אריתמטיקה של מחשבים

1. מבנה הציון בקורס

הציון בקורס יתבסס על המרכיבים הבאים:

1. תרגילי בית
2. סיכום מודפס של אחת ההרצאות
3. מבחן מסכם

חומר לתרגילי הבית ניתן למצוא באתר הבא:

http://www.eng.tau.ac.il/~guy/computerarithmetic/arithmetic.html

החל מיום א' 8.3.98 ניתן יהיה למצוא את תרגיל הבית הראשון באתר. הגשת התרגילים תהיה כשבועיים מיום הופעתם באתר.

2. חומר הלימוד

1. Omondi Computer Arithmetic Systems
2. Israel Koren Computer Arithmetic Algorithms

חומר הלימוד לא יילקח ישירות מספרים אלה

3. מסכמים

בפרק זה נדון במסכמים של מספרים בייצוג שלם.

מטרת פרק זה היא לבנות מחבר בעל התכונות הבאות:

1. זמן חיבור לוגריתמי
2. מחיר ליניארי

3.1 מהו חיבור?

<u>אפיון קלט:</u>

שני וקטורים a,b בני n סיביות:

$$a = a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$$
$$b = b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$$

<u>אפיון פלט:</u>

וקטור תוצאה s בעל n+1 סיביות:

$$s = s_n, s_{n-1}, \ldots, s_0$$

<> -סימון למספר המיוצג באופן בינארי

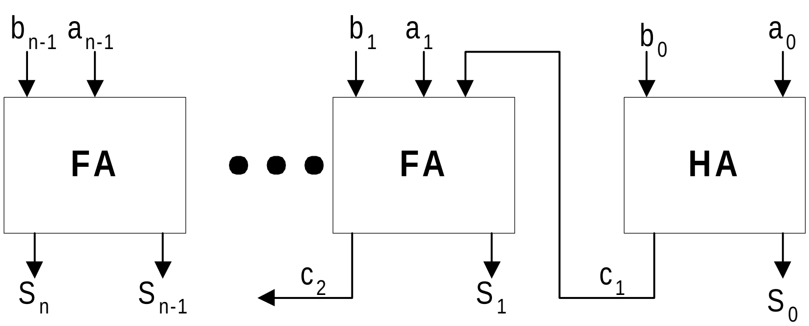
$\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle s\rangle$

כאשר:

$$\langle a\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i$$

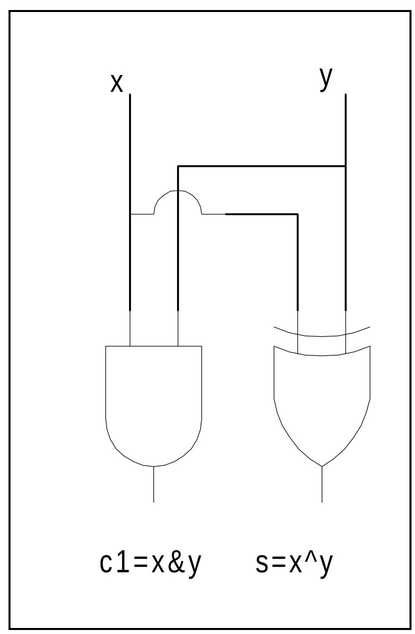
3.1.1 תרגיל

RCA(Ripple Carry Adder)

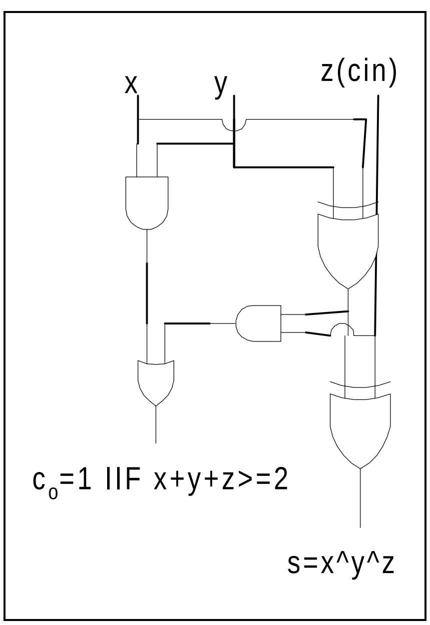


מבנה מסכם בינארי.3.1.1.1

3.2 מבנה HA(Half Adder)



מבנה FA(Full Adder)



- מסלול הנשא הוא מסלול העובר דרך שני שערים בעוד מסלול הסכום עובר דרך שלושה שערים.

4. הגדרות:

4.1 *T אורך המסלול הארוך ביותר בין קלט לפלט*

4.2 *C עלות יחידה מספר השערים הכולל*

קימות כמה הנחות מובלעות :
1. השהית כל השערים זהה
2. גודל כל שער זהה
3. כל השערים בעלי 2 כניסות ויציאה.

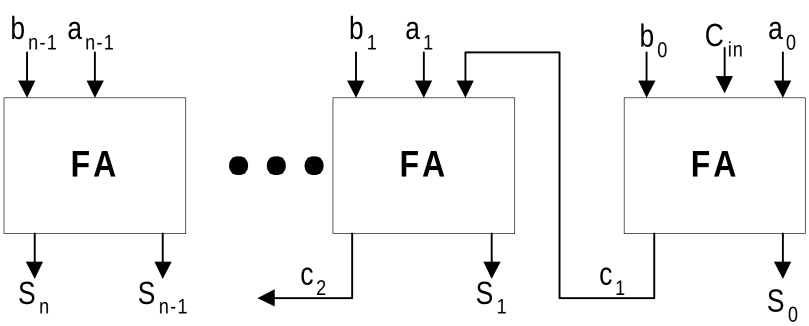
	Full Adder	Half Adder
T	**3**	**1**
C	**5**	**2**

4.3 *כעת מחשב את העלות הכוללת עבור מחבר של **n** ביטים.*

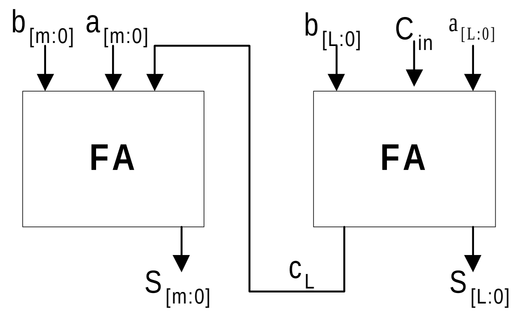
C(RCA)=2+5(n-1)
T(RCA)=1+2(n-1)

5. הוכחה:

ננסה כעת להוכיח שפלטי המעגל עומדים בדרישה של ביצוע סיכום מכוון שהמעגל אינו סימטרי נחליף את הדרגה הראשונה ב FA.



נסמן ב RCA_n מסכם בעל n דרגות. נבנה מסכם זה משני תת מסכמים באופן הבא:



נסמן:

$a^L = a[L-1:0]$ $b^L = b[L-1:0]$

$a^m = a[m-1:0]$ $b^m = a[m-1:0]$

הנחת האינדוקציה:

$\langle a_L\rangle + \langle b_L\rangle + c_{in} = \langle s^L\rangle + 2^L c_L$ (1)

$\langle a_m\rangle + \langle b_m\rangle + c_L = \langle s^m\rangle + 2^m s_n$

צ"ל:

$\langle a\rangle + \langle b\rangle + c_{in} = \langle a_L\rangle + 2^L\langle a_m\rangle + \langle b_L\rangle + 2^L\langle b_m\rangle + c_{in}$

$c_{in} \langle a_L\rangle + \langle b_L\rangle + 2^L(\langle a_m\rangle + \langle b_m\rangle) =$ לפי 1

$\langle s_l\rangle + 2^L(\langle s_m\rangle + 2^m\langle s_{[n]}\rangle) = \langle s_{[0:n-1]}\rangle + 2^n s_{[n]} = \langle s\rangle$

6. סוגי מחברים שונים

מהו הזמן הקצר ביותר לחיבור שני מספרים באורך n סיביות?

האם ניתן להשיג זמן זה במחיר לינארי?

- בניתוח זה נניח שהשערים בעלי מספר קבוע של כניסות (2,3,4)

6.1.1. תרגיל:

חיבור מהיר

זמן החישוב מושפע מזמן פעפוע סיביות הנשא $c_{n-1},c_{n-2},\ldots,c_0$. לאחר חישוב כל מסלול הנשא ניתן לחשב את הסכום תוך מעבר בשני שערים בלבד מפני ש: $s_i=Xor(a_i,b_i,c_i)$

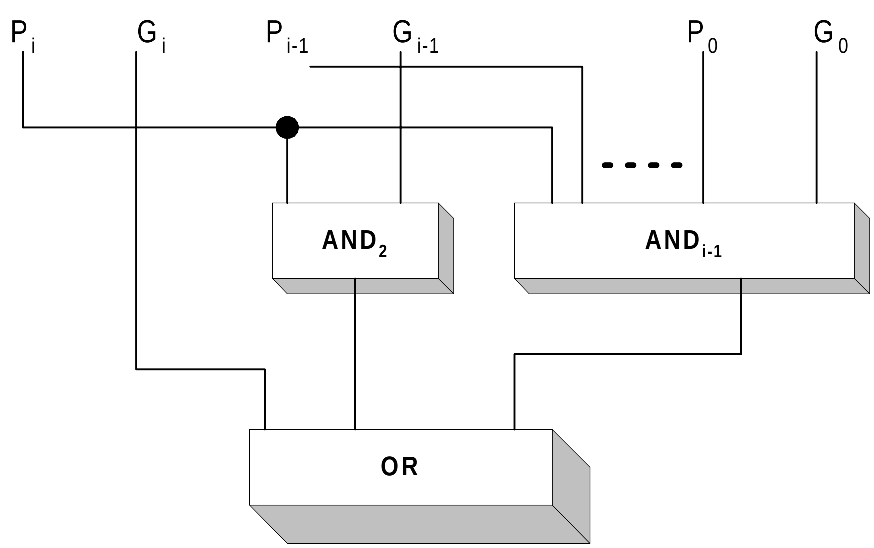
נתבונן בחישוב הנשא:

$$c_1 = \{a_0 + b_0 + c_0 \geq 2\}$$

$$c_{i+1} = \{a_i + b_i + c_i \geq 2\} \Leftrightarrow \{a_i + b_i = 2\} \| \{a_i + b_i = 1 \cup c_i = 1\}$$

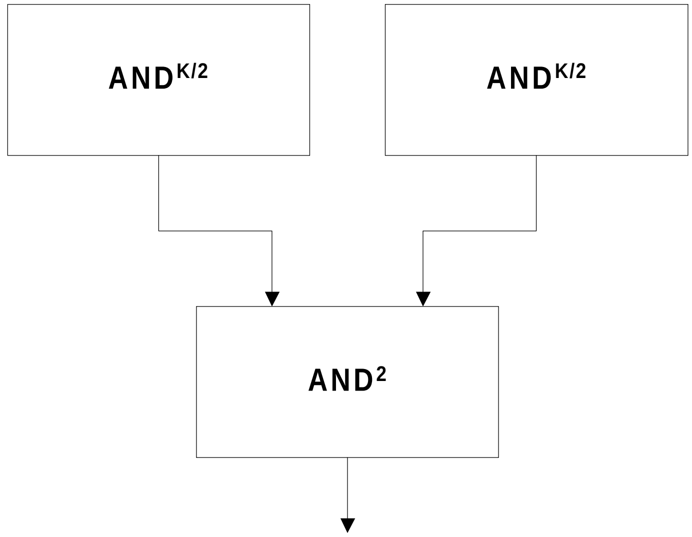
נסמן: $G_i = a_i \& b_i$ ו $P_i = a_i \mathrm{Xor} b_i$

$$c_{i+1} = G_i + P_i G_{i-1} + P_i P_{i-1} G_{i-2} + P_i P_{i-1} G_{i-2} + P_i P_{i-1} P_{I-2} G_{i-3} + \ldots$$



7. מימוש שער בעל **K** כניסות

כדי לממש שער בעל k כניסות מחבר שערים יותר קטנים בצורת עץ באופן הבא:



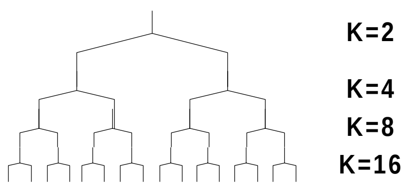
- ניתן לממש פעולת AND באופן זה מפני שפעולת AND היא אסוציטיבית.

נחשב כעת את עלות שער AND^K ואת מהירות פעולתו:

$T(AND^K)= T(AND^{K/2})+ T(AND^2)= T(AND^{K/2})+1\approx\log_2(K)$

$C(AND^K)= 2C(AND^{K/2})+ C(AND^2)= K-1$

- פונקצית המחיר מתנהגת כמו מספר הצמתים של עץ בינארי בעל K עלים ו-K-1 צמתים:



7.1. סימונים מוסכמים:

$f(n)=O(g(n))$ אם קיימים קבועים c_1,c_2 כך ש: $f(n)\le c_1 g(n)+c2$

$f(n)=\Omega(g(n))$ אם קיימים קבועים c_3,c_4 כך ש: $f(n)\ge c_1 g(n)+c2$

$f(n)=\Theta(g(n))$ אם $f(n)=O(g(n))$ וגם $f(n)=\Omega(g(n))$

- כאשר $c_1,c_3\neq 0$

8. חישוב זמן ועלות של מסלול C_i:

$T(C_{i+1})=T(AND_{i-1})+T(OR_i)=\log_2(i-1)+\log_2(i)=O(\log_2(i))$

$$C(C_{i-1})=C(OR_i)+\sum_{j=2}^{i-1}C(AND_j)=i-1+\sum_{j=2}^{i-1}(j-1)=\Omega(i^2)=\Theta(i^2)$$

9. מחיר כל המעגל:

$$\sum_{i=0}^{n-1}C(C_{i+1})=\sum_{i=0}^{n-1}\Theta(i^2)=\Theta(i^3)$$

9.1.1. דוגמא:

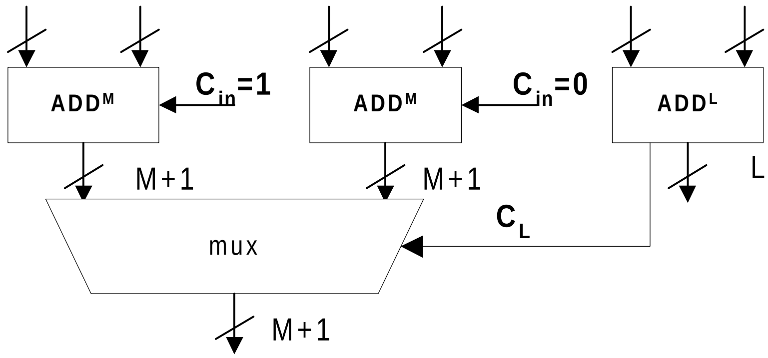
- מחיר מעגל זה הוא גבוה מאוד למשל עבור מסכם של 64bit $n^3=256K$

10. (CSA) Conditional Sub Adder

פתרון זה הוא פחות יקר מן הפתרון הקודם.

כוון שהראנו כבר קודם שניתן לבנות מסכם גדול של n bit מכמה מסכמים קטנים יותר $n=M+L$.

נציע את המעגל הבא:



10. 1. ניתוח זמן עלות של מסכם CSA

$$T(CSA_n)=\max\{T(CSA_M), T(CSA_L)\}+T(MUX_{M+1})$$
$$C(CSA_n)=2C(CSA_M)+C(CSA_L)+C(MUX_{M+1})$$

10. 1. 1. ניתוח זמן עלות של MUX

עלות MUX שלב ביט יחיד הוא שער אחד מכוון שיש M+1 ביטים:

$$C(MUX_{M+1})=M+1$$

זמן ההתפשטות ניתן להערכה בצורה נאיבית כשער יחיד. אולם באופן מעשי יותר האות C_L צריך לדחוף M+1 יחידות כדי שיוכל לעשות זאת יש לבנות עץ של דוחפים ואז זמן ההתפשטות יהיה פרופורציונלי ל $\log_2(M+1)$

$$T(MUX_{M+1}) = \begin{cases} 1, \\ \log_2(M+1) \end{cases}$$

$$T(CSA_n)=\max\{T(CSA_M), T(CSA_L)\}+T(MUX_{M+1})=$$

הערכה נאיבית: $\max\{T(CSA_M), T(CSA_L)\}+1=T(ADDER_{n/2})+1=\log_2(n)$

הערכה מעשית: $T(CSA_n)= T(ADDER_{n/2})+\log_2(n/2)\approx=(\log_2(n))^2$