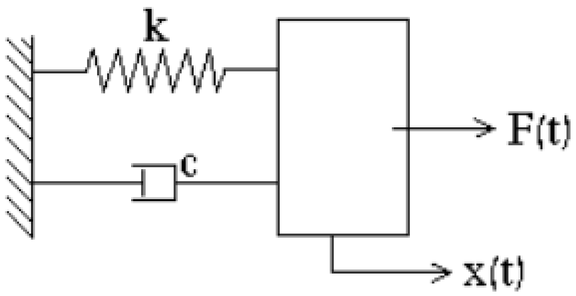
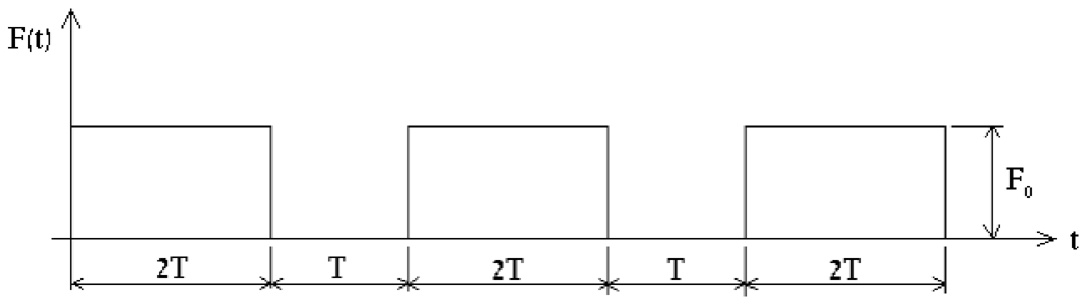
גיליון תרגילים 3

1) התייחס למערכת הנתונה באיור 1.1.



איור 1.1

F(t) הינו כוח מחזורי הנתון באיור 1.2 :

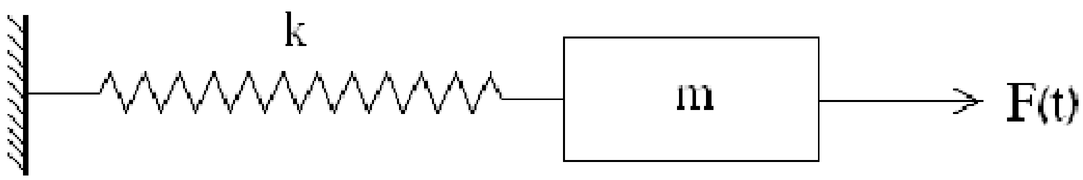


איור 1.2

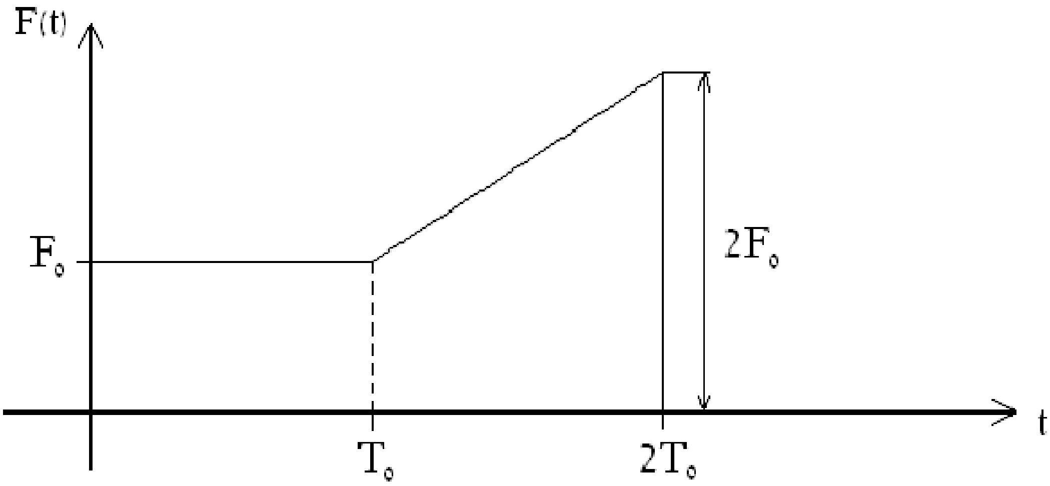
הנח כי פקטור הריסון $\xi < 1$ (כלומר, המערכת נמצאת בתת ריסון).
מצא את התנועה של המסה במצב מתמיד.

2) התייחס למערכת הנתונה באיור 2.1. על המערכת פועל הכוח F(t) אשר תלותו בזמן נתונה בגרף שבאיור 2.2. המערכת מתחילה לנוע ממצב מנוחה, כלומר

$x(t=0)=0$ ו- $\dot{x}(t=0)=0$



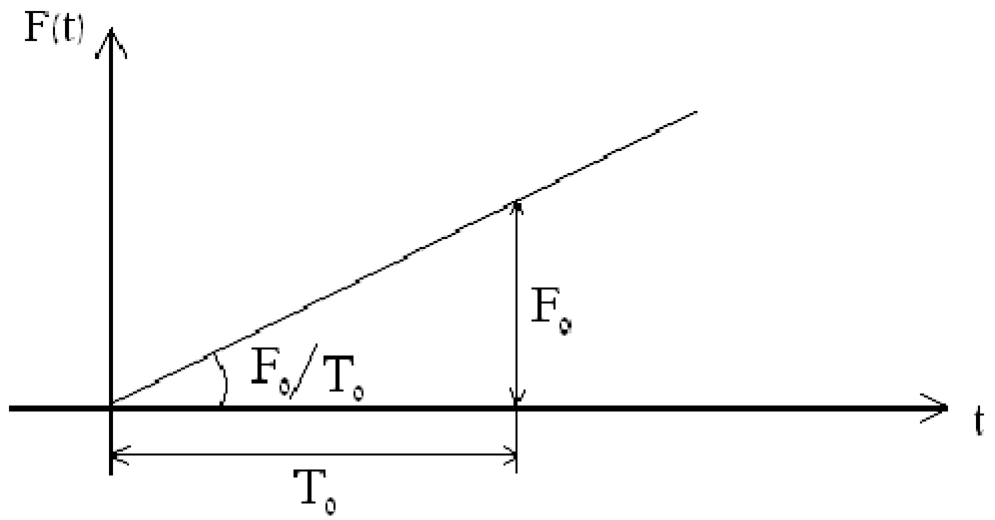
איור 2.1



איור 2.2

א. נניח וידוע לך שתגובת המערכת לפונקצית מדרגה הנתונה באיור 2.3 היא: $U(t)=\frac{F_0}{k}\left(1-\cos(\omega_n t)\right)$, כאשר $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ וידוע לך כי התגובה לפונקצית שיפוע הנתונה באיור 2.4 היא: $W(t)=\frac{F_0}{T_0}\frac{1}{k}\left(t-\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)$

איור 2.3



איור 2.4

מצא את תגובת המערכת לכוח שבאיור 2.2 ע״י עקרון החפיפה (Superposition) ושימוש בתגובות הידועות – U(t) ו-W(t). בנוסף ציין מהו הפתרון בכל תחום זמן

- $0 \le t \le T_0$ ‏ $T_0 \le t \le 2T_0$ ו- $2T_0 \le t$

ב. כדרך אלטרנטיבית, מצא את תגובת המערכת לכוח שבאיור 2.2 ע״י אינטגרל הקונובלוציה אשר עושה שימוש ב-h(t) (שזו התגובה לפונקצית הלם של יחידה).

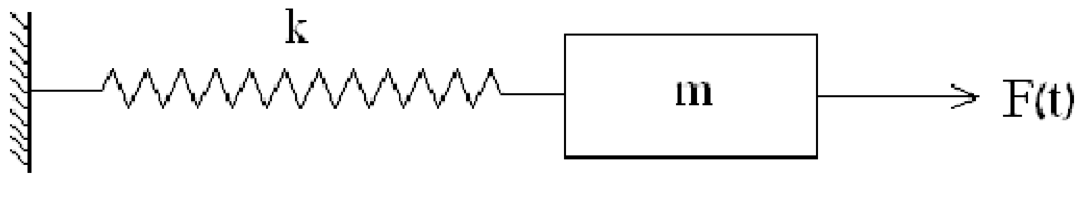
ג. וודא ששני הפתרונות שקבלת בסעיפים הקודמים הינם עקביים אחד עם השני.

3) התייחס למערכת הנתונה באיור 3. המשוואה הדיפרנציאלית של המערכת היא:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin(\omega t) + G_0 \cos(2\omega t)$$

תנאי ההתחלה הם:

$$x(0) = x_0 \text{ ו- } \dot{x}(0) = v_0$$



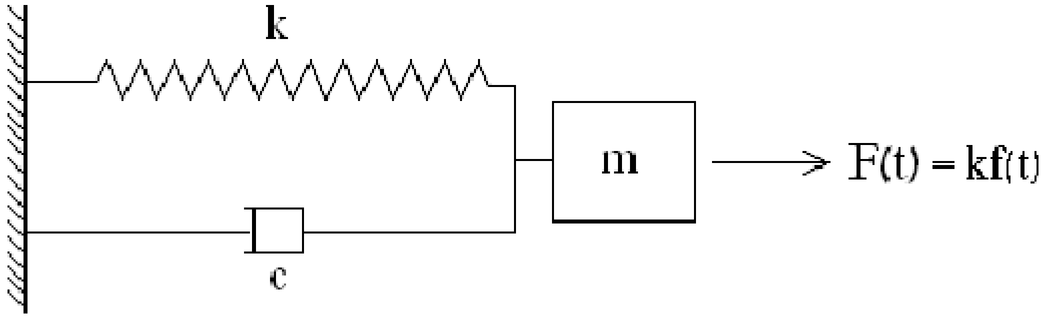
איור 3

א. מצא את הפתרון ע"י שימוש ב- X=Xh + Xp, כאשר Xh הוא הפתרון ההומוגני ו-Xp הוא הפתרון הפרטי.

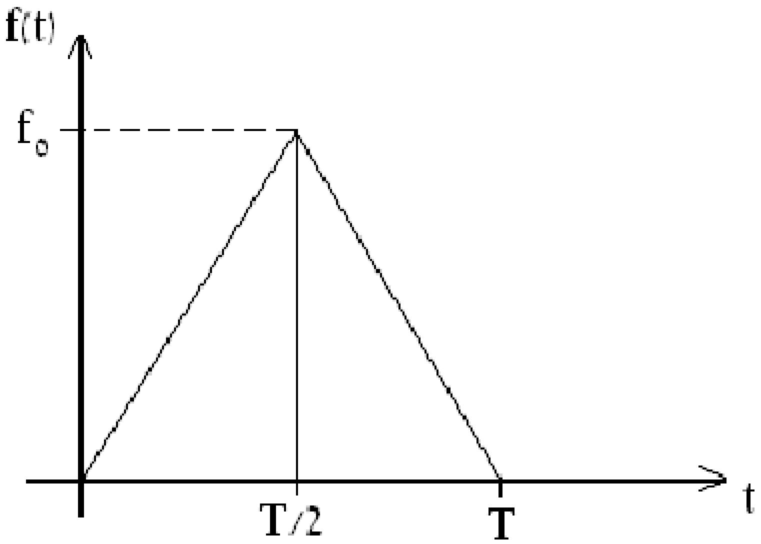
ב. מצא את הפתרון ע"י שימוש ב--X=X1 + X2, כאשר Xh מייצג את הפתרון עבור כוח חיצוני אפס ותנאי התחלה $x(0)=x_0$ ו- $\dot{x}(0)=v_0$ ו-X2 מייצג את הפתרון עבור כוח חיצוני $F(t)=F_0\sin(\omega t)+G_0\cos(2\omega t)$ ותנאי התחלה אפס (מנוחה).

ג. הראה כי הפתרונות שקבלת הינם עקביים אחד עם השני.

4) התייחס למערכת באיור 4.1, כאשר f(t) הינה פונקציה הנתונה בגרף שבאיור 4.2.



איור 4.1



איור 4.2

מצא את הפתרון עבור x(t) ע"י שימוש באינטגרל הקונבולוציה אשר עושה שימוש ב-h(t) (תגובה לפונקצית הלם של יחידה).

ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים:

$$\int e^{az}\sin(bz)dz=\frac{e^{az}\left(a\sin(bz)-b\cos(bz)\right)}{a^2+b^2}$$

$$\int ze^{az}\sin(bz)dz=\frac{ze^{az}\left(a\sin(bz)-b\cos(bz)\right)}{a^2+b^2}-\frac{e^{az}\left\{\left(a^2-b^2\right)\sin(bz)-2ab\cos(bz)\right\}}{\left(a^2+b^2\right)^2}$$

תשובות סופיות

2)

א), ב)

$$x(t)=u(t)U(t)+u(t-T_0)W(t-T_0)-u(t-2T_0)\left[W(t-2T_0)+2U(t-2T_0)\right]$$

3)

א), ב)

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{m\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}\left[\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]+$$
$$+\frac{G_0}{m\left(\omega_n^2-(2\omega)^2\right)}\left[\cos(2\omega t)-\cos(\omega_n t)\right]$$

4)

$$x(t)=\frac{2f_0}{T}\left\{u(t)r(t)-2u\left(t-\frac{T}{2}\right)r\left(t-\frac{T}{2}\right)+u(t-T)r(t-T)\right\}$$
$$r(t)=t-\frac{2\xi}{\omega_n}+e^{-\xi\omega_n t}\left[\frac{\left(2\xi^2-1\right)\sin(\omega_d t)}{\omega_d}+\frac{2\xi\cos(\omega_d t)}{\omega_n}\right]$$