תורת התנודות - פתרון תרגיל מס' 4

1) נרשום את מש' הכוחות בכיוון X:

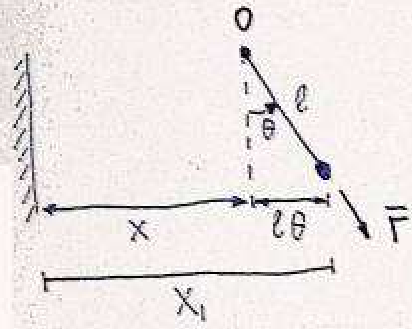
$$\sum F_x = M_c\ddot{X}_c = m_1\ddot{X}_1 + m_2\ddot{X}_2 \quad (*)$$

(M_c, X_c - מסה ומיקום של נק' מרכז המסה של המערכת:

$$M_c = m_1+m_2, \quad X_c = \frac{m_1X_1+m_2X_2}{m_1+m_2}$$)

- מיקום של מסה m_1: $X_1 = X$
- מיקום של מסה m_2:

$$X_2 = X + \ell\theta$$



- נציב ב-(*):

$$-KX = m_1\ddot{X} + m_2(\ddot{X}+\ell\theta),$$

$$m_1\ddot{X} + m_2(\ddot{X}+\ell\ddot{\theta}) + KX = 0$$

- נרשום את מש' המומנטים סביב נק' הסיבוב של המטוטלת (אינה נקודה קבועה!):

$$\sum\bar{M}_0 = \dot{\bar{H}}_0, \quad \bar{H}_0 = I_0\dot{\theta} + (m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2)\times\bar{V}_0$$

כאן:

$\bar{r}_1, \bar{r}_2$ - וקטורי מיקום של m_1 ו-m_2 ביחס' לנק' הסיבוב של המטוטלת

$\bar{V}_0$ - מהירות של נק' הסיבוב של המטוטלת.

$$\sum\bar{M}_0 = I_0\ddot{\theta} + (m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2)\times\bar{a}_0 \quad (**)$$

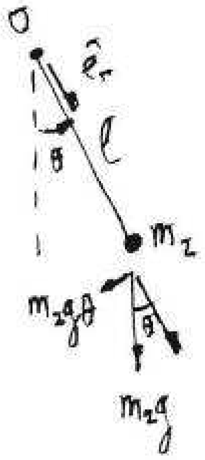
($\bar{r}_1, \bar{r}_2$ קבועים).

$\bar{r}_1 = \bar{0}, \ \bar{r}_2 = l \cdot \hat{e}_r$

$a_0 = \ddot{x}$

$$(**) \Rightarrow -m_2 g \theta l = m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \ ,$$

$$m_2 l (\ddot{x} + l\ddot{\theta}) + m_2 g l \theta = 0$$



- נרשום את שתי המשוואות:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + m_2(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) + kx = 0 \\ m_2 l(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) + m_2 g l \theta = 0 \end{cases}$$

בצורת מטריצה:

$$\begin{bmatrix} 2m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מציאת תדרים עצמיים ומודים עצמיים:

$$[K] - \lambda[M] = 0 \Rightarrow Det \begin{bmatrix} k - \lambda 2m & -\lambda ml \\ -\lambda ml & mgl - \lambda ml^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(k - 2\lambda m)(m g l - \lambda m l^2) - \lambda^2 m^2 l^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k m g l - k \lambda m l^2 - 2 \lambda m^2 g l + \lambda^2 m^2 l^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{k l + 2 m g + \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2}}{2 m l}$$

$$\lambda_2 = \frac{k l + 2 m g - \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2}}{2 m l}$$

הצבה של התדרים העצמיים לתוך $[K] - \lambda[M]$ ייתן את המודים העצמיים.

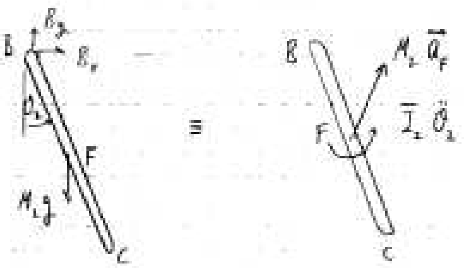
$$\left(k - \frac{k l + 2 m g \pm \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2}}{l} \right) x - \frac{1}{2} \left(k l + 2 m g \pm \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2} \right) \theta = 0$$

נציב x=1

$$r_{1,2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{2\left(2 m g \pm \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2}\right)}{l\left(k l + 2 m g + \sqrt{k^2 l^2 + 4 m^2 g^2}\right)} \end{array} \right\}$$

(2

(א (1



$$\vec{a}_F = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \times \vec{BF} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{BF})$$

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \vec{\alpha}_1 \times \vec{AB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AB}) =$$

$$= \ddot{\theta}_1 L + \dot{\theta}_1^2 L = L \ddot{\theta}_1 (\cos\theta_1 \, \underline{i} + \sin\theta_1 \, \underline{j}) +$$

$$+ L \dot{\theta}_1^2 (- \sin\theta_1 \, \underline{i} + \cos\theta_1 \, \underline{j})$$

$$\vec{\alpha}_2 \times \vec{BF} = \ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \ddot{\theta}_2 (\cos\theta_2 \, \underline{i} + \sin\theta_2 \, \underline{j})$$

$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{BF}) = \frac{L}{2} \dot{\theta}_2^2 = \frac{L}{2} \dot{\theta}_2^2 (- \sin\theta_2 \, \underline{i} + \cos\theta_2 \, \underline{j})$$

סכום מומנטים סביב B בכיוון ⟲ :

$$-M_2 g \frac{L}{2} \sin\theta_2 = I_2 \ddot{\theta}_2 + \underbrace{M_2 \ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}}_{\vec{BF} \times M_2 (\vec{\alpha}_2 \times \vec{BF})} + \underbrace{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{L}{2} \sin\theta_2 & -\frac{L}{2} \cos\theta_2 & 0 \\ M_2 a_{B_x} & M_2 a_{B_y} & 0 \end{vmatrix}}_{\vec{BF} \times M_2 \vec{a}_B}$$

$$\vec{BF} \times M_2 \vec{a}_B = M_2 \underline{k} \Big\{ \frac{L}{2}\sin\theta_2 \left(L\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + L\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \right) +$$

$$+ \frac{L}{2}\cos\theta_2 \left(L\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - L\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \right) \Big\}$$

$$\Rightarrow \boxed{-M_2 g \frac{L}{2}\sin\theta_2 = \bar{I}_2\ddot{\theta}_2 + M_2\frac{L^2}{4}\ddot{\theta}_2 + M_2\Big\{ \frac{L^2}{2}\sin\theta_2\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right) + \frac{L^2}{2}\cos\theta_2\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)\Big\}}$$

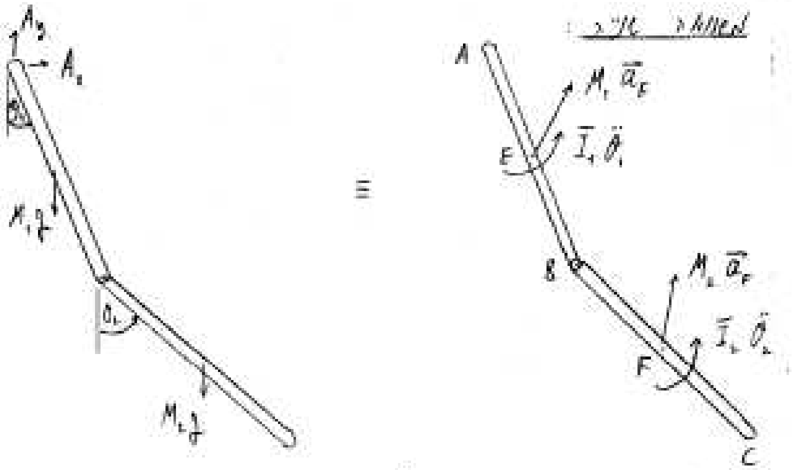
לינאריזציה k במשוואה -

$$\sin\theta_1 \approx \theta_1 \quad , \quad \cos\theta_1 \approx 1$$
$$\sin\theta_2 \approx \theta_2 \quad , \quad \cos\theta_2 \approx 1$$

נציב ב- 6 ביטויים מסדר שני ומעלה ונקבל:

$$\boxed{-M_2 g \frac{L}{2}\theta_2 = \bar{I}_2\ddot{\theta}_2 + M_2\frac{L^2}{4}\ddot{\theta}_2 + M_2\frac{L^2}{2}\ddot{\theta}_1}$$

<u>משוואה שנייה</u>:



מומנטים סביב A k $M_1\vec{a}_E$ ו- $M_2\vec{a}_F$:

$$\vec{AE} \times M_1\vec{a}_E = M_1\ddot{\theta}_1\frac{L^2}{4}\underline{k}$$

$$\vec{AF} \times M_2\vec{a}_F = (\vec{AB} + \vec{BF}) \times M_2\vec{a}_F = \vec{AB} \times M_2\vec{a}_F + \underbrace{\vec{BF} \times M_2\vec{a}_F}_{\text{חושב קודם.}}$$

$$\vec{BF} \times M_2 \vec{a}_F = \left\{ M_2 \frac{L^2}{4} \ddot{\theta}_2 + M_2 \left[\frac{L^2}{2} \sin\theta_2 \left(\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{L^2}{2} \cos\theta_2 \left(\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \right) \right] \right\} \underline{k}$$

$$\vec{AB} \times M_2 \vec{a}_F = \vec{AB} \times M_2 \left[\vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \times \vec{BF} + \vec{w}_2 \times (\vec{w}_2 \times \vec{BF}) \right]$$

$$\vec{AB} \times \vec{a}_B = \vec{AB} \times \left(\ddot{\theta}_1 L + \dot{\theta}_1^2 L \right) = \ddot{\theta}_1 L^2 \ \underline{k}$$

$$\vec{AB} \times (\vec{\alpha}_2 \times \vec{BF}) = \vec{AB} \times \left(\ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \right) = \left(L \sin\theta_1 \underline{i} - L \cos\theta_1 \underline{j} \right)$$

$$\times \left(\ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \cos\theta_2 + \ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \sin\theta_2 \right) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ L\sin\theta_1 & -L\cos\theta_1 & 0 \\ \ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \cos\theta_2 & \ddot{\theta}_2 \frac{L}{2} \sin\theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{L^2}{2} \ddot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \frac{L^2}{2} \ddot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right) \underline{k}$$

$$\vec{AB} \times \left(\vec{w}_2 \times \left(\vec{w}_2 \times \vec{BF} \right) \right) = \vec{AB} \times \left(\dot{\theta}_2^2 \frac{L}{2} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ L\sin\theta_1 & -L\cos\theta_1 & 0 \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 & \frac{L}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{L^2}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{L^2}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \right] \underline{k}$$

$$\vec{AF} \times M_2 \vec{a}_F = \underline{k} \ M_2 L^2 \left\{ \frac{\ddot{\theta}_2}{4} + \frac{\sin\theta_2}{2} \left(\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 \overset{-\underline{L\cos/}}{+} \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \right) + \right.$$

$$+ \frac{\cos\theta_2}{2} \left(\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \right) + \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \right\}$$

סכום מומנטים סביב A ב- $(+\underline{k})$

$$\boxed{\begin{aligned} &-M_1 g \tfrac{L}{2}\sin\theta_1 - M_2 g\left(L\sin\theta_1 + \tfrac{L}{2}\sin\theta_2\right) = \bar{I}_1\ddot{\theta}_1 + \bar{I}_2\ddot{\theta}_2 + \\ &+ M_1\ddot{\theta}_1 \tfrac{L^2}{4} + M_2 L^2\Big[\tfrac{\ddot{\theta}_2}{4} + \tfrac{1}{2}\sin\theta_2\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\cos\theta_2\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right) + \ddot{\theta}_1 + \sin\theta_1\left(\tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_2\sin\theta_2 + \right. \\ &\left. + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right) + \cos\theta_1\left(\tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 - \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2\right)\Big] \end{aligned}}$$

עבור אינפיניטסימליות נקבל :

$$\boxed{\begin{aligned} &-M_1 g \tfrac{L}{2}\theta_1 - M_2 g\left(L\theta_1 + \tfrac{L}{2}\theta_2\right) = \bar{I}_1\ddot{\theta}_1 + \bar{I}_2\ddot{\theta}_2 + \\ &+ M_1\ddot{\theta}_1\tfrac{L^2}{4} + M_2\ddot{\theta}_2\tfrac{L^2}{4} + M_2\ddot{\theta}_1\tfrac{L^2}{2} + M_2 L^2\ddot{\theta}_1 + \\ &+ M_2\ddot{\theta}_2\tfrac{L^2}{2} \end{aligned}}$$

ג) את האינפיניטסימלי עבור כסעיף א ונקבל משוואות
התנועה הן -

$$M_2\frac{L^2}{2}\ddot{\theta}_1 + \left(\bar{I}_2 + M_2\frac{L^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + M_2 g\frac{L}{2}\theta_2 = 0$$

$$\left(\bar{I}_1 + M_1\frac{L^2}{4} + \frac{3}{2}M_2L^2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(\bar{I}_2 + \frac{3}{4}M_2L^2\right)\ddot{\theta}_2 +$$

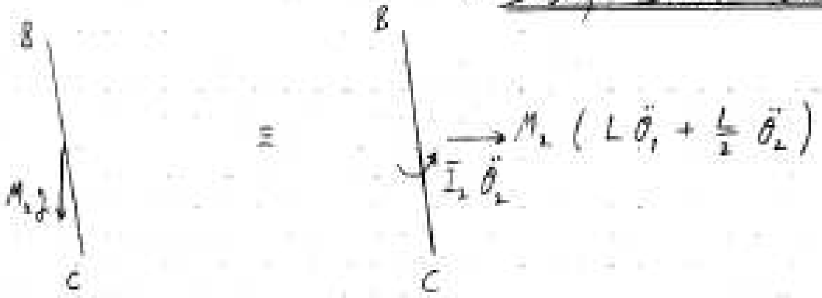
$$+ \theta_1\left(M_1 g\frac{L}{2} + M_2 g L\right) + \theta_2 M_2 g\frac{L}{2} = 0$$

ניתן לסדר אותן כמערכת מטריצית :

$$\begin{bmatrix} M_2\frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + M_2\frac{L^2}{4} \\ \bar{I}_1 + M_1\frac{L^2}{4} + \frac{3}{2}M_2L^2 & \bar{I}_2 + \frac{3}{4}M_2L^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} +$$

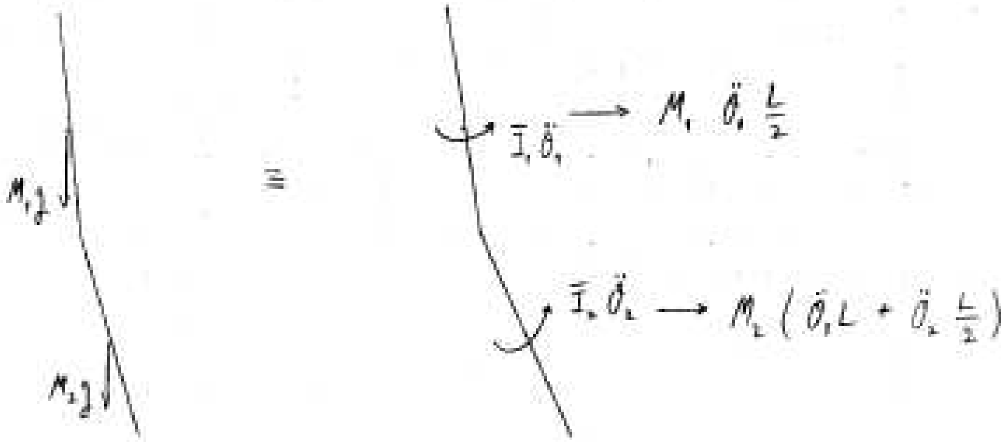
$$+ \begin{bmatrix} 0 & M_2 g\frac{L}{2} \\ M_1 g\frac{L}{2} + M_2 g L & M_2 g\frac{L}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

ג) <u>דיאגרמות גוף חופשי</u>:



סכום מומנטים סביב B:

$$-M_2 g\frac{L}{2}\theta_2 = \bar I_2\ddot\theta_2 + M_2\frac{L^2}{2}\ddot\theta_1 + M_2\frac{L^2}{4}\ddot\theta_2$$



סכום מומנטים סביב A:

$$-M_1 g\frac{L}{2}\theta_1 - M_2 g\left(L\theta_1+\frac{L}{2}\theta_2\right) = \bar I_1\ddot\theta_1+\bar I_2\ddot\theta_2+M_1\ddot\theta_1\frac{L^2}{4}$$

$$+M_2\left(\ddot\theta_1 L+\ddot\theta_2\frac{L}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}L =$$

$$=\bar I_1\ddot\theta_1+\bar I_2\ddot\theta_2+\ddot\theta_1\left(M_1\frac{L^2}{4}+\frac{3}{2}M_2 L\right)+\ddot\theta_2\cdot\frac{3}{4}M_2L^2$$

ניתן לראות כי קיבלנו בדיוק את אותן משוואות שקיבלנו
בסעיף ב !

ד) מערכת המשוואות היא -

$$\begin{bmatrix} M_2 \frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + M_2 \frac{L^2}{4} \\ \bar{I}_1 + M_1 \frac{L^2}{4} + \frac{3}{2} M_2 L^2 & \bar{I}_2 + \frac{3}{4} M_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & M_2 g \frac{L}{2} \\ M_1 g \frac{L}{2} + M_2 g L & M_2 g \frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שים לב כי המטריצות [m] ו-[k] אינן סימטריות כאן
בגלל שבחרנו בכיוונים , כש - סימטריות הן לא מלכתחילה
וניתן לסדרן שניתן לרשום את המשוואות בצורה סימטרית.
דבר זה אינו הכרחי ועדיין נקבל את אותה
התדירות והמודות העצמיות לא הינן תלויות של המערכת
המקוריות. נראה שאכן המערכת ניתנת לרשום סימטרית:
נחסר מהמשוואה השניה את הראשונה -

$$\begin{bmatrix} M_2 \frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + M_2 \frac{L^2}{4} \\ \bar{I}_1 + M_1 \frac{L^2}{4} + \frac{3}{2} M_2 L^2 - M_2 \frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + \frac{3}{4} M_2 L^2 - \left(\bar{I}_2 + M_2 \frac{L^2}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & M_2 g \frac{L}{2} \\ M_1 g \frac{L}{2} + M_2 g L & M_2 g \frac{L}{2} - M_2 g \frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_2 \frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + M_2 \frac{L^2}{4} \\ \bar{I}_1 + M_1 \frac{L^2}{4} + M_2 L^2 & M_2 \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M_2 g \frac{L}{2} \\ M_1 g \frac{L}{2} + M_2 g L & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת נחליף את סדר המשוואות ונקבל מטריצות סימטריות:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 + M_1 \frac{L^2}{4} + M_2 L^2 & M_2 \frac{L^2}{2} \\ M_2 \frac{L^2}{2} & \bar{I}_2 + M_2 \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 g \frac{L}{2} + M_2 g L & 0 \\ 0 & M_2 g \frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נתון כי - $M_1 = M_2 = m$ ולכן -

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \frac{1}{12} m L^2$$

$$mL^2 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + mgL \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת נפתור את המשוואות :

הפתרון יהיה מהצורה -

$$\theta_1 = u_1 e^{iwt}$$

$$\theta_2 = u_2 e^{iwt}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta}_1 = -w^2 u_1 e^{iwt} \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = -w^2 u_2 e^{iwt}$$

נציב את הנגזרות במשוואות :

$$-w^2 \cancel{e^{iwt}} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{L} \cancel{e^{iwt}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -w^2 \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \frac{g}{L} & -\frac{w^2}{2} \\ -\frac{w^2}{2} & -\frac{w^2}{3} + \frac{1}{2} \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון יחיד למערכת הנ"ל יהיה רק אם הדטרמיננטה של
המטריצה תהיה שווה לאפס !

$$\det \begin{bmatrix} -w^2 \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \frac{g}{L} & -\frac{w^2}{2} \\ -\frac{w^2}{2} & -\frac{w^2}{3} + \frac{1}{2} \frac{g}{L} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{4}{3}W^2+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\right)\left(-\frac{W^2}{3}+\frac{1}{2}\frac{g}{l}\right)-\frac{W^4}{4}=0$$

$$\frac{4}{9}W^4-\frac{4}{6}W^2\frac{g}{l}-\frac{1}{2}W^2\frac{g}{l}+\frac{3}{4}\left(\frac{g}{l}\right)^2-\frac{W^4}{4}=0$$

$$\frac{7}{36}W^4-\frac{7}{6}W^2\frac{g}{l}+\frac{3}{4}\left(\frac{g}{l}\right)^2=0$$

$$W^2_{1,2}=\frac{\frac{7}{6}\frac{g}{l}\pm\sqrt{\frac{49}{36}\left(\frac{g}{l}\right)^2-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{36}\left(\frac{g}{l}\right)^2}}{2\cdot\frac{7}{36}}=$$

$$=\frac{\frac{7}{6}\frac{g}{l}\pm\sqrt{\frac{28}{36}\left(\frac{g}{l}\right)^2}}{14/36}=\frac{\frac{7}{6}\pm\frac{\sqrt{28}}{6}}{\frac{14}{36}}\frac{g}{l}=$$

$$=6\left(\frac{7\pm\sqrt{28}}{14}\right)\frac{g}{l}=\left(3\pm2.268\right)\frac{g}{l}$$

$$W_1^2=5.268\frac{g}{l}\Rightarrow W_1=2.295\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$W_2^2=0.732\frac{g}{l}\Rightarrow W_2=0.856\sqrt{\frac{g}{l}}$$

בכדי למצוא [illegible] נציב את ערכו של W_1^2
במשוואה הראשונה :

$$\left(-5.268\frac{g}{l}\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\right)U_1+\left(-5.268\frac{g}{l}\cdot\frac{1}{2}\right)U_2=0$$

$$-5.524\,U_1-2.634\,U_2=0$$

נציב $U_1=1$ ונקבל -

$$U_2=-2.097$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}=U_{11}\begin{Bmatrix}1\\-2.097\end{Bmatrix}$$

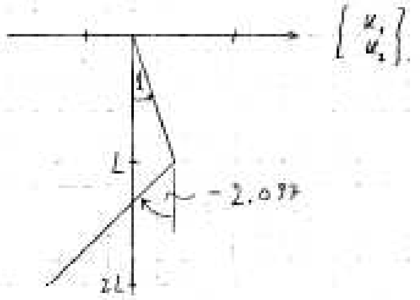
כעת נציב את ערכו של W_2^2 במשוואה הראשונה -

$$\left(-0.732\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)U_1+\left(-0.732\cdot\frac{1}{2}\right)U_2=0$$

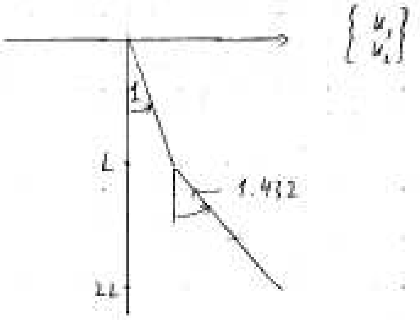
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}=U_{12}\begin{Bmatrix}1\\1.432\end{Bmatrix}$$

שרטוט צורות של המודים :

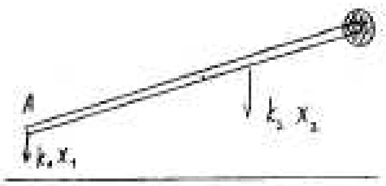
$\underline{W_1}$:



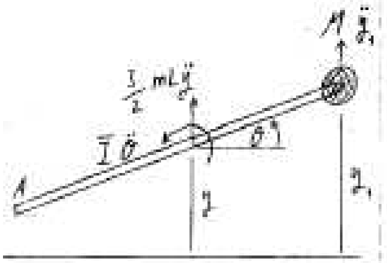
$\underline{W_2}$:

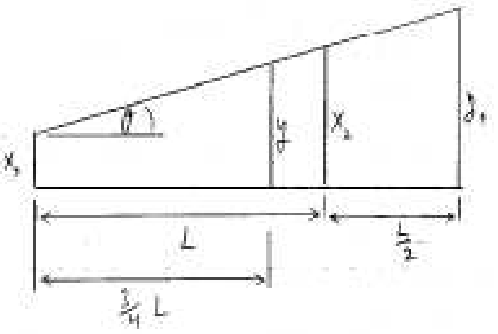


(1 (3



≡





$$\tan\theta = \frac{x_2 - x_1}{L} \rightarrow \theta << 1 \Rightarrow \theta \cong \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$\frac{y - x_1}{\frac{3}{4} L} = \frac{x_2 - x_1}{L} \Rightarrow y = x_1 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1) =$$
$$= \frac{x_1}{4} + \frac{3}{4} x_2$$

$$\frac{y_1 - x_1}{\frac{3}{2} L} = \frac{x_2 - x_1}{L} \Rightarrow y_1 = x_1 + \frac{3}{2}(x_2 - x_1) =$$
$$= -\frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2} mL\right)\cdot\left(\frac{3}{2} L\right)^2 = \frac{9}{32} mL^3$$

$$\Sigma F_y = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = \frac{3}{2} mL\left(\frac{\ddot{x}_1}{4} + \frac{3}{4}\ddot{x}_2\right) + M\left(-\frac{\ddot{x}_1}{2} + \frac{3}{2}\ddot{x}_2\right)$$

$$-\frac{1}{8} mL\ddot{x}_1 + 2\frac{5}{8} mL\ddot{x}_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

$$\Sigma M_A = -k_2 x_2 L = \bar{I}\ddot{\theta} + \frac{1}{2} mL\ddot{y}_{g} \cdot \frac{3}{4}L + M\ddot{y}_{d}\,\frac{3}{2}L$$

$$\bar{I}\,\frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{L} + \frac{9}{8} mL^2\left(\frac{\ddot{x}_1}{4} + \frac{3}{4}\ddot{x}_2\right) + M\frac{3}{2}L\left(-\frac{1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}\ddot{x}_2\right) +$$

$$+ k_2 x_2 L = 0$$

$$\ddot{x}_1\left(-\frac{\bar{I}}{L} + \frac{9}{32} mL^2 - \frac{3}{4} ML\right) + \ddot{x}_2\left(\frac{\bar{I}}{L} + \frac{27}{32} mL^2 + \frac{9}{4} ML\right) +$$

$$+ k_2 x_2 L = 0 \quad / \cdot \frac{1}{L}$$

$$\ddot{x}_1\left(-\frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{9}{32} mL - \frac{3}{4} M\right) + \ddot{x}_2\left(\frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{27}{32} mL + \frac{9}{4} M\right) +$$

$$+ k_2 x_2 = 0$$

נרשום את המשוואות בצורה מטריציונית:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} mL & 2\frac{1}{8} mL \\ -\frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{9}{32} mL - \frac{3}{4} M & \frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{27}{32} mL + \frac{9}{4} M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ניתן כמו לעשות שינוי
קואורדינטות. אולם כאן
נוח שהמשוואות ניתנות להפוך
סימטריות.

נעביר את המערכת לצורה סימטרית. נהפוך את [k] לסימטרית
ע"י חיסור המשוואה התחתונה מהעליונה ונהפוך כאן [m]
גם תהפוך לסימטרית:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\Big)_{-1} \sim \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} mL & 2\frac{1}{8} mL \\ -\frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{9}{32} mL - \frac{3}{4} M & \frac{\bar{I}}{L^2} + \frac{27}{32} mL + \frac{9}{4} M \end{bmatrix}\Big)_{-1} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \bar{I}/L^2 + \frac{3}{4} M - \frac{13}{32} mL & -\bar{I}/L^2 - \frac{9}{4} M + 1\frac{26}{32} mL \\ -\bar{I}/L^2 + \frac{9}{32} mL - \frac{3}{4} M & \bar{I}/L^2 + \frac{27}{32} mL + \frac{9}{4} M \end{bmatrix}$$

כעת נציב $M = mL$ ו- $I = \frac{9}{32} mL^2$:

$$[m] \sim mL \begin{bmatrix} \frac{9}{32} + \frac{3}{4} - \frac{13}{32} & -\frac{9}{32} - \frac{9}{4} + 1\frac{25}{32} \\ -\frac{9}{32} + \frac{9}{32} - \frac{3}{4} & \frac{9}{32} + \frac{27}{32} + \frac{9}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= mL \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 3\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$ סימטרית

נציב $k_1 = k$ ו- $k_2 = 2k$:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 3\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{k}{mL} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נמצא תדרים עצמיים :

$$\det\left([k] - w^2 [m] \right) = \begin{vmatrix} \frac{k}{mL} - \frac{5}{8} w^2 & \frac{3}{4} w^2 \\ \frac{3}{4} w^2 & \frac{2k}{mL} - 3\frac{3}{8} w^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{k}{mL} - \frac{5}{8} w^2 \right) \left(\frac{2k}{mL} - 3\frac{3}{8} w^2 \right) - \frac{9}{16} w^4 = 0$$

$$2\left(\frac{k}{mL}\right)^2 - 3\frac{3}{8} \frac{k}{mL} w^2 - \frac{5}{8} w^2 \frac{2k}{mL} + 2\frac{7}{64} w^4 - \frac{9}{16} w^4 = 0$$

$$1\frac{35}{64} w^4 - 4\frac{5}{8} \frac{k}{mL} w^2 + 2\left(\frac{k}{mL}\right)^2 = 0$$

$$w^2_{1,2} = \frac{4\frac{5}{8}\frac{k}{mL} \pm \sqrt{\left(4\frac{5}{8}\frac{k}{mL}\right)^2 - 4 \cdot 1\frac{35}{64} \cdot 2\left(\frac{k}{mL}\right)^2}}{2 \cdot 1\frac{35}{64}} =$$

$$= \frac{k}{mL} \left(\frac{4\frac{5}{8} \pm \sqrt{9\frac{5}{64}}}{2 \cdot 1\frac{35}{64}} \right) = \begin{array}{l} \nearrow w_1^2 = 0.524 \frac{k}{mL} \\ \searrow w_2^2 = 2.465 \frac{k}{mL} \end{array}$$

[illegible]!

ווקטורים עצמיים :

$$\left(\frac{k}{mL} - \frac{5}{8}\cdot 0.524\,\frac{k}{mL}\right)u_1 + \frac{3}{4}\cdot 0.524\,\frac{k}{mL}\,u_2 = 0$$

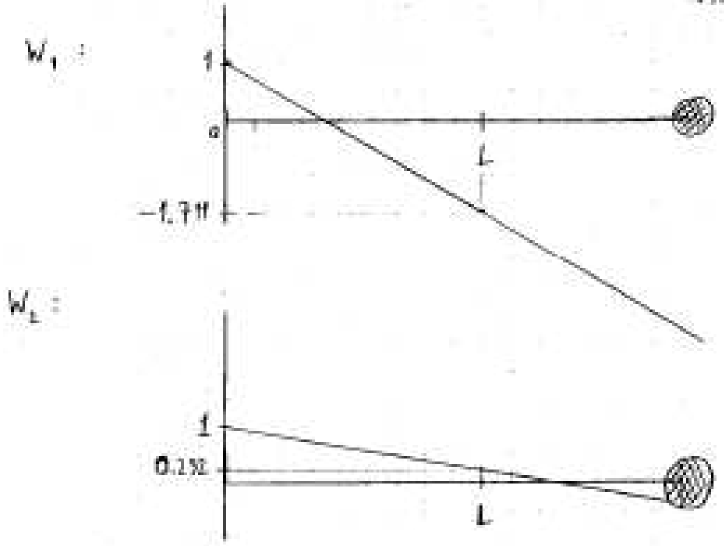
$$0.6725\,\frac{k}{mL}\,u_1 + 0.393\,\frac{k}{mL}\,u_2 = 0$$

$$u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = -1.711$$

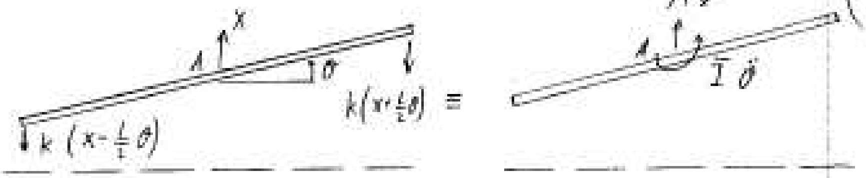
$$\left(\frac{k}{mL} - \frac{5}{8}\cdot 2.465\,\frac{k}{mL}\right)u_1 + \frac{3}{4}\cdot 2.465\,\frac{k}{mL}\,u_2 = 0$$

$$u_1 = 1 \Rightarrow u_2 = 0.232$$

[illegible] של (W_i) :



3)



$$\Sigma F_x = -k\left(x-\frac{L}{2}\theta\right) - k\left(x+\frac{L}{2}\theta\right) = M\ddot{x}$$

$$\Sigma M_A = k\left(x-\frac{L}{2}\theta\right)\cdot\frac{L}{2} - k\left(x+\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} = \bar{I}\ddot{\theta}$$

$$M\ddot{x} + 2kx = 0$$
$$\bar{I}\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad /\cdot\frac{1}{L^2}$$ [illegible]

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad /\cdot\frac{1}{M}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \frac{k}{M}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המטריצות הן אלכסוניות ולכן נקבל [illegible] וכו'
אזי אין צימוד, ולכן ישר [illegible] [illegible] [illegible] -

$$\begin{vmatrix} 2\frac{k}{M} - w^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}w^2 \end{vmatrix} = \left(2\frac{k}{M} - w^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}w^2\right) =$$

$$= \frac{1}{12}w^4 - \frac{2}{3}\frac{k}{M}w^2 + \left(\frac{k}{M}\right)^2 = 0$$

$$w_{1,2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{k}{M} \pm \sqrt{\frac{4}{9}\left(\frac{k}{M}\right)^2 - \frac{4}{12}\left(\frac{k}{M}\right)^2}}{\frac{1}{6}} = 6\frac{k}{M}\left(\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 6\frac{k}{M} \\ 2\frac{k}{M} \end{cases}$$

נציב ω_1 -

$$\left(2\frac{k}{M} - 6\frac{k}{M}\right)u_1 + 0\,u_2 = 0$$

$$0\cdot u_1 + \frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}\cdot 6\frac{k}{M} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

נציב ω_2 -

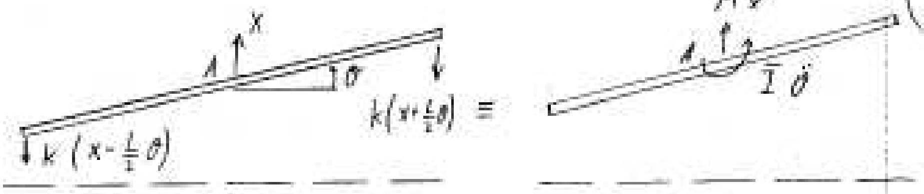
$$\left(2\frac{k}{M} - 2\frac{k}{M}\right)u_1 + 0\,u_2 = 0 \rightarrow 0=0$$

$$0\cdot u_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}\cdot 2\frac{k}{M}\right) = 0$$

לכן $\omega_1 = \sqrt{6\frac{k}{M}}$, $\underline{u} = u_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$: אופן תנודה 1

$\omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{M}}$, $\underline{u} = u_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$: ואופן תנודה 2

4)



$$\Sigma F_x = -k\left(x-\frac{L}{2}\theta\right) - k\left(x+\frac{L}{2}\theta\right) = M\ddot{x}$$

$$\Sigma M_A = k\left(x-\frac{L}{2}\theta\right)\cdot\frac{L}{2} - k\left(x+\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2} = \bar{I}\ddot{\theta}$$

$$M\ddot{x} + 2kx = 0$$

$$\bar{I}\ddot{\theta} + k\frac{L^2}{2}\theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & k\frac{L^2}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad /\cdot\frac{1}{L^2}$$ [illegible]

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{k}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad /\cdot\frac{1}{M}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{pmatrix} + \frac{k}{M}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

המטריצות הן אלכסוניות ולכן נקבל [illegible] אזי
אורתוגונליים, ולכן אין צורך [illegible] [illegible] [illegible] מודים, בדיוק =

$$\begin{vmatrix} 2\frac{k}{M} - w^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}w^2 \end{vmatrix} = \left(2\frac{k}{M} - w^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}w^2\right) =$$

$$= \frac{1}{12}w^4 - \frac{2}{3}\frac{k}{M}w^2 + \left(\frac{k}{M}\right)^2 = 0$$

$$w_{1,2} = \frac{\frac{2}{3}\frac{k}{M} \pm \sqrt{\frac{4}{9}\left(\frac{k}{M}\right)^2 - \frac{4}{12}\left(\frac{k}{M}\right)^2}}{\frac{1}{6}} = 6\frac{k}{M}\left(\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 6\frac{k}{M} \\ 2\frac{k}{M}\end{cases}$$

$$\left(2\frac{k}{M} - 6\frac{k}{M}\right) u_1 + 0\, u_2 = 0$$ עבור W_1 -

$$0 \cdot u_1 + \frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}\cdot 6\frac{k}{M} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\left(2\frac{k}{M} - 2\frac{k}{M}\right) u_1 + 0\, u_2 = 0 \rightarrow 0=0$$ עבור W_2 -

$$0 \cdot u_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{k}{M} - \frac{1}{12}\cdot 2\frac{k}{M}\right) = 0$$

$$W_1 = \sqrt{6\frac{k}{M}}\ , \quad \underline{u} = u_{11}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} : 1$$ לכן צורת תנודה

$$W_2 = \sqrt{2\frac{k}{M}}\ , \quad \underline{u} = u_{22}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} : 2$$ צורת תנודה

5) עבור הפרמטרים שהוגדרו: