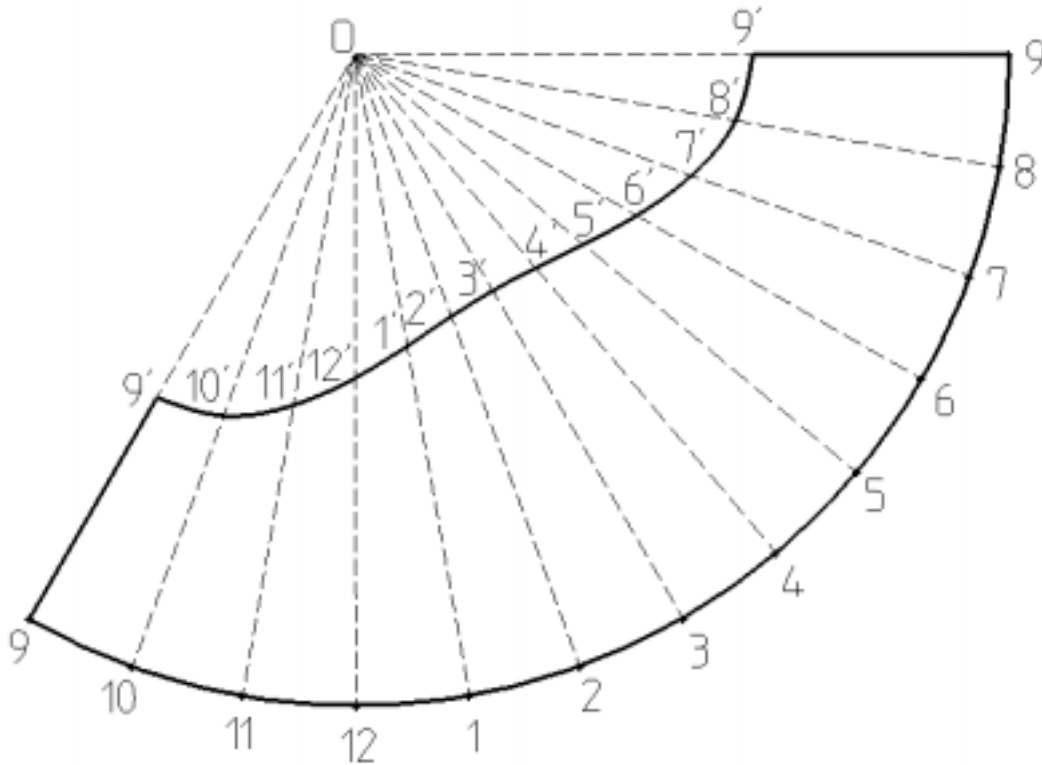
נותר לנו רק לפרוש את מעטפת החרוט. הפרישה תתבצע על המעטפת המושלמת (שכבר יצרנו מקודם) בדומה לגליל.

סדר פעולות:

1. נמספר את הנקודות על הקשת כמו שעשינו בגליל. על פי אותו עקרון, נתחיל למספר את הנקודות מהקו הקצר ביותר – נקודה 9.
2. מכל נקודה על הקשת (של המעטפת) נמתח קו חלש לקודקוד (מרכז המעגל).
3. עתה עלינו להקצות על כל קו כזה את אורכו האמיתי (אחרי החיתוך). על מנת לעשות זאת, נתבונן במישור  $\pi_2$ . כפי שאמרנו קודם, קווי המתאר הם למעשה הקו היוצר באורך אמיתי. אם כן, את האורכים של קו 9-9' (יש לזכור שקו זה מופיע פעמיים) וקו 3-3' כבר יש לנו.
4. על מנת למצוא את האורכים האמיתיים של הקווים האחרים, נדמיין שאנו מסובבים את החרוט סביב צירו. בשלב מסוים, הקו 5-5' לדוגמא, יהפוך לקו מתאר, ואנו נראה אותו באורך אמיתי. היות ובציור אין אנו יכולים ממש לסובב את החרוט, מה שנעשה זה למתוח מכל נקודה (פרט לנקודות 9' ו-3') קווים אופקיים חלשים עד שנגיע לקו המתאר (הדמיוני) של החרוט. נסמן את הנקודה ב-5", 4" ... ונמדוד את אורכי הקווים 4"-9", 5"-9" ... וכן הלאה.



5. את האורכים שנמדוד נקצה על הקווים המתאימים במעטפת הפרושה.
6. קצות הקווים (הקצוות שקרובים לקודקוד) ייצרו אסופה של נקודות המתארות קו מתאר של עקלתון.
7. נחבר את הנקודות על ידי סרגל עקלתונים או בזהירות ביד חופשית.
8. נחזק את המעטפת.



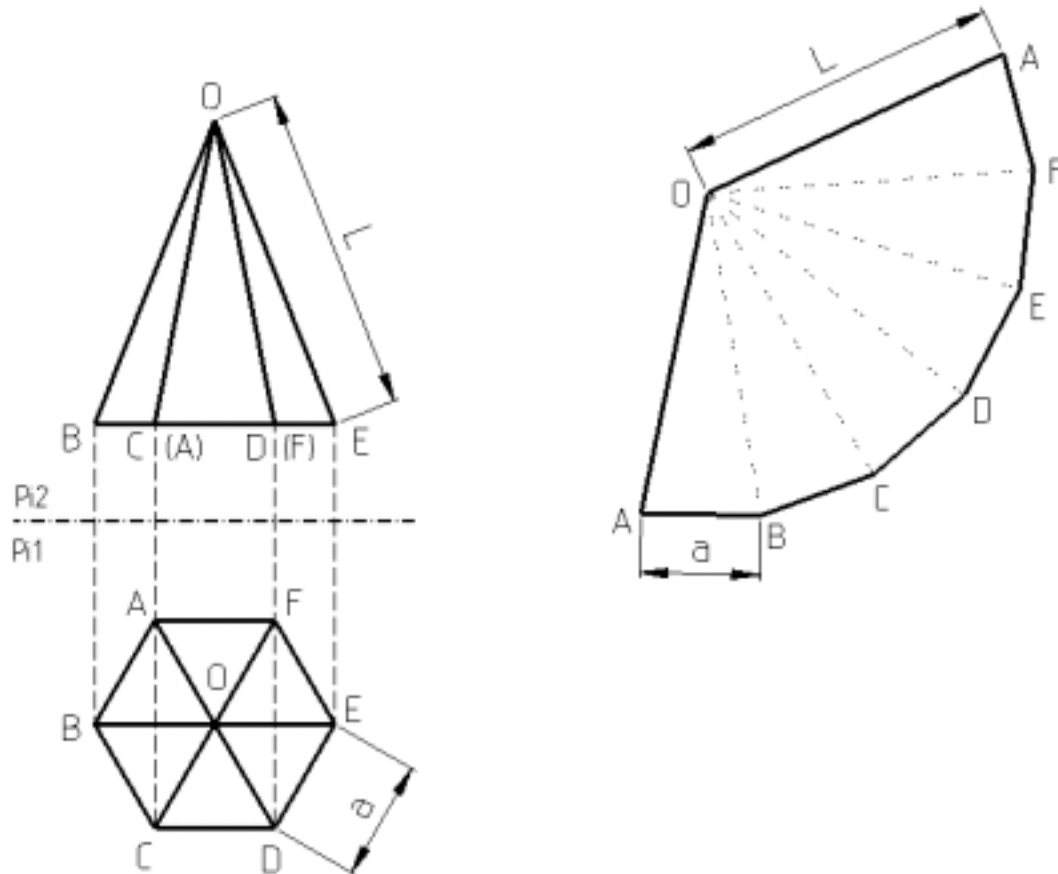
(pic-K19)

חלק ד' - פרישה, חיתוך ומציאת ג.א. של מישור חתך בפירמידה

אם הגליל היה כמו מנסרה רק עם מספר אינסופי של פאות, הרי שהפירמידה היא כמו חרוט רק עם מספר סופי של פאות.

הפרישה של הפירמידה תתבצע בדומה לחרוט אלא שעכשיו, נצייר גיזרה, נקצה עליה נקודות (כמו עם החרוט), נחבר את הנקודות בקווים ישרים ונמחק את הקשת. את הנקודות נחבר לאחר מכן גם לקודקוד בקווי קיפול ישרים. ראה איור בעמוד הבא:

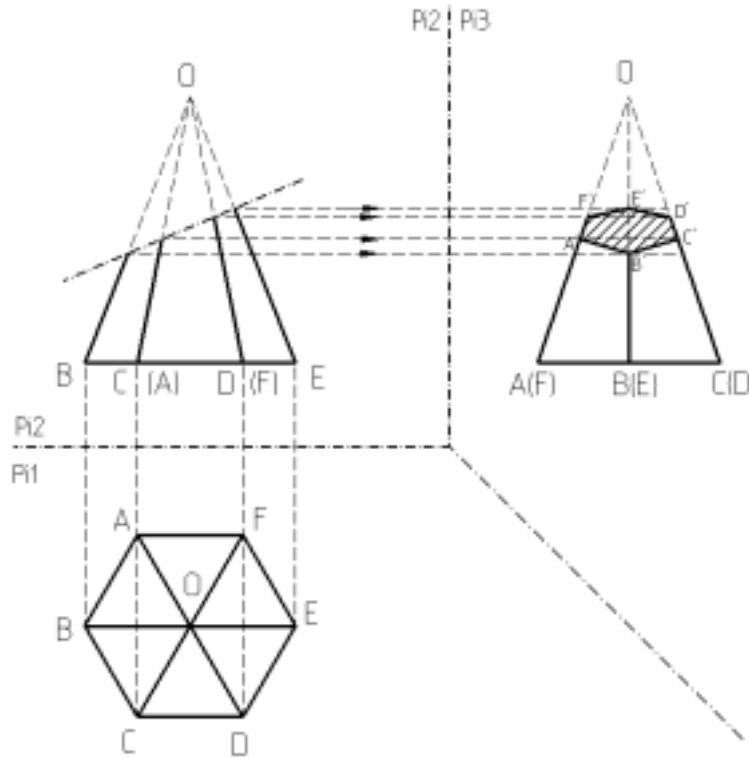




(pic-K20)

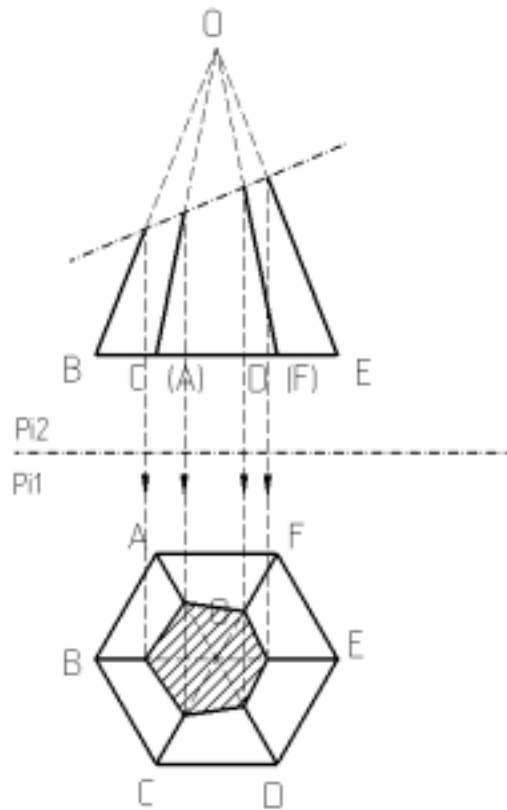
כעת נחתוך את הפירמידה. שלבי העבודה יהיו בדיוק כמו בחרוט אלא שעכשיו אין צורך להעביר קווי עזר (חלוקה ל-12 זכנ הלאה) שכן הקווים הם קווי הקיפול של הפירמידה.

את ההיטל השלישי נשלים גם כן, כמו בחרוט, אבל במקרה הזה כל הקווים כבר משורטטים כי אנו רואים הלכה למעשה את קווי החיבור בין הפאות שהולכים לקודקוד. יש רק לסמן את נקודות המפגש עם קו החתך ולהעביר אותן באופן אופקי למישור  $\pi_3$ . שוב, חשוב לזכור שאת הנקודות בהיטל השלישי יש לחבר בקווים ישרים ולא ליצור קו עקלתוני כלשהו. ראה איור בעמוד הבא:



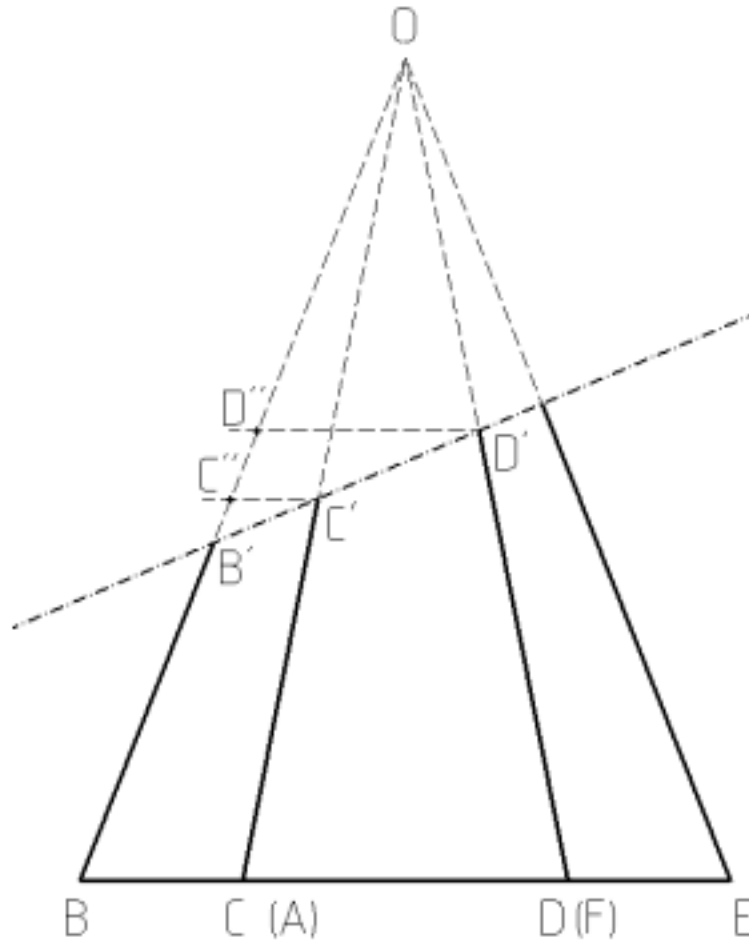
(pic-K21)

כנ"ל נמצא גם את שטח החתך במישור  $\pi_1$ . צריך רק להעביר קווי עזר באופן אנכי ולסמן את נקודות המפגש עם מקצועות הפירמידה.



(pic-K22)

במידה ואנו מטפלים בפירמידה משוכללת, הרי שהיא כמעט כמו חרוט. מכאן, שאם אנו רוצים למצוא את האורך האמיתי של המקצועות החתוכים, עלינו לסובב את הפירמידה ולמדוד את המרחק לאורך קו המתאר. כפי שעשינו בחרוט, כך גם בפירמידה, נעביר קו אופקי מנקודות החתך של המקצועות עם קו החתך עד לקו המתאר ונמדוד עליו את האורך האמיתי.



(pic-K23)

ההסבר לכך הוא, שבעצם, אנו יוצרים חרוט מדומה שקו היוצר שלו הוא הקו ב-2 $\pi$  שאת אורכו אנו רוצים לגלות. כמו שלמדנו כשטיפלנו בחרוטים, אפשר לסובב את החרוט. אנו עושים זאת ומקבלים את האורך האמיתי של הקו הרצוי. הדבר דומה לחלוקה ל-12 שעשינו עם החרוט אלא שכאן החרוט למעשה כבר מחולק (במקרה זה ל-6).



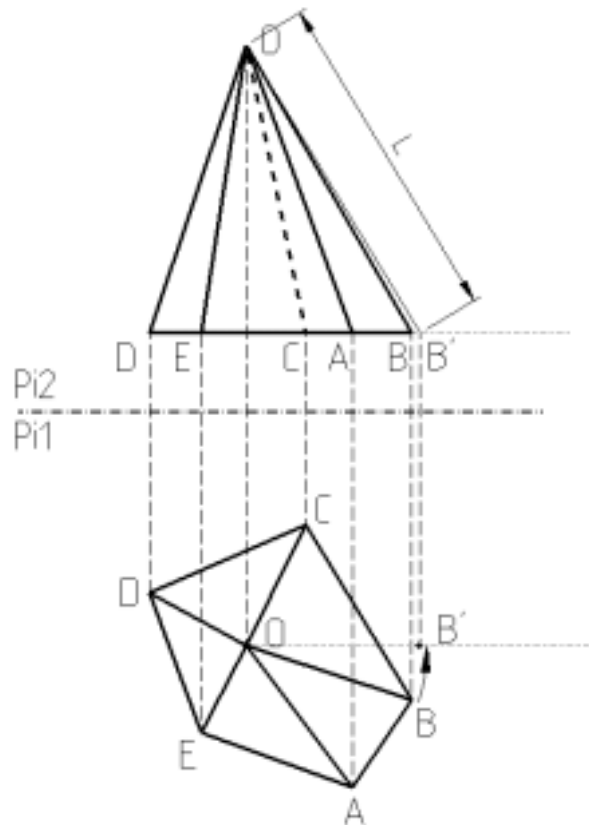
## חלק ה' – פרישת פירמידה לא משוכללת

עד עתה טיפלנו בפירמידות בעלות בסיס שהוא מצולע משוכלל, כאשר קודקוד הפירמידה נמצא בדיוק מעלה מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה. במקרים אלו, מדדנו את אורך אחת מצלעות הבסיס וכפולתה במספר הצלעות נתנה את אורך הגיזרה. אחד הקווים מבסיס הפירמידה לקודקודה נתן לנו את הרדיוס.

כעת נלמד כיצד יש לטפל במקרים בהם קודקוד הפירמידה אינו מעל מרכז המעגל החוסם.

דבר ראשון שעלינו ללמוד הוא שיטת הטריאנגולציה: שיטת הטריאנגולציה תאפשר לנו לגלות את אורכם האמיתי של מקצועות הפירמידה. נעבוד בצורה הבאה:

1. סימון קודקוד הפירמידה ב-O ונקודות הבסיס באותיות אלף-בית אנגלי מ-A והלאה.
2. נניח שברצוננו למדוד את אורכו של הקו O-B. נשרטט קו אופקי חלש היוצא מ-O (קודקוד הפירמידה).
3. נציב את חוד המחוגה בנקודה O (קודקוד הפירמידה) ונפתח את המחוגה עד נקודה B.
4. נסובב את המחוגה עד שנגיע לקו האופקי ונסמן את נקודת המפגש של השניים.
5. נעלה קו צמד אנכי עד שנגיע לבסיס הפירמידה (או לקו המשכו) ונסמן את נקודת החיתוך ב-B'.
6. מנקודה זו נעלה קו צמד לקודקוד הפירמידה ונמדוד את אורך הקו O-B'.

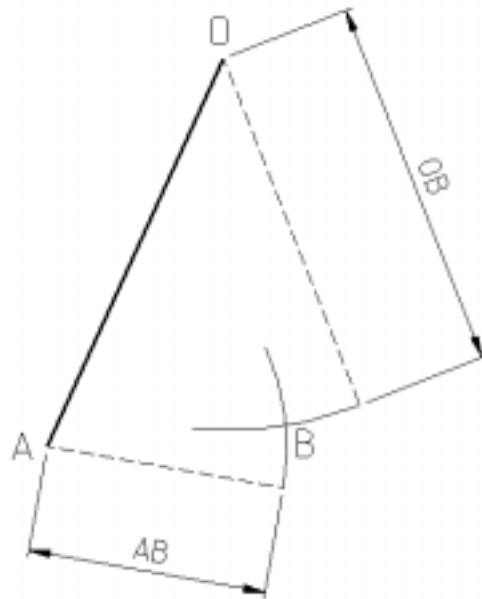


(pic-K24)

למעשה, ממש כמו בפירמידה המשוכללת, יצרנו חרוט חדש שהקו היוצר שלו הוא  $O-B'$  ומדדנו את קו המתאר שלו.

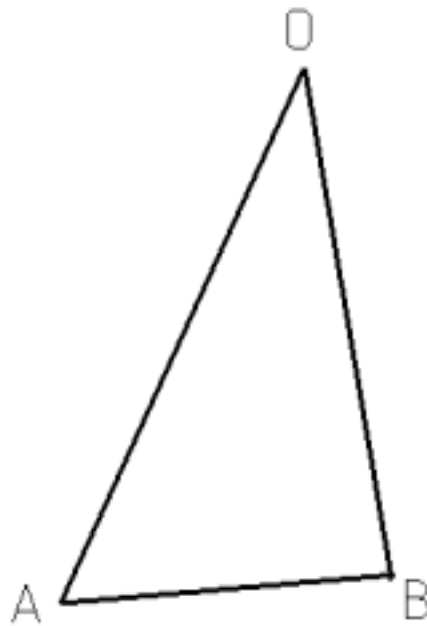
על מנת לפרוש את הפירמידה נעבוד על פי הכללים הבאים:

1. נמדוד אורך של אחד הקווים היוצרים ונצייר קו באורך זה על הנייר (נניח קו  $OA$ ).
2. כעת, נמדוד את אורכו של קו יוצר מאחד מצדדיו של הקו היוצר שמדדנו (קו  $OB$ ).
3. נפתח את המחוגה למפתח השווה לאורך הנ"ל, נציב את חוד המחוגה בקצה הקו שציירנו כבר (קצה  $O$ ) ונצייר גיזרה קטנה.
4. כעת, נמדוד את הצלע בבסיס הפירמידה המחברת בין שני הקווים היוצרים  $(AB)$ .
5. נשנה את מפתח המחוגה לזה האחרון, נציב את חוד המחוגה בקצהו של הקו המקורי  $(A)$  ונקצה שוב גיזרה קטנה עד שנקבל נקודת חיתוך  $(B)$  בין שתי הגזרות.
6. עתה, נחבר את קצה  $O$  עם נקודת החיתוך  $B$  וכמו כן את  $A$  עם  $B$ .



(pic-K25)

נקבל למעשה משולש שבו קו OA מייצג את הקו היוצר הראשון שמדדנו, קו OB מייצג את אורך הקו היוצר השני שמדדנו ואילו קו AB מייצג את אורך הצלע המחברת ביניהן. ראה איור בעמוד הבא:



(pic-K26)

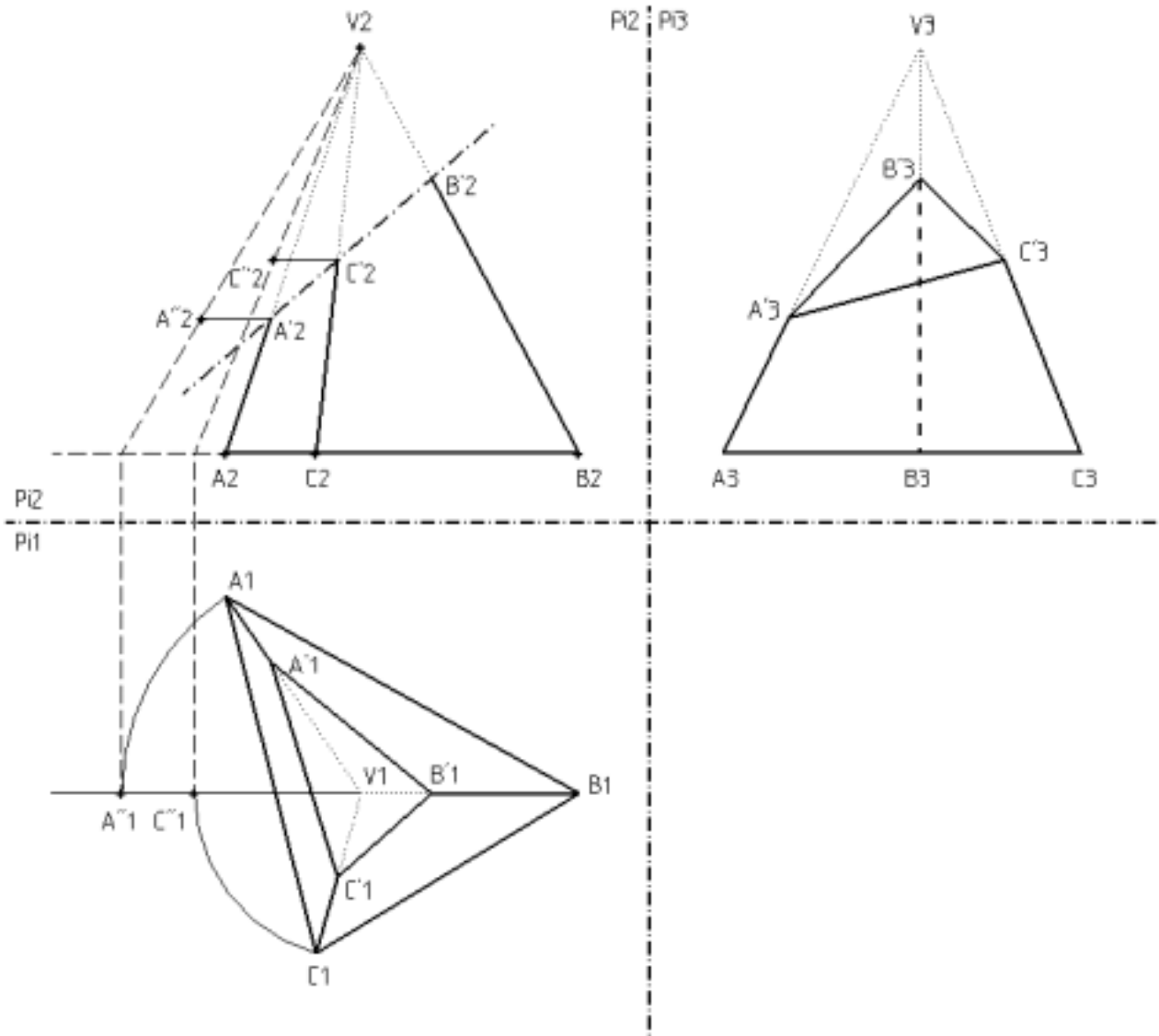


באופן זה יש להשלים את שאר הפירמידה אך יש לזכור: צריך לעבוד באופן שיטתי.  
כלומר, השלב הבא יהיה לבחור את הקו היוצר הסמוך לקו היוצר OB - קו OC  
וכן הלאה ולא לבחור את הקו היוצר OF.

\*\* במידה והבסיס של הפירמידה הוא מצולע משוכלל, אין צורך למדוד כל פעם את  
הצלע המחברת את הקווים היוצרים אלא להשאיר את המחוגה כל הזמן באותו  
מפתח (כי הצלעות שוות).

### פרישה של פירמידה לא משוכללת חתוכה:

השלב הבא יהיה פרישה של פירמידה חתוכה. על מנת לטפל בפירמידה חתוכה יש  
להתחיל עם מעטפת של פירמידה רגילה. על המעטפת יש למדוד עבור כל קו יוצר  
את אורכו האמיתי ולהקצותו על המעטפת במקום המתאים בדיוק כמו שעשינו עם  
פירמידות רגילות. ראה איור בעמוד הבא:



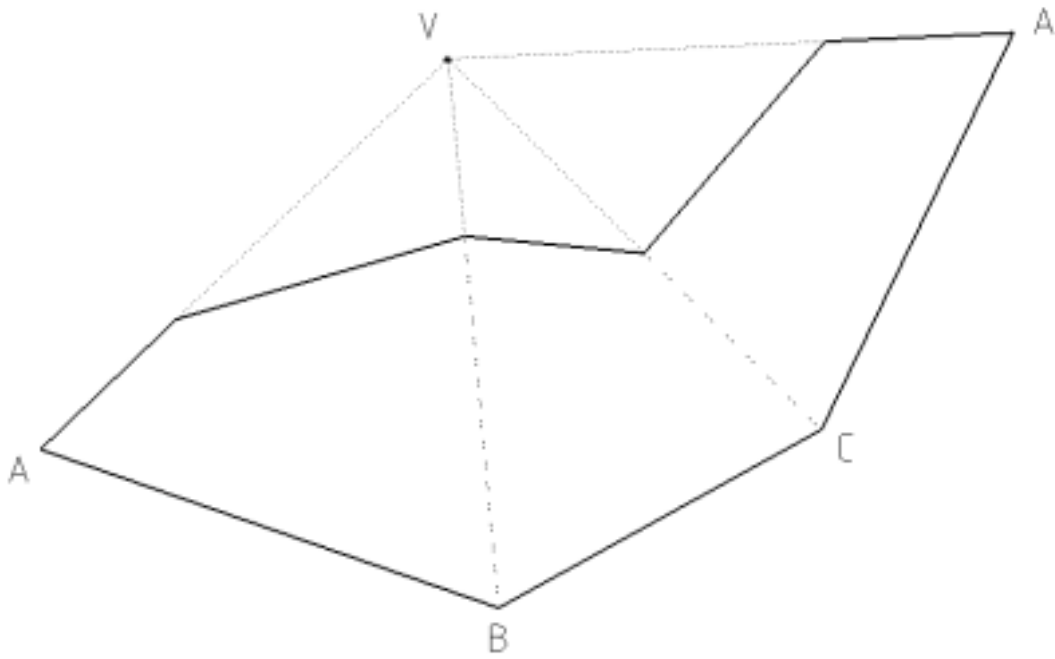
(pic-K27)

שימו לב שנקודות החיתוך של המקצועות סומנו ב- $A' B'$  וכן הלאה. הנקודות מהן מדדנו את האורך האמיתי של המקצועות החתוכים הן נקודות  $A'' B''$  וכו'. נקודות החיתוך חוברו לקודקוד המדומה של הפירמידה בקווי פאנטום.

כעת נותר לנו רק לפרוש את הפירמידה החתוכה. נעשה זאת על גבי הפרישה של הפירמידה המקורית. נפרוש את הפירמידה כפי שלמדנו קודם, נסמן את המקצועות בקווי קיפול ונקצה על כל מקצוע את האורך המתאים ( על פי מה שמדדנו ממישור

.)  $\pi 2$





(pic-K28)