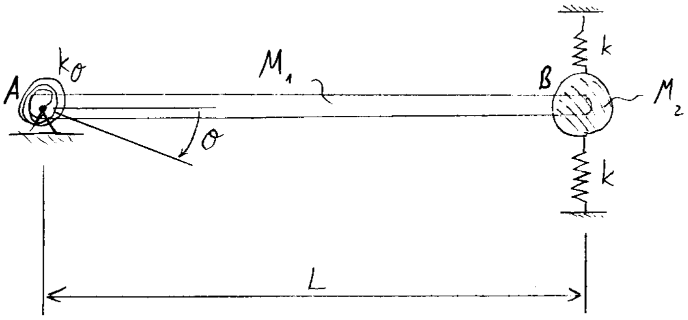
תורת התנודות – פתרון תרגיל מס' 1

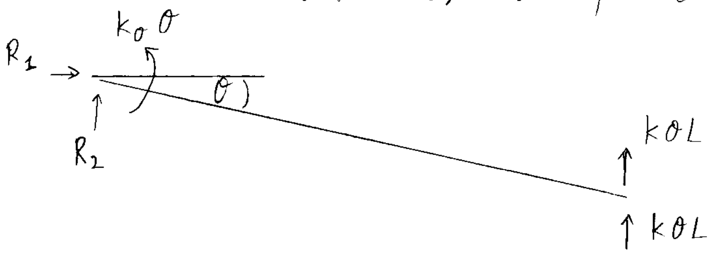
(1



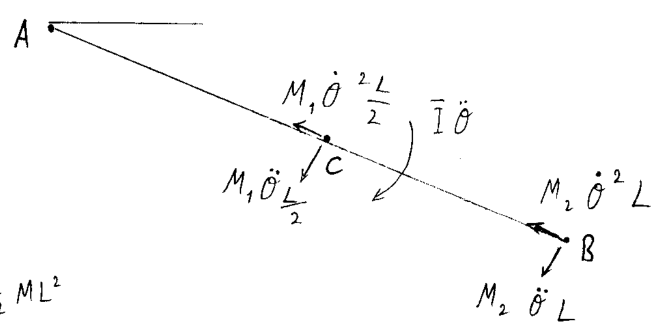
(א

הנחה - המערכת כאלו, כלומר $\vec{g}$ לא קיים.

$\theta << 1$ ולכן $\sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta \approx 1$.



$\equiv$



$\bar{I} = \frac{1}{12}ML^2$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\ddot{\theta}} \times \vec{AB} + \vec{\dot{\theta}} \times \left(\vec{\dot{\theta}} \times \vec{AB}\right) =$$

$$= 0 + \ddot{\theta}L + \dot{\theta}^2 L$$

$$\vec{a}_c = \ddot{\theta}\frac{L}{2} + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}$$

סכום מומנטים סביב נק' A ⊕ :

$$2k\theta L^2 + k_\theta \theta = -M_1 \ddot{\theta}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - M_2 \ddot{\theta} L^2 - I\ddot{\theta}$$

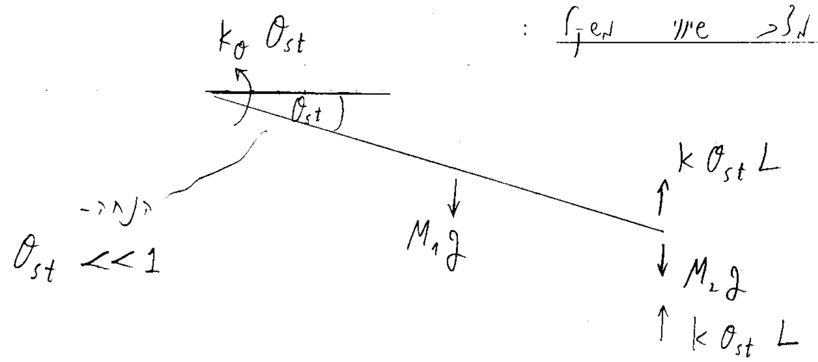
$$\ddot{\theta}\left(M_2 L^2 + M_1 \frac{L^2}{4} + \bar{I}\right) + \theta\left(2kL^2 + k_\theta\right) = 0$$

תדר עצמי :

$$W_n = \sqrt{\frac{2kL^2 + k_\theta}{M_2 L^2 + M_1 L^2/4 + \bar{I}}}$$

ב) כעת $\vec{g}$ קיים !

<u>מצב שיווי משקל</u> :



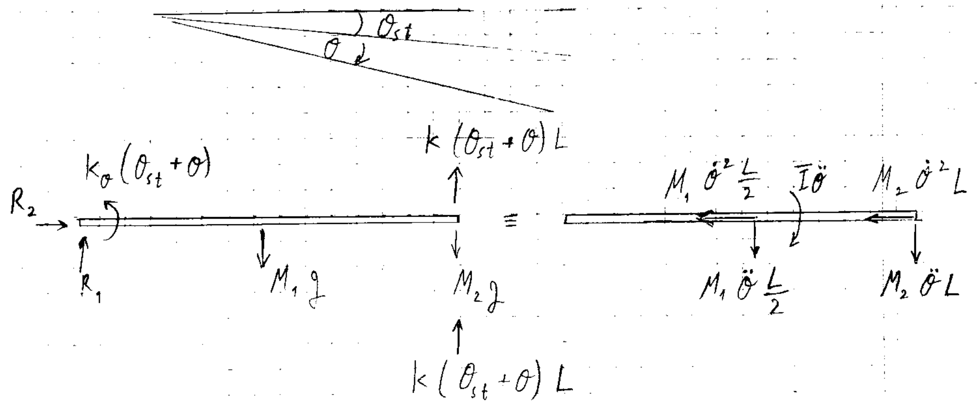
$$\Sigma M_A = 0$$

סכום מומנטים סביב נק' A ⊕ :

$$-M_2 g - M_1 g \frac{L}{2} + 2k\theta_{st} L^2 + k_\theta \theta_{st} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{st} = \frac{M_1 g \frac{L}{2} + M_2 g L}{2kL^2 + k_\theta}}$$

כעת ניתן תזוזה קטנה למוט ממצב שיווי המשקל שלו :



הערה: שים לב כי $\dot{\theta}_{st} = \ddot{\theta}_{st} = 0$

סכום המומנטים סביב נקודה A : ↺+

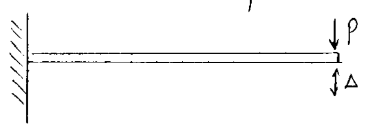
$$k_\theta(\theta_{st}+\theta) - M_1 g \frac{L}{2} - M_2 g L + 2k(\theta_{st}+\theta)L^2 =$$
$$= -M_1\ddot{\theta}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - M_2\ddot{\theta}L^2 - \bar{I}\ddot{\theta}$$

כעת נציב את הביטוי ל- θ_{st} ונקבל :

$$\ddot{\theta}\left(M_1\frac{L^2}{4} + M_2L^2 + \bar{I}\right) + \theta\left(k_\theta + 2kL^2\right) = 0$$

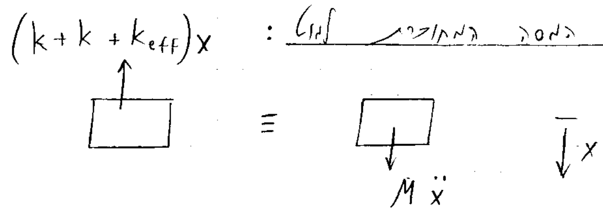
ג) נתון כי $k_\theta \to \infty$ ו- $M_1 = 0$.
המוט הוא גמיש והוא בעל מודול-יאנג - E ומומנט שני של שטח (k תלוי בקורה) - I.

$k_\theta \to \infty$ שקול לחיבור המוט לקיר.
ההתנגדות האלסטית של המוט לשקיעה :



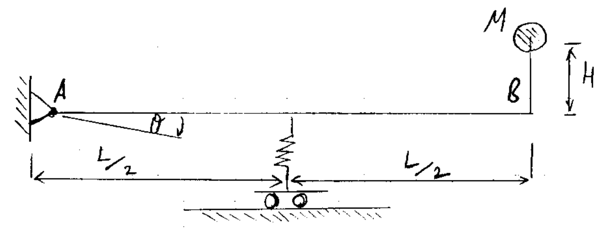
$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow P = \underbrace{\left(\frac{3EI}{L^3}\right)}_{\equiv k_{eff}}\Delta$$

דג"ח על המסה המחוברת לגוף :

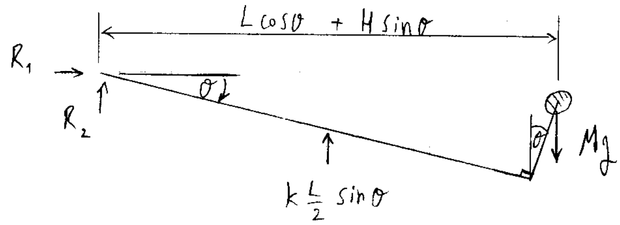


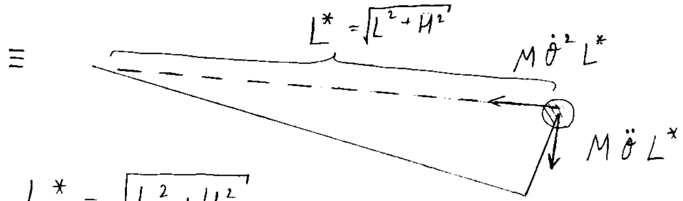
$$\Rightarrow \quad M\ddot{x} + (2k + k_{eff})\,x = 0$$

(2



(א





$$L^* = \sqrt{L^2 + H^2}$$

סכום המומנטים סביב נקודה A ⟲+ :

$$\left(k\,\frac{L}{2}\sin\theta\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - Mg\,(L\cos\theta + H\sin\theta) = -M\ddot{\theta}L^{*2}$$

$$M\ddot{\theta}L^{*2} + k\,\frac{L^2}{4}\sin\theta\cos\theta - Mg\,(L\cos\theta + H\sin\theta)$$

$$\theta = \theta_{st} + \theta_1$$

ג) נניח θ קטן $\Leftarrow$ $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$

$$M\ddot{\theta}\,(L^2+H^2) + k\frac{L^2}{4}\theta - Mg\,(L+H\theta) = 0$$

עבור θ_{st} אותה משוואה, רק שעכשיו $\ddot{\theta}_{st}=0$ ולכן -

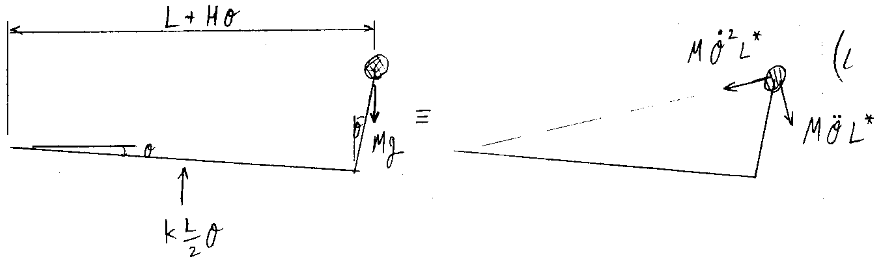
$$k\frac{L^2}{4}\theta_{st} - Mg\,(L+H\theta_{st}) = 0 \Rightarrow \theta_{st} = \frac{MgL}{k\frac{L^2}{4} - MgH}$$

$$M\ddot{\theta}_1\,(L^2+H^2) + k\frac{L^2}{4}(\theta_{st}+\theta_1) - Mg\,(L+H(\theta_{st}+\theta_1)) = 0$$

$$M\ddot{\theta}_1\,(L^2+H^2) + \left(k\frac{L^2}{4} - MgH\right)\theta_1 + \left(k\frac{L^2}{4}\theta_{st} - MgL - MgH\theta_{st}\right) = 0$$

$$k\frac{L^2}{4}\theta_{st} - MgL - MgH\theta_{st} = \left(k\frac{L^2}{4} - MgH\right)\cdot\frac{MgL}{k\frac{L^2}{4} - MgH} - MgL = 0$$

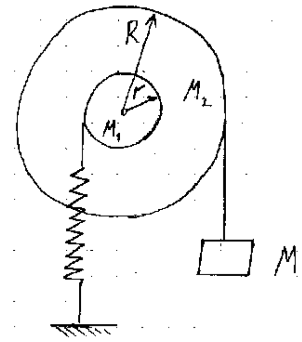
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} M\ddot{\theta}_1\,(L^2+H^2) + \left(k\frac{L^2}{4} - MgH\right)\theta_1 = 0 \\ \omega_n^2 = \dfrac{k\frac{L^2}{4} - MgH}{M\,(L^2+H^2)} \end{array}}$$



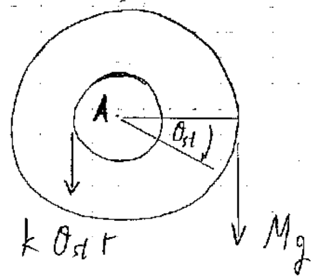
ד)

מקבלים אותה משוואה כמו בג', אלא שצריך לעיתים אפשר להזניח את $H\theta$.

(3



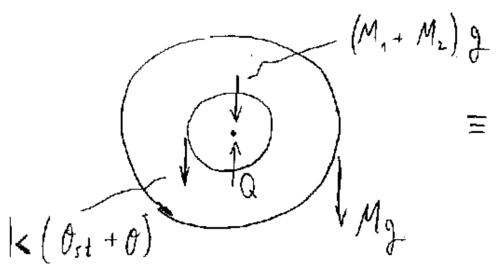
א) נמצא שיווי משקל :



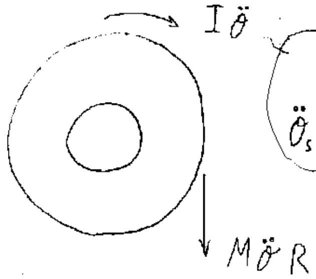
$$\Sigma M_A = Mg\,R - k\,\theta_{st}\,r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{st} = \frac{Mg\,R}{k r^2}$$

ב) המערכת בתנועה. נדג"ח :



$\equiv$



שים לב כי $\ddot{\theta}_{st} = 0$

$$I = \frac{M_1 r^2}{2} + \frac{M_2 R^2}{2}$$

סכום המומנטים סביב נקודה A : (+)

$$M g R - k(\theta_{st} + \theta) r^2 = M \ddot{\theta} R^2 + I \ddot{\theta}$$

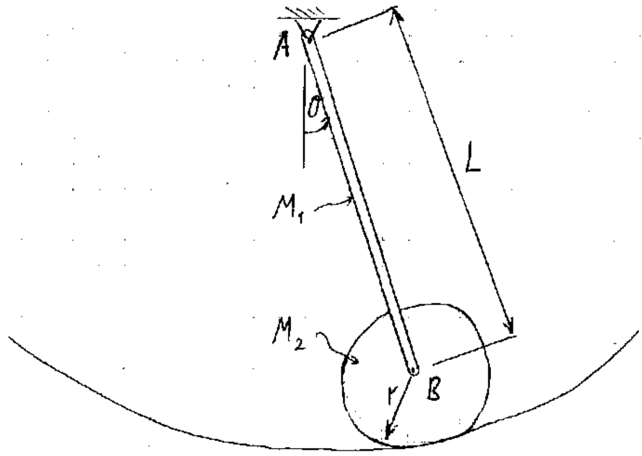
$$\cancel{M g R} - \cancel{k r^2 \theta_{st}} - k r^2 \theta = M \ddot{\theta} R^2 + I \ddot{\theta}$$

$$(M R^2 + I)\ddot{\theta} + k r^2 \theta = 0$$

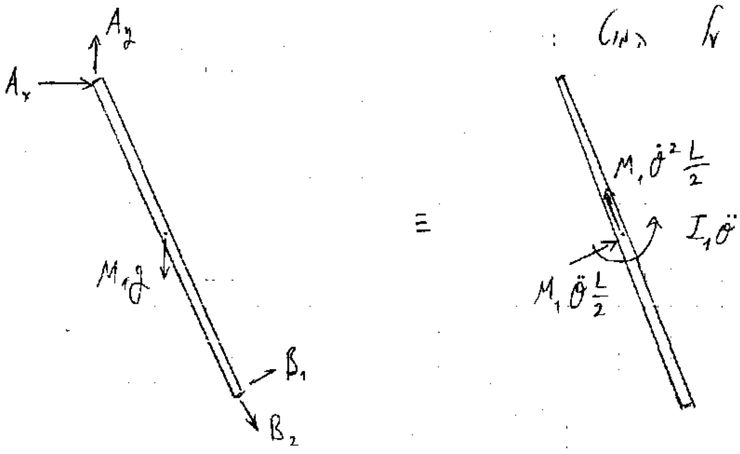
$$W_n = \sqrt{\frac{k r^2}{M R^2 + I}}$$

---

4)



דג"ח של המוט :



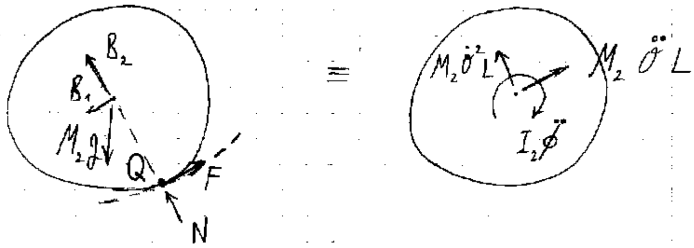
$$I_1 = \frac{1}{12} M_1 L^2$$

סכום המומנטים סביב נקודה A (+) :

$$-M_1 g \frac{L}{2}\theta + B_1 L = I_1 \ddot\theta + M_1 \ddot\theta \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$(*)\quad \ddot\theta\left(I_1 + M_1 \frac{L^2}{4}\right) + M_1 g \frac{L}{2}\theta - B_1 L = 0$$

דג"ח של הדיסקה :



תנאי אי-החלקה :

$$L\theta = R\phi$$

(ולכן גם - $L\ddot\theta = R\ddot\phi$).

סכום הכוחות סביב נק' Q (נקודת המגע עם המשטח) (+) :

$$B_1 r + M_2 g r\theta = -I_2\ddot\phi - M_2 \ddot\theta L r$$

$$B_1 = -M_2 g\theta - \frac{I_2}{r}\ddot\phi - M_2 \ddot\theta L =$$

$$= -M_2 g\theta - \frac{I_2}{r}\frac{L}{R}\ddot\theta - M_2\ddot\theta L$$

נציב את הביטוי ל- B_1 במשוואה (*) ונקבל :

$$\ddot\theta\left(I_1 + M_1\frac{L^2}{4}\right) + M_1 g\frac{L}{2}\theta + M_2 g\theta L + \frac{I_2 L^2}{rR}\ddot\theta + M_2\ddot\theta L^2 = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta\left(\frac{r}{L}I_1 + M_1\frac{Lr}{4} + \frac{L}{R}I_2 + M_2 L r\right) + \theta\left(M_1 g\frac{r}{2} + M_2 g r\right) = 0}$$

$$W_n = \sqrt{\frac{M_1 g \frac{r}{2} + M_2 g r}{\frac{r}{L} I_1 + M_1 \frac{Lr}{4} + \frac{L}{R} I_2 + M_2 L r}}$$

---

5) את ההזזה של המסה ניתן לפרק לסכום של שתי הזזות: x_1 - הזזה שנגרמת עקב התנועה של מרכז הקורה ו x_2 -הזזה שנגרמת עקב התארכות או התקצרות של הקפיץ.

ניתן למצוא בספרות את שקיעת מרכז הקורה $x_1 = \frac{Fl^3}{192EI}$, תזוזת הקפיץ מתוארת על ידי נוסחה הבאה: $x_2 = \frac{F}{k}$

$$x = x_1 + x_2 = \frac{Fl^3}{192EI} + \frac{F}{k} \;\Rightarrow\; x\left(\frac{192kEI}{192EI + kl^3}\right) = F$$

נחליף את הכח F בכוח דינמי $-m\ddot{x}$ ונקבל את משוואת התנועה:

$$m\ddot{x} + x\left(\frac{192kEI}{192EI + kl^3}\right) = 0$$