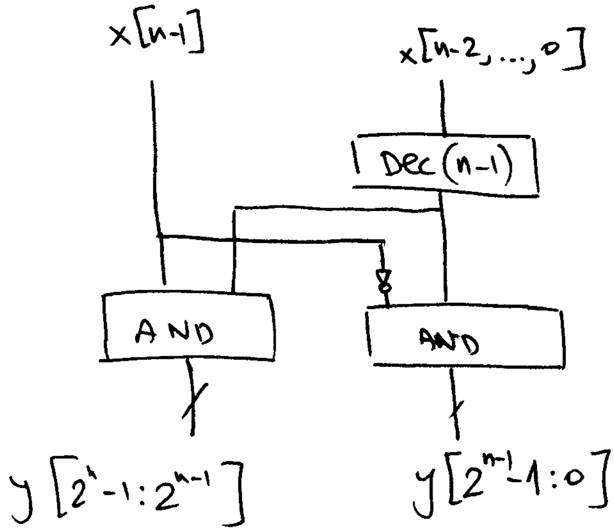
פתרון תרגיל מס' 2.

(שאלה 1)

התכנון שהוצג בכתה:



הסבר: אם $x[n-1]=0$ אזי הביטים שנוצאו הם בדיוק מוצאו ה $Dec(n-1)$, אם $x[n-1]=1$ נוסף מס' 2^{n-1}

וזאת כיוון שבבסיס בינארי הכוונה שאלה היא הוספר אחד מציינים על מוצאו ה $Dec(n-1)$ ב 2^{n-1} ביטים שמאלה.

$$cost\{Dec(1)\}=1$$

$$Cost\{Dec(n)\}= cost\{Dec(n-1)\}+2^n \cdot cost\{AND\} + cost\{inv\}$$

עבור קבלת פתרון מקורב נניח מהפכים בחינם ו $cost\{AND\}=1$

$$c(n) = 2^n + c(n-1) \Longrightarrow c(n) = \theta(2^n)$$

$$T(n) = \theta(n)$$ ניתן לראות שההשהייה לינארית

+ נציג את ה .Dec הבא:

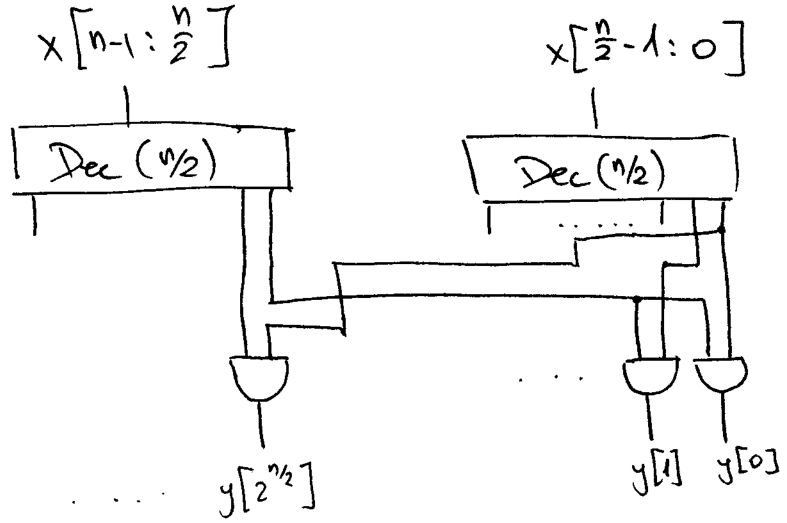
נממש את מוצאי ה Dec עבור כל מוצא ע"י AND עם n כניסות.

שער AND בעל n כניסות נממש ע"י עץ בינרי של שערי AND עם שתי כניסות. לעץ בינרי מלא עם n עלים יש n-1 צמתים פנימיים. נניח שוב שמחירים ! $c(AND)=1$: עלינו לממש 2^n ~~עצים לוגיים~~ מוצאים ע"י עץ בינרי לכן: $c(n)=\Omega(n\cdot 2^n)$

כיוון שעומק של בינרי מלא עם n עלים הוא $\lg n$

$$T(n)=\Theta(\lg n)$$

* עבור Dec. שמס' כניסותיהם הוא $n=2^m$ ניתן להציג את ה .Dec הבא:



תחת ההנחה המקלה לגבי המחיר $c(n)=2c(\frac{n}{2})+2^n$

החלק הדומיננטי כאן הוא ה 2^n $\Leftarrow$ $c(n)=O(2^n)$

$$T(n)=1+T(\tfrac{n}{2}) \Rightarrow T(n)=\lg n$$

ומכאן שצורה זו היא הטובה ביותר מבין השתיים.

(2) עלינו מעגל מוצא של עץ עם fanout שלו הוא 2

ל 2^k כניסות באמצעות 2-buffers בעלי fanout=2

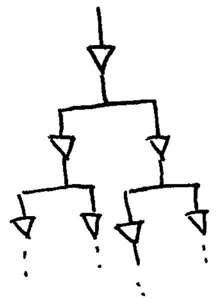
cost=1 ו delay=1 .

קל לראות שמקבל עץ בינארי. עץ בינארי עם 2^k

עלים יש 2^k-1 צמתים פנימיים בלי תלות בצורת העץ

כלומר, $c(2^k)=(2^k-1)\,cost\{2\text{-buf}\}$ $\Leftarrow$ $C(\ )=2^k-1$

ההשהיה המינימלית מתקבלת ע"י עץ מלא ומאוזן :



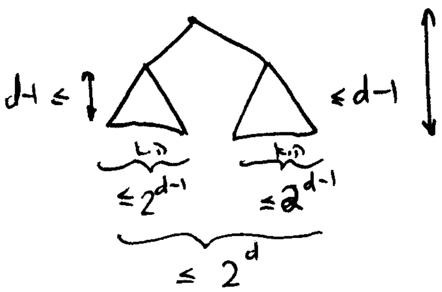
ההוכחה : ע"י הטענה הבאה :

טענה : עץ בעומק d מכיל לכל היותר 2^d עלים

הוכחת הטענה באינדוקציה :

עבור $d=0$. $d=1$ Λ

נניח ל $d-1$ ונראה ע"י צעד ל d :



לכן עבור

צריך לפחות עומק של k המתקבל

ע"י עץ מלא ומאוזן ומכאן

$D(\ )=K$

(שאלה 3)

נתח מחיר כל אחד מהמקרים :

א) עבור ה Decoder שהוצע בכתה :

ההגבלה החדשה משפיעה על $x[n-1]$ שצריך להתפצל ל 2^n יציאות ולכן

$$cost'\{Dec_1(n)\} = cost\{Dec_1(n)\} + cost\{2^n\text{-}buf\}$$

$$= cost\{Dec_1(n)\} + (2^n - 2)\cdot cost\{2\text{-}buf\}$$

$$\Rightarrow cost'\{Dec_1(n)\} = \Theta(2^n)$$

ההשהיה:

$$T'(n) = \max\{T'(n-1), T(2^n\text{-}buf) + D(not)\} + D(AND)$$

$$\Rightarrow T'(n) = O(n)$$

ב) עבור ה Decoder עם מימוש לכל ביט בנפרד:

צריך לפצל כל כניסה ל 2^n יציאות שיכנסו ל n-AND.

לכן

$$cost'\{Dec_2(n)\} = cost\{Dec_2(n)\} + n\cdot cost\{2^n\text{-}buf\}$$

$$\Rightarrow cost'\{Dec_2(n)\} = \Omega(n\cdot 2^n)$$

ההשהיה:

$$T\{Dec_2(n)\} = T\{n\text{-}AND\ Tree\} + T\{2^n\text{-}buf\}$$

$$\geq \lg n + n$$

עבור ה Decoder השלישי שהצענו

צריך לספור כל מופע של $Dec(\frac{n}{2})$ ו $2^{n/2}$ יציאות ,

ע״י $\frac{n}{2}$-buf . אבל שיעור המחיר

$$cost'\{Dec_3(n)\} = 2\,cost'\{Dec_3(n/2)\} + 2^n cost\{AND\} + 2\cdot 2^{n/2} cost\{2^{n/2}\text{-buf}\}$$

$$= 2c'(\tfrac{n}{2}) + 2^n\cdot c(AND) + \underbrace{2^{\frac{n}{2}+1}}_{2^{n/2}}\cdot\underbrace{(2^{n/2}-1)}_{2^{n/2}}\cdot cost\{2\text{-buf}\}$$

$$\approx 2c'(\tfrac{n}{2}) + 2^n\left[c(AND) + c(2\text{-buf})\right]$$

החלק הדומיננטי :

$$\Rightarrow cost'\{Dec_3(n)\} = O(2^n)$$

ההשהיה :

$$T'(n) = T'(\tfrac{n}{2}) + T(2^{n/2}\text{-buf}) + D(AND)$$

$$= T'(\tfrac{n}{2}) + \tfrac{n}{2} + 1$$

$$\Rightarrow T'(n) = \tfrac{n}{2} + \lg n = \Omega(n) \qquad \square$$

כלומר עלות היא כבר לא מהיר כמו שחשבנו בתחילה

אלא ליניארי .

(שאלה 5) המעגל המקיים דרישה זו הינו NOR .

$$C = cost\{^{n-OR}_{tree}\} + cost\{Not\} = n$$

$$T = \lg n + 1$$