

## О ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В двух статьях 1969 года, посвященных основам теории хрупкого разрушения, Валентин Валентинович Новожилов ввел необходимый и достаточный критерий для оценки прочности упругого тела, ослабленного разрезом, и сформулировал концепцию хрупкого разрушения. Критерий основан на учете дискретного строения тела, а процесс разрушения трактуется как потеря устойчивости упругого равновесия. Эти два факта — дискретность разрушения и потеря устойчивости в процессе деформации разрывающейся связи — лежат в основе многих явлений, которые не могли быть обнаружены в рамках механики сплошной среды. В настоящей статье кратко обсуждаются следствия учета этих фактов: неустойчивая ветвь диаграммы растяжения и захват решеткой части энергии разрушения; роль размера ячейки; излучение при квазистатическом и динамическом распространении трещин, включая структуру излучения; роль динамического фактора; нерегулярности в росте трещин; распространение трещин под действием высокочастотных волн, включая установившиеся режимы с периодически изменяющейся скоростью; трещины в континуально-дискретных моделях.

*Ключевые слова:* континуальность и дискретность; неустойчивость; континуальный предел; излучение; нерегулярности в разрушении; динамический фактор; действие волн; периодические колебания скорости; континуально-дискретные модели.

**1. Непрерывность и дискретность.** Классическая, континуальная модель упругой среды и соответствующие ей критерии прочности оказываются недостаточными для описания разрушения материала. Действительно, при наличии концентраторов типа трещин или угловых вырезов напряжения неограничены, и критерии прочности, выраженные в компонентах напряжений или деформаций, теряют силу. В теории трещин вводится энергетический критерий прочности (критерий устойчивости трещины). Критерий основан на учете поверхностной энергии или эффективной поверхностной энергии. В линейной теории разрушения часто используются так называемые критические коэффициенты интенсивности напряжений, однозначно связанные с эффективной поверхностной энергией. Таким образом, прочность определяется двумя различными критериями: энергетическим для трещин и классическим для неповрежденного материала. В рамках континуальной модели эти критерии не согласованы и могут противоречить друг другу. Так, при стандартной ситуации плотность энергии, высвобождающейся при продвижении трещины на единицу длины  $G$ , пропорциональна размеру трещины  $L$ . Непосредственно из соображений размерности следует:  $G \sim \sigma^2 L / E$ , где  $\sigma$  и  $E$  означают напряжение, которое было бы в области трещины при ее отсутствии, и модуль упругости соответственно. Критерий устойчивости трещины:  $G < G_c$ , где  $G_c$  — эффективная поверхностная энергия. Видно, что критическое значение напряжения неограниченно увеличивается при уменьшении длины трещины. Отсюда следует неправдоподобное заключение, что если трещина доста-

точно мала, то в соответствии с классическим критерием в напряжениях тело должно разрушиться в области первоначально неповрежденного материала, в то время как трещина остается неподвижной. С другой стороны, из классического критерия прочности следует, что твердое тело, ввиду неограниченности напряжений у ее края при сколь угодно малой нагрузке, не обладает прочностью при наличии любой, сколь угодно малой трещины.

Отмечая эти парадоксы, В.В. Новожилов указывает, что они разрешаются учетом дискретной природы твердого тела [1, 2]. Критерий прочности для модели сплошной среды с трещиной формулируется в терминах напряжения, осредненного по некоторой области, а именно, по размеру ячейки кристаллической атомной структуры тела. Критерий Гриффитса также вводит единицу длины в механику континуума, отражая тем самым дискретную природу тела. Применительно к трещинам критерий Новожилова по существу является силовым вариантом энергетического критерия Гриффитса. Вместе с тем, обобщенный таким образом критерий прочности является универсальным, он объединяет классический критерий, критерий Гриффитса для трещин и критерии, которые подходили бы для концентраторов другого вида, например, для угловых вырезов.

Таким образом, разрушение – дискретный процесс [2] и дискретная решетка – модель, в рамках которой целесообразно его рассматривать, по крайней мере, что касается формулировки критерия разрушения. Дискретность, однако, влечет за собой и другие следствия. В частности, дискретное продвижение трещины сопровождается динамическими эффектами, существенными даже при сколь угодно медленном ее распространении. В связи с этим, следующим шагом является использование дискретной решетки не только как источника естественной единицы длины, но и как модели упругого тела во всей области его определения (возвращаясь тем самым к первоначальному описанию упругой среды [3]). Такая модель позволяет, в принципе, найти энергию, потребляемую трещиной в зависимости от ее скорости, и другие эффекты, обусловленные дискретностью, в частности излучение, сопровождающее движение трещины. Заметим, что дискретные или дискретно-континуальные модели могут отвечать не только кристаллической решетке, но и искусственным материалам со структурой. Ниже обсуждаются некоторые аспекты использования таких моделей и основные результаты, полученные на их основе.

**2. Энергия разрушения и роль размера ячейки.** Процесс развития трещины представляется как некоторая последовательность разрывов связей, разделяющая решетку на части. Будем рассматривать множество геометрически и физически подобных решеток, для которых величины, имеющие размерность напряжения и плотности, так же как и все безразмерные величины, совпадают. Если геометрическое подобие справедливо и для решеток с трещинами, то прочность всех этих решеток одинакова. Однако если перейти к макроскопическому описанию, где используется единый линейный масштаб, последнее заключение теряет силу. Из соображений размерности следует, что энергия деформации разрывающейся связи  $G_s$ , пропорциональна кубу размера ячейки, и эффективная поверхностная энергия  $G$ , пропорциональна размеру ячейки. Так что если рассматривать материал с данной микроструктурой, то уменьшение размера ячейки, не влияющее на прочность неповрежденного материала, уменьшает его трещиностойкость. В этом смысле, можно говорить о континуальном пределе: когда размер ячейки стремится к нулю, трещиностойкость материала также стремится к нулю. В континуальной механике разрушения эффективная поверхностная энергия принимается отличной от нуля, что отражает наличие характерного размера микроструктуры материала.

Диаграмма сила – удлинение для межатомного взаимодействия имеет участок неустойчивости (см. фиг. 1 и 3 в [1] и фиг. 3 в [2]). Для искусственной решетки сила мо-

жет резко падать к нулю после достижения максимума. В обоих случаях неустойчивость, отвечающая падающей ветви диаграммы, приводит к динамическим эффектам, и полная энергия  $G_r$ , затрачиваемая на разрушение, оказывается большей:  $G_r > G_s$ . Соответственно, эффективная поверхностная энергия определяется энергией  $G_r$ , т.е. включает как энергию деформации связи (энергию межатомного взаимодействия), так и энергию колебаний, возникающих при разрыве связи. Однако, в отличие от  $G$ , отношение динамической составляющей  $G - G_0$  к статической  $G_0$  зависит лишь от скорости распространения трещины, а от размера ячейки не зависит. В этом смысле континуальный предел не существует.

**3. Излучение волн при квазистатическом росте трещины в решетке.** Существуют два способа определения полной энергии излучения. Один из них состоит в сравнении точного решения для решетки с его длинноволновым приближением, отвечающем сплошной среде. Так это сделано в первой работе по рассматриваемой теме [4]. Другой заключается в определении потока энергии от распространяющейся трещины [5, 6]. Ниже кратко рассматриваются оба способа.

Рассматриваем бесконечную, периодическую, линейно-упругую решетку, состоящую из жестких масс, соединенных безынерционными связями, и нагруженную удаленными силами. Однородная квазистатическая задача для прямолинейной полубесконечной трещины, симметричная относительно линии трещины, решается с помощью дискретного преобразования Фурье и метода Винера–Хопфа. Пусть  $u_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) – перемещения верхнего берега трещины;  $\sigma_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), – напряжения связей перед трещиной;  $m$  – порядковый номер связи; расстояние между ними принимается за единицу длины. Пусть имеется точное решение для решетки и его длинноволновая асимптотика:

$$u^F(k) = \sum_{m=-\infty}^{-1} u_m e^{ikm} \sim u_0^F(k) \quad (k \rightarrow 0)$$

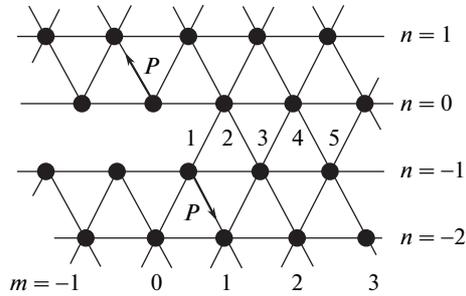
$$\sigma^F(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u \sigma_m e^{ikm} \sim \sigma_0^F(k) \quad (k \rightarrow 0)$$

Тогда (см., например, (1.42) в [7])

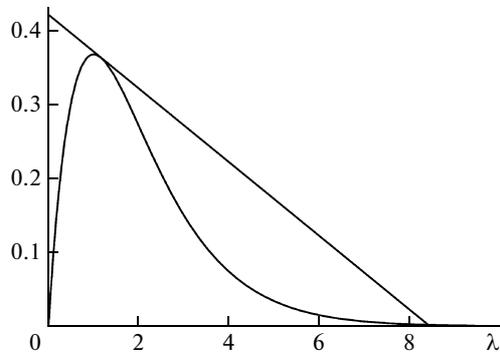
$$G = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \sigma_0^F(is) u_0^F(-is); \quad G_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \sigma^F(is) u^F(-is) \quad (3.1)$$

Оказывается, что  $G > G_0$ . Например, для квадратной решетки  $G_0/G = \sqrt{2} - 1$ . Разница между полной потерянной энергией и предельной энергией связи  $G - G_0$  соответствует энергии колебаний, возникающих при разрыве связи. Колебания затем рассеиваются в решетке.

Другой способ локальный. Он, в принципе, применим для произвольной решетки с нелинейно-упругими связями. Как отметил В.В. Новожилов, разрушение представляет собой потерю устойчивости упругого равновесия [2]. Неустойчивость влечет за собой возникновение колебаний, энергия которых и определяется ниже. Рассмотрим решетку  $R$  нагруженную некоторой системой сил  $P_j = \alpha p_j$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ), где  $\alpha$  – параметр. Решетка может содержать трещину(ы). Пусть  $A$  – первая из связей, разрушающаяся при некотором критическом значении  $\alpha$ . Решетку без этой связи обозначим как  $R_A$ . Пусть  $\lambda$  и  $\theta$  – удлинение связи  $A$  и увеличение расстояния между соответствующими связи  $A$  узлами решетки  $R_A$ . Обозначим через  $Q$  и  $P$  самоуравновешенные пары сил, растягивающие связь  $A$  и увеличивающие  $\theta$ , соответственно. Имеем  $Q = Q(\lambda)$ ,  $\theta = \theta(\alpha, P)$ . Первая из этих диаграмм состоит из возрастающей и ниспадающей ветвей. Вторую будем полагать линейной функцией своих аргументов:  $\theta = \alpha a + bP$ , где  $a$  и  $b$  – положительные постоянные. При росте параметра внешней нагрузки  $\alpha$  до тех пор, пока деформация решетки  $R$ , т.е. решетки, включающая связь  $A$ , устойчива,  $\theta = \lambda$ ,  $P = -Q$ . В этих условиях равновесия первая вариация потенциальной энергии  $U$  при вариации  $\lambda$  ( $\theta = \lambda$ ) равна нулю. Устойчивость определяется второй вариацией:



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\delta_2 U = (dQ/d\lambda + dP/d\theta)(\delta\lambda)^2 = (dQ/d\lambda + 1/b)(\delta\lambda)^2$$

Таким образом, деформация устойчива до тех пор, пока  $dQ/d\lambda > -1/b$ . При дальнейшем увеличении нагрузки (при дальнейшем увеличении параметра  $\alpha$ ) последнее неравенство меняется на обратное, равновесие становится неустойчивым и дальнейшая деформация связи  $A$  протекает динамически, независимо от квазистатического роста внешней нагрузки. Пусть  $\delta_2 U = 0$  при  $\lambda = \lambda_c$  и податливость решетки  $R_A$  достаточно большая. Тогда энергия, рассеивающаяся в решетке  $R_A$  и называемая в литературе lattice trapping, определяется следующим образом

$$U_t = \frac{1}{2} Q(\lambda_c)(\theta_{\max} - \lambda_c) - \int_{\lambda_c}^{\lambda_{\max}} Q(\lambda) d\lambda, \quad \theta_{\max} = (\lambda_c + bQ_c, \quad Q_c) = Q(\lambda_c), \quad Q(\lambda_{\max}) = 0$$

Итак, если диаграмма сила-удлинение для связи известна, для определения энергии  $U_t$  необходимо найти параметр  $b$  – податливость решетки  $R_A$ . Применительно к периодической треугольной решетке задача определения податливости решетки без нулевой связи отображена на фиг. 1. Диаграмма  $Q(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$  (здесь переменные – безразмерные), использованная Новожиловым [2], и критическая зависимость для  $P(\lambda)$  при  $b = 20$  показаны на фиг. 2. Здесь  $Q_{\max} = 1/e \approx 0.36788$ ,  $Q(\lambda_c) \approx 0.363674$ ,  $U_t \approx 0.6452$ ,  $G_s = 1$ .

Оба фактора, дискретность среды и неустойчивость, возникающая в процессе разрушения связи, отмеченные в 1969 г. в статьях Новожилова [1, 2], играют решающую роль в формировании излучения. С тех пор, начиная, по-видимому, с 1971 г. [7], публикуется масса статей, в которых, главным образом численно, определяется lattice trapping для разных материалов и различных условий разрушения. Роль этого фактора на процесс разрушения велика. Она проявляется не только в увеличении энергии разрушения, которое может быть и относительно малым, но и во влиянии на скорость и траекторию трещины. Многогранная роль динамических эффектов, обусловленных дискретностью и неустойчивостью, обсуждается ниже.

**4. Излучение при динамическом распространении трещины.** Первый из обсуждаемых способов формально сохраняется и для динамики с той разницей, что вместо дискретного используется непрерывное преобразование Фурье, а мощность излучения оказывается существенно зависящей от скорости трещины. Рассматриваем стационарное динамическое состояние. Оно характеризуется соотношением  $u_{m+1,n}(t) = u_{m,n}(t - 1/\nu)$ , где  $t$  и  $\nu$  время и скорость трещины, или подобным соотношением для удлинения связей (в задаче II для треугольной решетки, где трещина растет под действием продольного сдвига, знаки удлинений чередуются). В этом случае непрерывное преобразование Фурье по  $\eta$  ( $\eta = m - \nu t$ ) для любого  $m$  (что по существу эквивалентно преобразованию по времени) и последующее использование метода Винера-Хопфа оказывается достаточным для аналитического решения задачи. Формулы (3.1) для сравнения точного решения с его длинноволновой асимптотикой (определяющей полный поток энергии к краю трещины) с заменой дискретного преобразования по  $m$  на непрерывное по  $\eta$  остаются справедливыми.

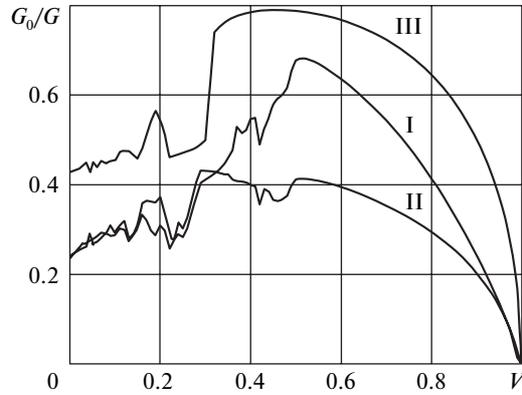
Следующие друг за другом разрывы связей на фронте движущейся трещины приводят к непрерывному излучению. В общем случае часть энергии излучения распространяется в виде волн, локализованных у берегов трещины. Это “решетчатые” волны Релея, другая часть уходит вглубь решетки. Непосредственное определение излучения (второй способ) производится следующим образом. В плоской задаче локализованные волны определяются полюсами Фурье-образа решения. Для определения мощности излучения, уходящего вглубь решетки, рассмотрим связь, соединяющую узлы решетки  $(m, n)$  и  $(m, n + 1)$ , и найдем суммарный поток энергии  $N_t$ , проходящей через эту связь в виде волн ненулевой частоты. Имеем

$$N_t = \int_{-\infty}^{\infty} P \frac{du_{m,n+1}}{d\eta} d\eta = k \int_{-\infty}^{\infty} (u_{m,n} - u_{m,n+1}) \frac{du_{m,n}}{dt} dt = -K \int_{-\infty}^{\infty} (u_{m,n} - u_{m,n+1}) \frac{du_{m,n}}{d\eta} d\eta$$

где  $P$  – сила, действующая на узел  $(m, n + 1)$  со стороны узла  $(m, n)$ ,  $K$  – жесткость связи. Используя равенство Парсеваля, находим

$$\begin{aligned} N_t &= -K \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{m,n}^F(k) - u_{m,n+1}^F(k)] \overline{u_{m,n+1}^F(k)} k dk = \\ &= -K \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{\zeta(k)} - |\zeta(k)|^2] |\zeta(k)|^{2n} |u_{m,0}^F(k)|^2 k dk, \quad \zeta(k) = u_{m,n+1}^F(k)/u_{m,n}^F(k) \end{aligned}$$

Имеется в виду, что сингулярная точка  $k = 0$  исключена из области интегрирования. Вещественные части выписанных здесь функций – четные функции  $k$ , а мнимые – нечетные, поэтому только те отрезки интегрирования, где мнимая часть  $\zeta(k)$  отлична от нуля, будут давать вклад в интеграл. Но в этом случае  $|\zeta(k)| = 1$  и, следовательно



Фиг. 3

$$N_t = K \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{K}} |u_{m,0}^F(k)|^2 \mathcal{T} \zeta(k) k dk$$

где  $K$  – множество отрезков, на которых  $|\zeta(k)| = 1$  (исключая точку  $k = 0$ ). В связи с этим равенством отметим, что решение задачи о трещине выбирается с условием  $|\zeta| \leq 1$ . При этом неравенство соответствует локализованной волне, интеграл стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ , а равенство для любого вещественного  $k$  соответствует синусоидальной комплексной волне вида

$$u^0 = \exp[i(\omega(k)t - km - qn)], \quad q = -\arg \zeta(k), \quad \omega(k) = kv$$

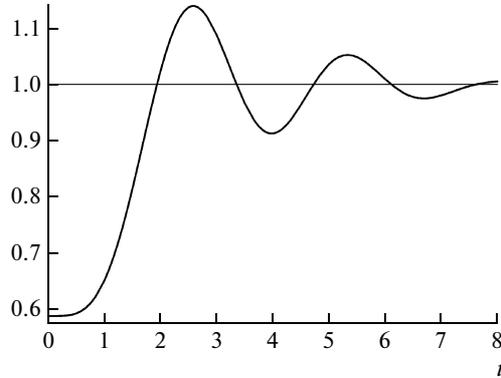
Это и следовало ожидать, так как только такие волны могут уносить энергию вглубь решетки. Скорость этих волн  $\omega/k$  вдоль оси  $m$  в данном случае совпадает со скоростью трещины. Поэтому для любого данного  $v$  параметр  $q$  определяется дисперсионным соотношением как  $q = q(k)$ .

Такой способ определения энергии, излучаемой вглубь решетки, использован в [5], где рассматривалась динамика трещины в решетке со слоем легких масс, а также в [6] для случая однородной решетки. Наиболее детальное описание аналитических методов и результатов в динамике трещин в решетках можно найти в [8]. Отношение  $G_0/G$  как функция скорости трещины для всех трех мод разрушения (мода I: треугольная решетка,  $V = v/c_R$ ; мода II: треугольная решетка,  $V = v/c_R$ ; мода III: квадратная решетка,  $V = v/c_2$ ) показаны на фиг. 3.

**5. Структура излучения.** Итак,  $u_n^F(k) = u_0^F(k) \exp[-iq(k)n]$  и

$$u_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^F(k) \exp[-i(km + q(k)n)] dk$$

Дальнее поле излучения может быть найдено отсюда с помощью метода стационарной фазы. В частности, волновые числа волн, амплитуды которых убывают обратно пропорционально корню квадратному из расстояния, определяются равенством  $(dq(k))/dk = -m/n$  для того диапазона отношения  $m/n$ , для которого это равенство существует при реальных  $k$ , и при условии, что  $d^2q(k)/dk^2 \neq 0$ . Если последнее неравенство при некотором отношении  $-m/n$  не выполняется, то в данном направлении ам-



Фиг. 4

плитуда волны убывает медленнее, а именно, как расстояние в степени  $-1/3$  (если при этом  $d^3q(k)/dk^3 \neq 0$ ). Это направление оказывается доминирующим. Именно так происходит в случае простейших квадратной и треугольной решеток [6].

Для квадратной решетки

$$q(k) = \arccos(M(k)), \quad M(k) = 2 - \cos k - k^2 v^2 / (2c_2^2)$$

Диапазон  $K$ , в котором  $q(k)$  – величина вещественная определяется так (он соответствует диапазону  $-1 \leq M(k) \leq 1$ )

$$k_- \leq k \leq k_+, \quad M(k_-) = 1, \quad M(k_+) = -1.$$

Заметим, что при достаточно большой скорости трещины существует лишь один такой диапазон, но при уменьшении скорости их число увеличивается. Можно увидеть, что внутри этого отрезка имеется точка  $k = k_*$ , положение которой зависит от  $v$ , где  $d^2q(k)/dk^2 = 0$ . Подобные доминантные направления, вдоль которых амплитуда излучения убывает обратно пропорционально расстоянию в степени  $1/3$ , существуют и в случае треугольной решетки. Более подробно структура излучения обсуждается в [6].

**6. Динамический фактор.** Превышение динамических деформаций над статическими и излучение при динамическом нагружении играют существенную роль во многих процессах. Так, при внезапном приложении самоуравновешенной нагрузки к линейно-упругому телу половина энергии, ее статическая часть, остается вблизи области нагрузки (в соответствии с принципом Сен-Венана), а половина излучается [9]. Как показано в [10], динамический фактор играет решающую роль в скорости распространения трещин или фазовых переходов. Он также существенно влияет на устойчивость ее прямолинейного распространения [11].

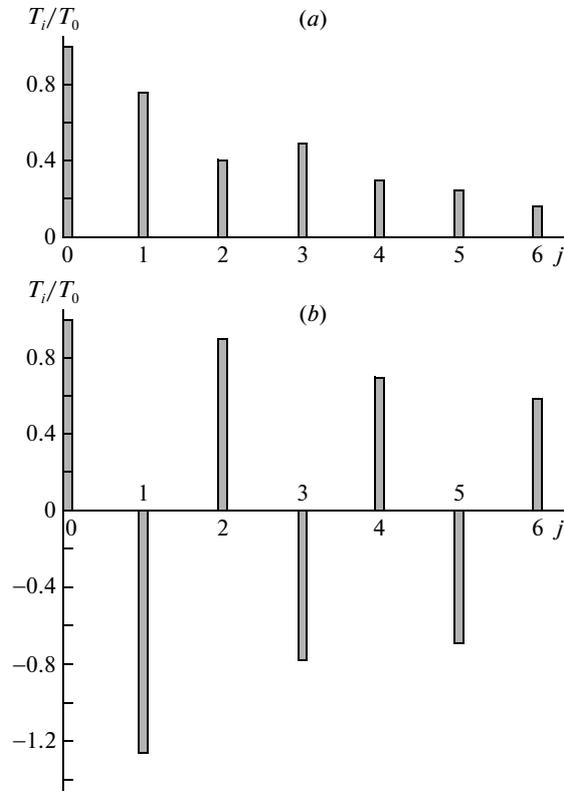
Почему трещина в хрупком теле не может развиваться медленно? При внезапном разрыве связи на фронте трещины в решетке динамические возмущения в форме некоторой волны догружают соседние связи до критического уровня в течение времени, определяемого скоростью волны и начальной деформацией. В этом смысле разрыв связи эквивалентен внезапному приложению самоуравновешенной пары сил к узлам решетки, которые соединялись этой связью, как показано на фиг. 1. Применительно к квадратной решетке (мода III), изменение напряжения последующей связи (связи 1) под действием этих сил, отнесенное к статическому (критическому) напряжению, как функция от безразмерного времени  $c_2 t/a$  показано на фиг. 4. Видно, что за время  $t \approx T = 2a/c_2$  напряжение достигает критического значения. Это означает, что трещина не

может расти медленно. Указанное время  $T$  должно быть примерно равно интервалу между разрывом соседних связей, и следовательно минимальная скорость трещины в решетке должна составлять около половины скорости длинных сдвиговых волн. Таким образом, ветви диаграмм на фиг. 3, соответствующие малым скоростям, не имеют смысла для стандартных условий хрупкого разрушения [11]. Они, однако, могут оказаться реальными в некоторых особых случаях, например, при анализе динамического резания или в случае, если критическая величина напряжения зависит от времени его действия, т.е. в случае запаздывающего разрушения.

Различные аспекты проявления динамического фактора в следствие учета дискретности, более подробно обсуждаются в [8, 10]. Там, в частности, определяются влияние параметров стандартной вязкоупругости на динамический фактор и находятся области на плоскости этих параметров, где динамичность не проявляется, т.е. где динамическое нагружение не приводит к перегрузке. В случае вязкоупругого материала, параметры которого содержатся в такой области, трещина может развиваться медленно [8, 12]. В механике разрушения непрерывного вязкоупругого материала возникает парадокс: из-за неограниченности скорости деформации у края движущейся трещины она не может преодолеть вязкое сопротивление. Поэтому обычно вводится некоторая зона сцепления берегов трещины. Дискретная модель позволяет разрешить этот парадокс без дополнительных предположений [12] (можно сказать, что решетка состоит из зон сцепления). Внезапный разрыв может вызвать перегрузку не только последующей, но и других соседних связей. В результате прямолинейное распространение трещины становится невозможным. Это действительно происходит при больших ее скоростях [11], поэтому соответствующие устойчивые ветви диаграмм, показанных на фиг. 3, реализуются лишь при специальных условиях, например, при пониженной прочности связей на линии трещины.

**7. Нерегулярности в распространении трещин.** Дискретность приводит и ко многим другим эффектам, которые не проявляются в модели сплошной среды. Рассмотрим трещину продольного сдвига (мода II). Модель сплошной среды определяет монотонную асимптотику напряжений у края трещины на ее продолжении. Можно было бы предположить, что в дискретной модели наиболее напряженной будет первая неразрушенная связь на фронте трещины. Это так для мод I и III, но не для моды II для треугольной решетки [8, 13].

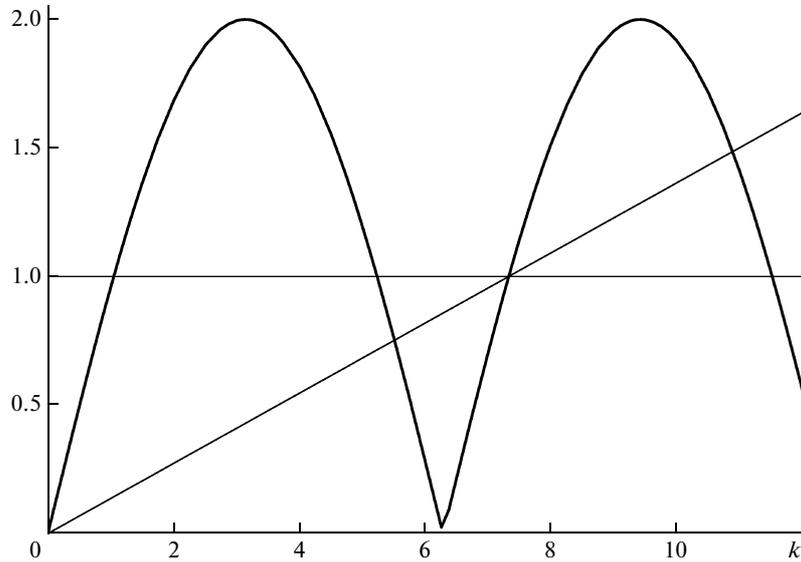
Действительно, в последнем случае растяжение и сжатие связей на линии трещины чередуются. При удаленных внешних силах квазистатическое продвижение трещины не меняет величину напряжений в связи на ее фронте, чередуются лишь знаки напряжений. Предположим, что в данный момент такая связь (нулевая связь) растянута. Ее разрыв, как уже обсуждалось, эквивалентен приложению самоуравновешенной пары сил к узлам решетки, которые она соединяла (фиг. 1), независимо от того, рассматривается мода I или II. Эти силы добавляют растяжение к исходному состоянию последующей связи (состоянию первой связи до разрыва нулевой). Так как она была сжата, сжатие уменьшается. С другой стороны, напряжение в этой связи после разрыва нулевой такое же по величине и противоположное по знаку. Следовательно, в исходном состоянии сжимающее напряжение в первой связи превышает по величине растягивающее напряжение в нулевой связи, т.е. максимально напряжена не связь на фронте трещины, а следующая (точнее, следующая связь напряжена сильнее). Аналитическое решение этой квазистатической задачи показывает, что отношение напряжений в следующей перед фронтом связи к напряжению в связи во фронте равно  $-1.25$ . Распределение напряжений в нескольких первых связях для мод I и II показано на фиг. 5 ((a) мода I — трещина нормального разрыва, (b) мода II — трещина продольного сдвига). Аналогичные рассуждения справедливы и в противоположном случае, когда в исходном положении фронтовая связь сжата. Если предположить, что прочность связи на



Фиг. 5

сжатие превышает прочность на растяжение настолько, что первой разрушится нулевая связь, то после этого вторая связь окажется растянутой больше, чем сжата первая, и следовательно она разрушится прежде связи во фронте. Таким образом, регулярное развитие трещины, при котором связи рвутся одна за другой в порядке их расположения, невозможно. В динамике это может приводить к формированию сдвоенной трещины (binary crack). Разрывы связей одного направления распространяются со скоростью отличной от скорости разрывов связей другого направления.

**8. Распространение трещины под действием высокочастотных волн.** Еще одной особенностью дискретной решетки является возможность равномерного распространения трещины под действием синусоидальных волн. Такой процесс возможен при условии, что групповая скорость волны превосходит фазовую скорость (в однородной сплошной среде эти скорости совпадают). Эта задача для однородной решетки рассмотрена в [14], где, в частности, показано, что в дискретной решетке трещина может распространяться со сверхзвуковой скоростью. Распространение трещины в решетке со слоем легких масс изучено в [5]. Отличительной особенностью равномерного распространения трещины под действием синусоидальной волны является независимость (в линейном приближении) скорости распространения трещины от амплитуды волны (если, конечно, последняя достаточно велика для разрушения). От амплитуды зависит лишь фаза волны, при которой происходит разрушение связи. Типичная диаграмма для стационарной задачи о трещине, распространяющейся под действием си-



Фиг. 6

нусоидальной волны, представлена на фиг. 6, где изображены волновые числа и скорость трещины для периодической дисперсионной зависимости  $\omega = 2|\cos k/2|$ . Частота падающей волны  $\omega = 1$ , фазовая скорость трещины  $v = \omega/k \approx 1/7.330 \approx 0.1364$ . Другие две точки пересечения прямой  $\omega = vk$  с дисперсионной кривой соответствуют волновым числам и частотам отраженных волн, имеющих ту же самую фазовую скорость.

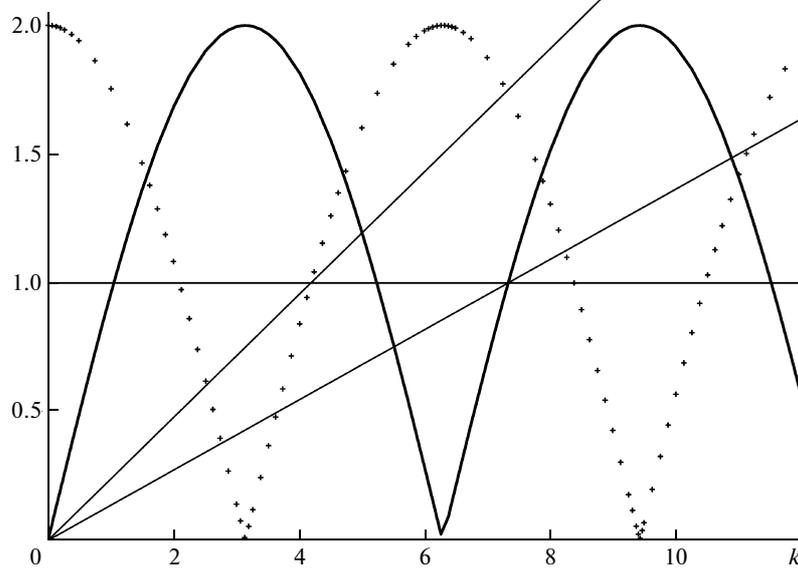
Как уже отмечалось, в динамической стационарной задаче при  $v > 0$  перемещения узлов дискретной решетки представляются с помощью непрерывного преобразования Фурье. В частности, на линии трещины ( $n = 0$ )

$$u(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(k) e^{-ik\eta} dk, \quad \eta = m - vt$$

Видно, что частота элементарной волны  $\exp[i(kvt - km)]$ , равна  $\omega = kv$ . Для волн, распространяющихся вдоль оси  $m$ , в частности, для падающей волны, движущей трещину, имеем  $\omega(k) = kv$  ( $-\infty < k < \infty$ ).

Итак, все такие волны имеют одну и ту же фазовую скорость, совпадающую со скоростью трещины, т.е. соответствуют точкам пересечения дисперсионной диаграммы лучом  $\omega = vk$ , где  $v$  – скорость трещины. Для падающей волны, кроме того, необходимым является энергетическое условие  $v_g > v$ , где  $v_g$  групповая скорость. На фиг. 6 видно, что показанному там лучу при принятой частоте падающей волны соответствует наибольшая скорость, удовлетворяющая данному условию. Заметим, что для описания волны в дискретной системе достаточно конечного интервала на оси  $k$ , в данном случае размером в  $2\pi$ :  $-\pi < k \leq \pi$ . Однако, для волнового числа, находящегося в этом диапазоне и удовлетворяющего приведенному выше уравнению,  $v_g < v$ .

Численное моделирование [5] показало, что в некотором диапазоне амплитуд падающей волны стационарный режим существует и соответствует аналитическому решению. Однако, при дальнейшем увеличении амплитуды возникают периодические ре-



Фиг. 7

жимы, в которых скорость трещины колеблется. Число частиц (узлов решетки), вовлеченных в период, зависит от амплитуды, увеличиваясь дискретно по мере ее роста. Рассмотрим такой режим на примере одномерной дискретной цепочки, подобно тому, как это сделано в [15]. Разобьем цепочку на группы по  $n$  частиц в каждой. Обозначим  $q$  – номер группы,  $p$  – номер частицы в группе. В этом случае, условие периодичности  $u_{m+1}(t) = u_m(t - 1/v)$  заменяется на подобное условие для родственных частиц, т.е. частиц с тем же номером  $p$ :  $u_{p,q+1}(t) = u_{p,q}(t - n/v)$ , где  $v$  – средняя скорость,  $p = 1, 2, \dots, n$ . Например, для простой цепочки с уравнением

$$d^2 u_m(t)/dt^2 = u_{m+1}(t) + u_{m-1}(t) - 2u_m(t)$$

для  $n = 2$  получаем

$$\begin{aligned} (2 - \omega^2)u_{1,q} - (1 + e^{2ik})u_{2,q} &= 0 \\ -(1 + e^{-2ik})u_{1,q} + (2 - \omega^2)u_{2,q} &= 0, \quad u_{p,q+1} = u_{p,q}e^{-2ik} \end{aligned}$$

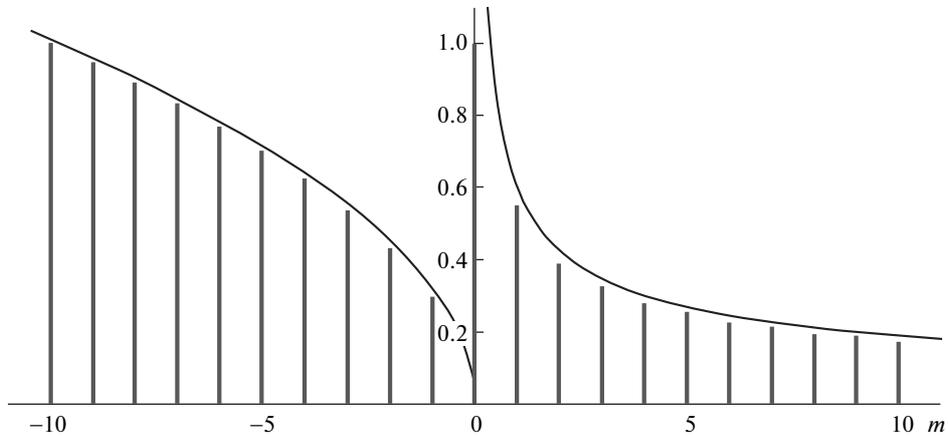
Отсюда, для первого квадранта плоскости  $(\omega, k)$  следуют дисперсионные зависимости

$$\omega = \omega_1 = 2|\sin k/2|, \quad \omega = \omega_2 = 2|\cos k/2|.$$

Эти зависимости, графики которых отличаются лишь сдвигом по оси  $k$ , показаны на фиг. 7 сплошной кривой и точками соответственно. Второй из них,  $\omega = \omega_2$ , соответствует большая средняя скорость:

$$v_2 = \omega/(k - \pi) \approx 0.2383 > v_1 = \omega/k \approx 0.1364$$

где  $k \approx 7.330$  – соответствует падающей волне в стационарном случае, т.е. уравнению  $\omega = \omega_1$ , а  $k - \pi$  соответствует уравнению  $\omega = \omega_2$ . Что же касается локальных скоростей, то они принимают в данном случае два чередующихся значения. Меньшая скорость совпадает с  $v_1$ , а большая равна  $\omega/(k - 2\pi)$ . Последнее волновое число соответствует основному диапазону, где фазовая скорость больше групповой. Тем не менее, такой

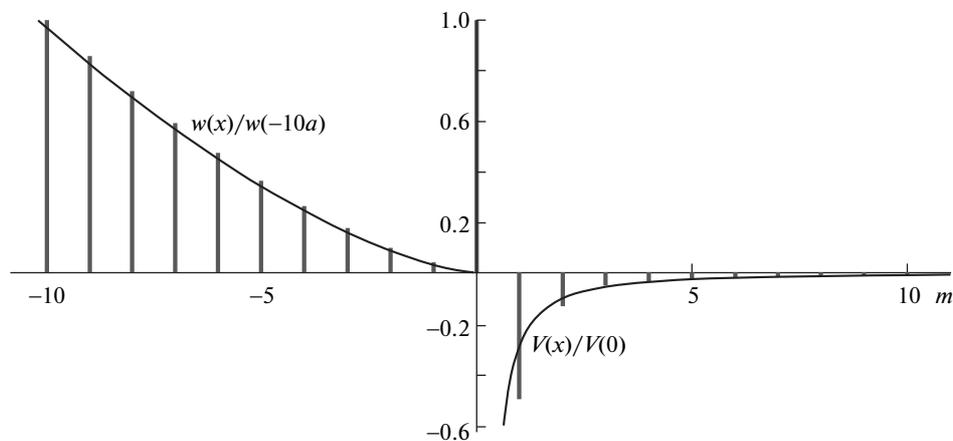


Фиг. 8

режим осуществим, так как энергетическое условие является необходимым только для средней скорости. Локальные фазовые скорости могут превышать групповую (последняя при периодическом продолжении диаграммы не меняется). Зависимости для произвольного значения  $n$  указаны в [15], где также показано, что подобный анализ приводит к результатам, совпадающим с численными.

**9. Дискретно-континуально решетка.** Аналитические методы, используемые при анализе смешанных задач для дискретной решетки, применимы и для некоторых конструкций в виде решетки из упругих балок. Статическая задача о трещине в подобной двумерной квадратной решетке исследована в [16]. Рассматривается решетка с полубесконечной трещиной, нагруженная удаленными изгибающими моментами так, что в линейном приближении в связях возникают изгибающие моменты; растягивающие силы отсутствуют. Соответствующее длинноволновое приближение подчиняется уравнению, справедливому для некоторой анизотропной пластины  $\partial^4 w / \partial x^4 + \partial^4 w / \partial y^4 = 0$ , где  $x, y$  – прямоугольные координаты в ее плоскости. Это уравнение не инвариантно относительно поворота осей координат. Изгибная жесткость в этой модели пластины определяется расстоянием от начала координат на плоскости  $(x, y)$  до единичного квадратного контура с центром в начале и с вершинами на осях.) Исследуются симметричная и антисимметричная задачи. В первой берега трещины поворачиваются в противоположные стороны; нормальные смещения симметричны. Решение содержит стандартные особенности типа квадратного корня. В антисимметричной задаче нормальные перемещения берегов трещины противоположны. В этом случае длинноволновое приближение содержит более сильную особенность как обобщенную производную от той, что имеет место в симметричной задаче.

Распределения силовых (справа) и соответствующих им кинематических величин представлены на фиг. 8 и 9, где также кривыми линиями показаны графики, отвечающие длинноволновым приближениям для этих двух задач. На фиг. 8 представлены распределения изгибающих моментов в связях впереди трещины ( $m \geq 0$ ) и соответствующих им углов поворота ее берегов ( $m \leq -1$ ) – для осесимметричной задачи. На рис. 9 представлены распределения перерезывающих сил в связях впереди трещины ( $m \geq 0$ ) и соответствующих нормальных перемещений ее берегов ( $m \leq -1$ ) – для антисимметричной задачи. В последней максимальные изгибающие моменты в связях впереди трещины распределены так же, как и перерезывающие силы:  $M = Va/2$ . В случае сим-



Фиг. 9

метричной задачи распределение напряжений по существу, такое же, как и для решетки, связи которой не сопротивляются изгибу. Антисимметричная задача приводит, однако, к принципиально иным результатам. В последнем случае оказывается, что только одна связь, та что находится на фронте трещины, сопротивляется ее продвижению, а реакции остальных связей впереди трещины лишь догружают первую. Это приводит к резкому увеличению динамической составляющей энергии разрушения. Так, для симметричной задачи отношение предельной энергии деформации связи к полной энергии, теряемой при ее разрушении, равно  $R_1 \approx 0.3216$ , что близко к результату для простой решетки, рассмотренной выше. То же по смыслу отношение для антисимметричной задачи равно  $R_2 \approx 0.0280$ , т.е. энергия излучения при квазистатическом продвижении трещины почти в 35 раз больше собственно энергии разрушения связи. Кажется, это наиболее впечатляющий результат, демонстрирующий роль дискретности и неустойчивости.

**10. Фазовые переходы.** Роль дискретности и неустойчивости, показанная В.В. Новожиловым в его статьях по механике разрушения [1, 2], не менее ярко проявляется и в механике фазовых переходов. Разрушение можно также трактовать как некоторый фазовый переход [17]. В частности, использование дискретных моделей позволяет определить излучение, которым сопровождается переход, разрешить некоторые парадоксы, возникающие при рассмотрении фазовых переходов в рамках модели сплошной среды, и показать, как излучение позволяет преодолеть энергетические барьеры. По-видимому, первой работой, где подобный переход рассматривался аналитически для волны в бистабильной цепочке, была статья [18], где изучался динамический процесс частичного разрушения при сжатии. Опубликовано довольно много работ в этой области (см., например, [19, 20] и указанную там литературу).

В заключение автор выражает благодарность Р.В. Гольдштейну за приглашение рассказать на семинаре в Институте Проблем Механики РАН о первых работах автора в дискретной механике разрушения и за предложение прислать статью в выпуск журнала, посвященный 100-летию со дня рождения Валентина Валентиновича Новожилова, общение с которым столь много для меня значило.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. № 2. С. 212–222.
2. Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах. ПММ. 1969. Т. 33. № 5. С. 797–812.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
4. Слепян Л.И. Динамика трещины в решетке // Докл. АН СССР. 1981. Т. 253. № 3. С. 561–564.
5. Mishuris G.S., Movchan A.B., Slepyan L.I. Localised knife waves in a structured interface // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57. 1958–1979. DOI: 10.1016/j.jmps.2009.08.004.
6. Slepyan L.I. Wave radiation in lattice fracture // Acoustical Physics. 2010. № 6.
7. Thompson R., Hsieh C., Rana V. Lattice trapping of fracture cracks // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. № 8. 3154–3160.
8. Slepyan L.I. Models and Phenomena in Fracture Mechanics. Berlin. Springer, 2002. 576 p.
9. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен–Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. С. 261–281.
10. Slepyan L.I. Dynamic Factor in Impact. Phase Transition and Fracture // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. 927–960.
11. Marder M., Gross S. Origin of crack tip instabilities // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43. 1–48.
12. Slepyan L.I., Auzenberg-Stepanenko M.V., Dempsey J.P. A lattice model for viscoelastic fracture. Mech. Time-Dependent Materials. 1999. № 2. P. 159–203.
13. Slepyan L.I., Auzenberg-Stepanenko M.V. Some surprising phenomena in weak– bond fracture of a triangular lattice // J. Mech. Phys. Solids. 2002. V. 50. P. 1591–1625.
14. Слепян Л.И. Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 3. С. 566–569.
15. Slepyan L.I., Mishuris G.S., Movchan A.B. Crack in a lattice waveguide. // Int J. Fract. 2009. № 1–2. P. 91–106. DOI 10.1007/s10704–009–9389–5.
16. Ruvkin M., Slepyan L. Crack in a 2D bending beam lattice: analytical solutions for two fracture modes // J. Mech. Phys. Solids. 2010. V. 58. 902–917. DOI: 10.1016/j.jmps.2010.03.006.
17. Truskinovsky L. Fracture as a phase transition. In: Batra. R.C., Beatty. M.F. (Eds.). Contemporary research in the mechanics and mathematics of materials. A collection of papers dedicated to the 69th birthday of J. Erickson. CIMNE. Barcelona. 1996. P. 322–332.
18. Слепян Л.И., Троянкина Л.В. Волна разрушения в цепочке // ПМТФ. 1984. № 6. С. 128–134.
19. Kresse O., Truskinovsky L. Mobility of lattice defects: discrete and continuum approaches // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 58. 1305–1332.
20. Vainchtein A. The role of spinodal region in the kinetics of lattice phase transitions // J. Mech. Phys. Solids. 2010. V. 58. P. 227–240.