מבוא למחשבים ספרתיים.

פתרון תרגיל מס' 1.

(1) צ"ל:

$$Q_q(A,B,\Pi) = \frac{P(A,B,\Pi)^{1-q}}{C(A,B)^q}$$

פתרון:

לפי ההגדרה:

$$Q_q(A,B,\Pi) = \frac{Q_{q,A}(\Pi)}{Q_{q,B}(\Pi)}$$

כמו כן:

$$Q_{q,A}(\Pi) = \frac{P_A(\Pi)^{1-q}}{C_A{}^q} \qquad Q_{q,B}(\Pi) = \frac{P_B(\Pi)^{1-q}}{C_B{}^q}$$

$$\Longrightarrow Q_q(A,B,\Pi) = \underbrace{\frac{P_A(\Pi)^{1-q}}{P_B(\Pi)^{1-q}}}_{=P(A,B,\Pi)^{1-q}} \cdot \underbrace{\frac{C_B{}^q}{C_A{}^q}}_{=\frac{1}{C(A,B)^q}} = \frac{P(A,B,\Pi)^{1-q}}{C(A,B)^q}$$

מ.ש.ל

(2) (a) צ"ל:

$$eq = \frac{\log P(A,B,\Pi)}{\log(P(A,B,\Pi)\cdot C(A,B))}$$

פתרון: eq מוגדר כך ש:

$$Q_{eq}(A,B,\Pi) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A,B,\Pi)^{1-eq}}{C(A,B)^{eq}} = 1 \Rightarrow P(A,B,\Pi) = [P(A,B,\Pi)\cdot C(A,B)]^{eq}$$

$$\Rightarrow eq\log[P(A,B,\Pi)C(A,B)] = \log P(A,B,\Pi) \Rightarrow eq = \frac{\log P(A,B,\Pi)}{\log[P(A,B,\Pi)C(A,B)]}$$

(b) אם $q<eq$:

$$\Rightarrow q < \frac{\lg P(A,B,\Pi)}{\lg[P(A,B,\Pi)C(A,B)]}$$

$$\Rightarrow q\lg[P(A,B,\Pi)C(A,B)] < \lg P(A,B,\Pi) \Rightarrow \lg P(A,B,\Pi)^q C(A,B)^q < \lg P(A,B,\Pi)$$

$$P(A,B,\Pi)^q C(A,B)^q < P(A,B,\Pi) \Rightarrow \frac{P(A,B,\Pi)}{P(A,B,\Pi)^q C(A,B)^q} > 1 \Rightarrow Q_q(A,B,\Pi) > 1$$

$$\Rightarrow Q_{q,A}(\Pi) > Q_{q,B}(\Pi)$$

(c) כמו (b)

(3) נתון מעגל ^{צרופי} המורכב מ n שערים שמסודרים לפי ^{תנאי} : $G_1, G_2, \dots, G_n$. נראה

בדרך השלילה, כי קיים מסלול מעגלי, המורכב מ p שערים

$G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_p}$ כך ש $G_{i_{j+1}}$ ניזון מ G_{i_j} וכמו כן

$G_{i_1} = G_{i_p}$, לא יתכן שנקבל מעגל צרופי. לפי תנאי 3, קיים סדר קווי,

הסדר הקווי מחייב ש: $i_j < i_{j+1}$: $\forall j$

לפיכך: $i_0 < i_1 < \dots < i_p$. כיוון שנתון כי $i_1 = i_p$

קיבלנו סתירה.

(4) נתון כקלט מעגל, כלומר, נניח כי נתונים הפרטים הבאים:

* רשימת שערים $G_1, \dots, G_n$
* לכל שער: רשימת כניסות $list_{IN}(G_i) = \{in_0^i, \dots, in_j^i\}$

רשימת יציאות $list_{OUT}(G_i) = \{out_k^i\}, \dots, \cancel{out_k^i}\}$

* רשימת רשתות: קבוצת כניסות והיציאות של הרשת, עבור כל רשת.

כיצד נבדוק שהמעגל צרופי? לפי שלושת התנאים שהוגדרו.

(1) כל כניסה ויציאה שייכת לרשת בודדת.

נחזיק מונה עבור כל הכניסות והיציאות במעגל, ונאתחלו ל-0.
נעבור על רשימת הרשתות. בכל פעם שנראה כניסה או יציאה
נעדכן את המונה שלה ל-1. אם לפני העדכון המונה כבר
1 סימן שהכניסה או היציאה כבר שייכת לרשת אחרת ולכן
המעגל אינו מקיים את התנאי.

(2) כל רשת ניזונה מיציאה אחת ויחידה ומזינה לפחות כניסה אחת.

נסרוק את הרשימה של כל רשת ונוודא שיש בה לפחות
כניסה אחת ובדיוק יציאה אחת.

(3) כן, יש למצוא את הסדר כך שיקיים את התנאי הנדרש.

שיטה "ברוטלית" $O(n^2)$

בהינתן רישא $G_1,\dots,G_i$, נחפש שער מבין השערים הנותרים שכל כניסותיו מוזנות ע"י הרישא. אם יש, נגדיר אותו כ G_{i+1}
אם אין, נגיד שהמעגל אינו צרופי.

נוכיח שאם אנו טוענים שהוא לא צרופי אזי הוא אכן לא צרופי:
כיוון שלא קיים שער שכל כניסותיו מהרישא, אזי לכל שער בסיפא יש כניסה שמוזנת ע"י שער בסיפא. אם כך, נבחר שער כלשהו מהסיפא ונתחיל לנוע ממנו לשער שמזין אותו, גם כן זה השער הזה מוזן ע"י שער מהסיפא, וכן הלאה כך שבהכרח נגיע במעגל, ולכן זה לא יכול להיות מעגל צרופי.

שיטה קצת יותר חכמה $O(n)$

נחזיק לכל שער תא במערך שאומר כמה כניסות "נותרו", כלומר לא מחוברות לרישא. (נסמן ע"י $d_{in}(G) =$ מס' הכניסות בשער)
בכל שלב נבדוק האם יש שער שלו $d_{in}(G)=0$.
אם יש: * נצרף אותו לרישא.
* נעדכן את כל $d_{in}(G')$ שיוצאים מ G. (ע"י חיסור)
אם לא ניתן למצוא שער כזה אזי בהתאם למה שהראינו בשיטה הקודמת המעגל לא צרופי.

הסיבוכיות:
* סה"כ עלות העדכון: יחסי לסכום דרגות היציאה $O(n)$ - (מס' כניסות ויציאות לכל שער חסום ע"י קבוע)
* חיפוש שער שדרגתו אפס. $(d_{in}(G)=0)$, n פעמים
כלומר $O(n^2)$.

איך נגרום לסיבוכיות כזו $O(n)$?

נרצה שחיפוש השער שדרגתו אפס תהיה בסיבוכיות קבועה.
נעשה זאת ע"י תור (FIFO), כך שבעת העדכון אני מיד מכניס לתור את מי שדרגתו אפס, ואז חיפוש השער שדרגתו אפס מתבטא בשליפת איבר מראש התור, כלומר, סיבוכיות קבועה.
וכיוון שמבצעים זאת n פעמים קיבלנו $O(n)$.
אם התור ריק בעוד שהסיפון אינה ריקה אזי המעגל אינו לגלי.

(5) משאלה 4 קיבלנו את הסדר בו מסודרים השערים במעגל לפיכך, בהינתן סדר n השערים במעגל ההשהייה תתקבל ע"י האלגוריתם:

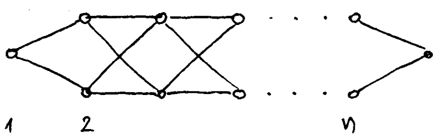
for $i := 1$ to n

$$T(G_i) = \max\{T(G_j) \mid G_j \text{ מגיע קודם ל } G_i\} + D(G_i)$$

Return $\{\max\{T(G_i)\}_{i=1}^{n}\}$

כלומר, $T(G_i)$ - ההשהיה עד לשער G_i (כולל)
$D(G_i)$ השהיית השער G_i עצמו.

למרות נראה מאוד אינטואיטיבי, יש להוכיח מדוע זה נכון, שהרי לא בדקנו את כל המסלולים. לדוגמא, עבור רשת כזאת



מכל נק' יש 2 מסלולים שיוצאים לכן מס' המסלולים הוא לפי 2^n אלגוריתם שצריך לעבור על כל המסלולים הוא על כן בלתי אפשרי, ומכאן חשיבותו של האלגוריתם שמצאנו, משום שהוא מוצא את המסלול הארוך ביותר מבלי לבדוק את כל האפשרויות.

כיצד גם כן נוכיח? נראה זאת בשני שלבים:

(1) נראה כי $\text{פלט האלגוריתם} \le \max_p D(p)$.

אם קיים מסלול, שהשהייתו שווה לפלט האלגוריתם, אזי בטוח שהוא מקיים כי השהייתו קטנה שווה להשהיה המקסימלית. כיצד נדע שאכן קיים מסלול כזה? נוסיף באלגוריתם שורה שזוכרת לכל שער G_i את השער G_j כך ש $T(G_i)=T(G_j)+D(G_i)$, וכך נוכל לשחזר את מסלולי הקדמונים.

(2) נראה כי $\text{פלט האלגוריתם} \ge \max_p D(p)$.

נניח כי נתון לנו המסלול האיטי ביותר במעגל. נסמנו $G_{i_0},\dots,G_{i_p}$. ההשהייה המצטברת עד לשער G_{i_j} במסלול זה נתונה ע"י $d(G_{i_j})$. נראה כעת באינדוקציה כי מתקיים $T(G_{i_j}) \ge d(G_{i_j})$:

עבור השער הראשון $d(G_{i_0}) = D(G_{i_0})$

$$T(G_{i_0}) = D(G_{i_0}) + \max\{\dots\} \ge d(G_{i_0})$$

כעת, - נניח נכונות עבור $T(G_{i_j}) \ge d(G_{i_j})$

וע"י צעד נראה עבור $j+1$:

$$d(G_{i_{j+1}}) = d(G_{i_j}) + D(G_{i_j}) \le T(G_{i_j}) + D(G_{i_j})$$

$$T(G_{i_{j+1}}) = \underbrace{\max\left\{T(G_j) \,\middle|\, \text{מזין את } G_{i_{j+1}} \; G_j\right\}}_{\text{אחד מהם הוא } G_{i_j} \text{ ולכן זה } \ge T(G_{i_j})} + D(G_{i_{j+1}}) \ge T(G_{i_j}) + D(G_{i_j})$$

מכאן שעבור השער האחרון במסלול האיטי ביותר $T(G_{i_p}) \ge d(G_{i_p})$

$\Leftarrow$ $\text{פלט האלג'} \ge \max_p D(P)$

מ (1), (2) נובע $\text{פלט האלג'} = \max_p D(P)$