

גיליון תרגילים 1

(תרגילים 1-5 הינם תרגילי חזרה על אלגברה ליניארית, אותם יש לפתור ללא עזרת מחשב.)

Reference: G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd Ed., Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1988

(1) תהא $\mathbf{A} = [A_{ij}]$ – מטריצה מרובעת מסדר $n \times n$ בעלת איבר אופייני A_{ij} . מהי \mathbf{A}^{-1} (מטריצה הפכית ל- \mathbf{A}), \mathbf{A}^T (מטריצה \mathbf{A} משוחלפת)?

(א) הגדר/י מטריצה סימטרית, אנטי סימטרית (skew symmetric).

(ב) הגדר/י מטריצה חיובית למחצה (positive semidefinite), שלילית, חיובית לחלוטין (positive definite), שלילית לחלוטין.

(2) נתונה מטריצה \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

חשבי את $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$.

(3)

(א) מהי מטריצה מסדר $m \times n$?

(ב) מהו הסדר של המטריצה \mathbf{K} ? האם היא סימטרית, חיובית לחלוטין?

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

(4) נתונה מטריצה \mathbf{B} :

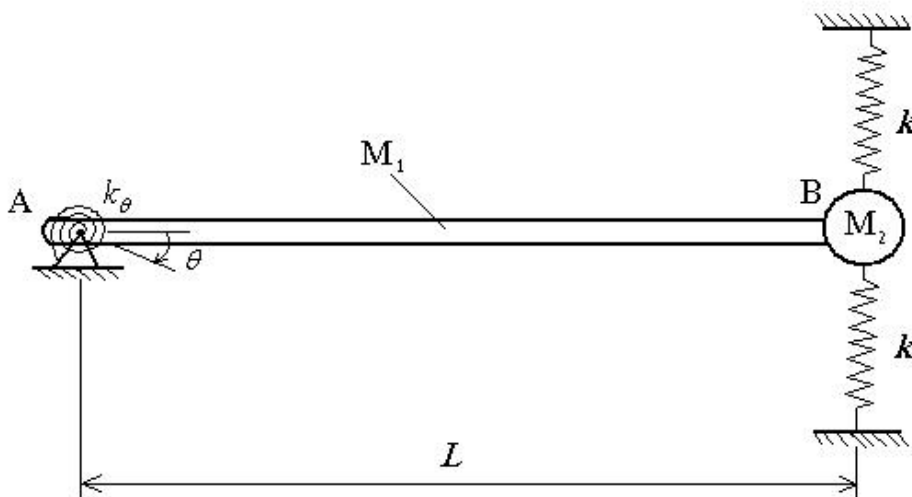
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

מצאי את הערכים העצמיים של \mathbf{B} . האם \mathbf{B} חיובית, שלילית, חיובית לחלוטין או שלילית לחלוטין? מהו מספר המצב (היחס בין הערך העצמי הגבוה ביותר לערך העצמי הנמוך ביותר)?

(5) בדוק/בדקי את החיוביות לחלוטין של מטריצה A:

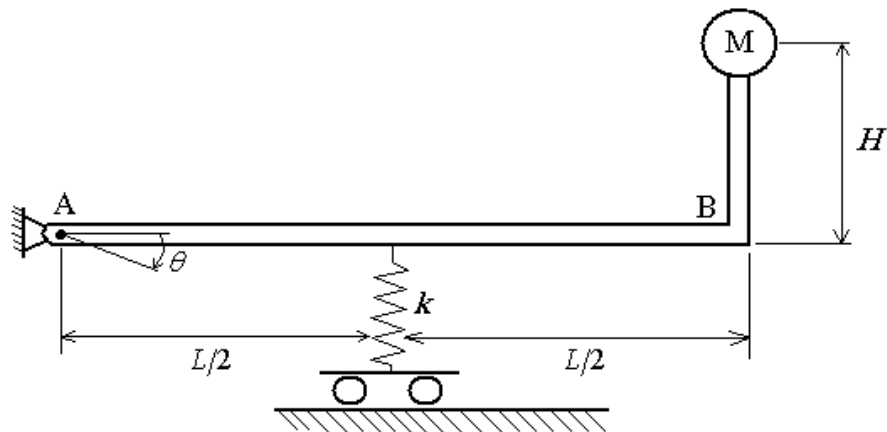
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 25 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

(6) מוט קשיח בעל מסה M_1 ואורך L מחובר על ידי פין בנקודה A ולמסה אחרת בנקודה B. בקצה A ישנו קפיץ ספירלי ובקצה B ישנם שני קפיצים ליניאריים.



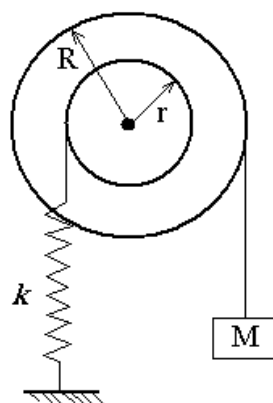
- (א) הנח כי המערכת נמצאת בחלל (ועל כן כוח הכבידה אינו משפיע). הנח כי θ קטנה ומצא את המשוואה עבור θ . מצא את התדר העצמי של המערכת.
- (ב) כעת התעלם מההנחה שבסעיף א' (כלומר, כוח הכבידה משפיע). מצא את הזווית שבה תהיה המערכת בשיווי משקל - θ_{st} (בהנחה שהיא קטנה). ממצב שיווי המשקל מזיזים את המוט בזווית θ קטנה נוספת. מצא את המשוואה עבור θ ומצא את התדר העצמי של המערכת.
- (ג) כעת הנח כי $k_\theta \rightarrow \infty$ ו- $M_1 = 0$ (ומכאן שגם מומנט האינרציה - $\bar{I} = 0$), והנח כי המוט גמיש עם מודול יאנג E ומומנט שני של השטח I . סמן את תזוזת המסה שבקצה B ב- x ומצא את המשוואה הדיפרנציאלית עבור x ואת התדר העצמי של המערכת.

(7) מוט בעל צורה ישרת זווית, אשר מסתו זניחה, מחובר למסה מרוכזת M בקצהו. באמצע המוט מחובר קפיץ בעל קבוע k אשר נע על משטח חסר חיכוך.



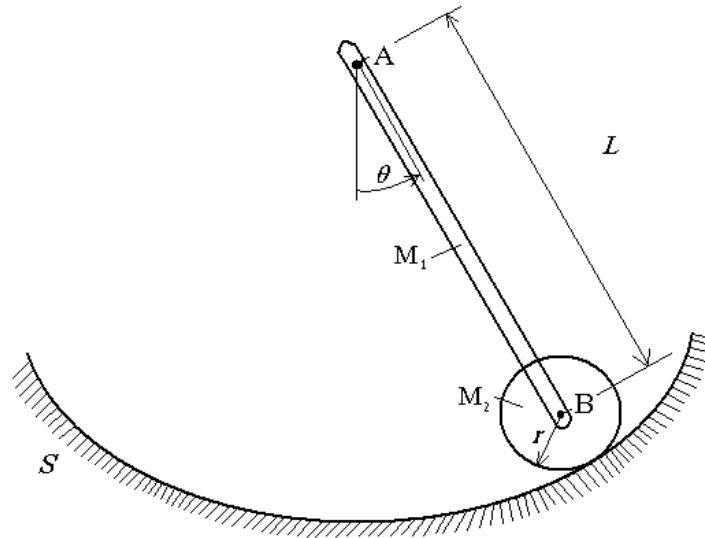
- (א) מצא את משוואת התנועה עבור זווית גדולה θ .
- (ב) הנח כעת ש- θ היא קטנה, והפעל את הנחה זו על המשוואה שקיבלת בסעיף א'. לאחר מכן, מצא תדר עצמי של המערכת.
- (ג) הנח מההתחלה כי θ קטנה, כתוב את משוואת התנועה עבור θ ומצא תדר עצמי של המערכת.

- (8) שתי גלגלות מחוברות ביחד (כלומר, הן מסתובבות כיחידה אחת). הגלגלת הפנימית היא בעלת מסה M_1 ורדיוס r , הגלגלת השנייה היא בעלת מסה M_2 ורדיוס R . הגלגלת הפנימית מחוברת לקפיץ בעל קשיחות k , והגלגלת החיצונית מחוברת ע"י כבל למסה M . המערכת משוחררת ממצב מנוחה עד אשר היא מגיעה לשיווי משקל בזווית סיבוב θ_{st} . במצב זה, מזיזים את הגלגלות בזווית θ נוספת.



- (א) מצא את θ_{st} .
- (ב) מצא את משוואת התנועה עבור θ (בהנחת זווית קטנה), ומצא את התדר העצמי.

- 9) נתונה המערכת הבאה : מוט בעל אורך L ומסה M_1 ודיסק בעל רדיוס r ומסה M_2 . המוט מחובר בקצה A לפין, ובקצה B למרכז הדיסק. אין החלקה בין הדיסק ובין משטח S . הנח כי הזווית θ קטנה, ומצא את המשוואה עבור θ .



- 10) נתונה קורה גמישה חסרת מסה בעלת אורך L . הקורה רתומה בשני קצוות. בנקודה מרכזית של הקורה מחובר קפיץ בעל קשיחות k . לקפיץ מחוברת מסה נקודתית m . יש למצוא את משוואת התנועה עבור המסה m .

