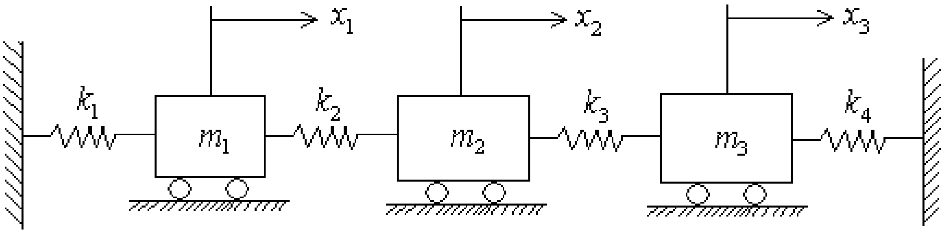
<u>תורת התנודות – גיליון תרגילים 6</u>

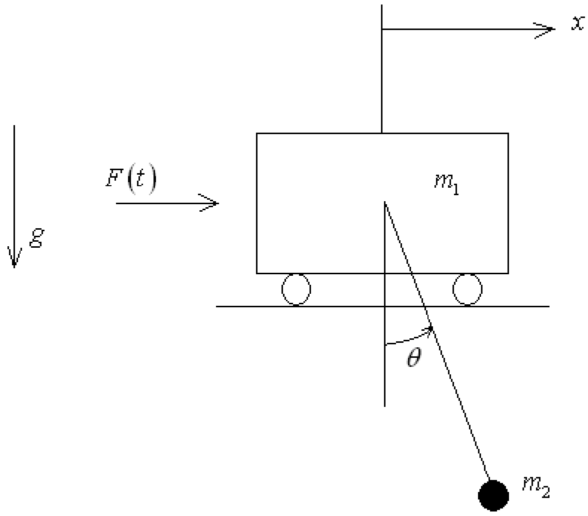
1) התייחס למערכת הנתונה באיור.



א) מצא את משוואות התנועה של המערכת.

ב) נתון כי $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = k_4 = 2k$, $m_1 = m$ ו- $m_2 = m_3 = 2m$. מצא את התדרים הטבעיים והמודי תנודה של המערכת ע״י שיטת Rayleigh quotient ושיטה נומרית Matrix iteration שנלמדה בכיתה.

2) התייחס למערכת הנתונה באיור.



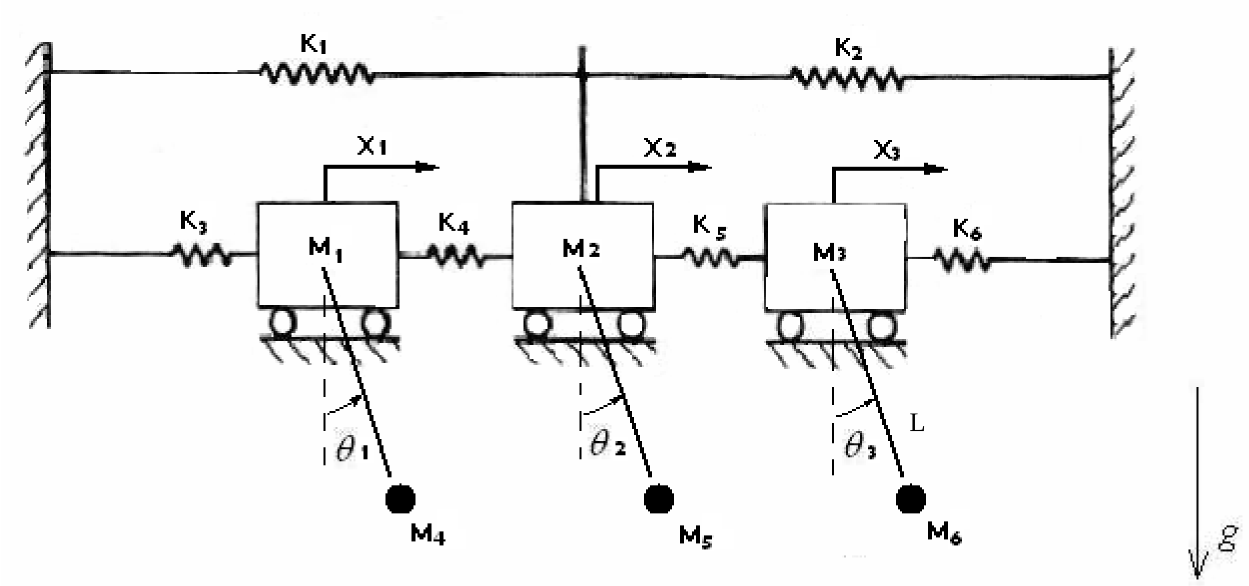
א) מצא את משוואות התנועה של המערכת.

ב) נתון כי $m_1 = m_2 = m$. מצא את התדרים הטבעיים והמודי תנודה של המערכת.

ג) נתון כי $F(t) = 0$ ותנאי ההתחלה הם : $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$, $\theta(t=0) = \theta_0$ ו- $\dot{\theta}(t=0) = \omega_0$. מצא את תנועת המערכת.

ד) נתון כי $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ ובזמן $t = 0$ המערכת נמצאת במנוחה. מצא את תנועת המערכת.

3) התייחס למערכת הנתונה באיור.



א) הנח כי:

$$k_1=k_2=2k, \quad k_3=k_4=k_5=k_6=k$$

$$m_1=m_2=m_3=2m, \quad m_4=m_5=m_6=m$$

ורשום את משוואות התנועה של המערכת בצורה מטריציונית ,כאשר וקטור ההזזות המוכללות הוא $\{x\}=\{x_1\ x_2\ x_3\ \theta_1\ \theta_2\ \theta_3\}^T$. הנח זוויות קטנות.

ב) עבור L=7, k=20, m=5, g=10 פתור באמצעות MATLAB את בעיית הע״ע המתאימה ומצא את התדרים והמודים העצמיים של המערכת.

ג) פתור את המערכת עבור ערור תחילתי הבא: $\{x_0\}=\{0.1\ 0.2\ 0.3\ 0.03\ 0\ 0.02\}^T$. ו- $\{v_0\}=\{0.5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}^T$.

לפתרון יש לצרף את הפלט הבא: קוד MATLAB עם הערות ברורות, איור של מודי התנודה של המערכת וגרפים של x vs. t (התפתחות הפתרון בזמן עבור כל דרגת החופש) עבור פרק זמן סביר.

תשובות סופיות

1) א)

$$\begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ב)

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad and \quad \{u\} = [m]^{-1/2}\{x\}, \quad respectively$$

$$\omega_1 = 1.7321\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.4472 & -0.4472 & 0.4472 \end{bmatrix}^T$$

$$\omega_2 = 1.4142\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \{u\}_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.8165 & 0 & -0.4082 \end{bmatrix}^T$$

$$\omega_3 = 0.7071\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \{u\}_3 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 0.3651 & 0.5477 & 0.3651 \end{bmatrix}^T$$

2) א)

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2L \\ m_2L & m_2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2gL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ב)

$$w_1 = 0, \quad \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2g}{L}}, \quad \{u\}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -2/L \end{bmatrix}^T$$

ג)

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(2mx_0 + mL\theta_0\right) + \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(2mv_0 + mLw_0\right)t$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2m}}mL\theta_0\cos\left(w_2t\right) - \frac{1}{\sqrt{2m}}mLw_0 \cdot \frac{1}{w_2}\sin\left(w_2t\right)$$

ד)

$$\eta_1 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\left\{-\frac{1}{w^2}\left(\sin\left(wt\right) - wt\right)\right\}$$

$$\eta_2 = \frac{F_0}{\sqrt{2m}}\left\{\frac{1}{{w_2}^2 - w^2}\left(\sin wt - \frac{w}{w_2}\sin\left(w_2t\right)\right)\right\}$$