(ב) הוכחה ה converse :

נראה רק שקיים מפעיל יונטרי, כפונקציה מפעילים שמוסיף auilliary ומבצע פעולה יונטרית כללית.

ההוכחה לעקרה הכללי הם שקולה ולכן מוסיפה לאינטואיציה [Barnum et al 1996].

נסמן ב: $\Omega_a \in \Delta(\mathcal{H}_{2^{nR}})$ את ה m.d המתאים לכל מקודד המצב $|a\rangle$ של A_n, כפונקציה

$$\Omega_a = E(|a\rangle) \in \Delta(\mathcal{H}_{2^{nR}})$$

נשים לב שבנוסף $\dim(\Omega_a) \le 2^{nR}$.

המפעיל היונטרי:

$$\omega_a = D(\Omega_a) = U\Big(\Omega_a \otimes \underbrace{|0_{rem}\rangle\langle 0_{rem}|}_{\text{מ"מ } 1}\Big)U^+$$

עבור U כלשהו.

נשים לב שמתקיים $\dim(\omega_a) = \dim(\Omega_a) \le 2^{nR}$, ובמו כן קיים תת מ"מ Λ של $\mathcal{H}_d^{\otimes n}$ ממימד 2^{nR} כך ש:

$$\text{support}(\omega_a) \subseteq \Lambda \quad \forall |a\rangle \in A_n$$
$$\dim(\Lambda) = 2^{nR}$$

לכן ל ω_a יש בסיס אל $\{|\xi_1^a\rangle, \dots |\xi_{2^{nR}}^a\rangle\}$ בתוך התת מ"מ Λ. מכאן:

$$\omega_a = \sum_{j=1}^{2^{nR}} q_j^{(a)} |\xi_j^a\rangle\langle\xi_j^a| \qquad q_j^{(a)} \ge 0 \quad \sum q_j^{(a)} = 1$$

ה Fidelity למצב $|a\rangle$:

$$F(|a\rangle, \omega_a) = \langle a|\omega_a|a\rangle = \sum_{j=1}^{2^{nR}} q_j^{(a)} \langle a|\xi_j^a\rangle\langle\xi_j^a|a\rangle =$$

$$\le \sum_j \langle\xi_j^a|a\rangle\langle a|\xi_j^a\rangle$$

$$= \sum_j \langle \xi_j^a | P_a | \xi_j^a \rangle = \sum_j tr\left(P_a |\xi_j^a\rangle\langle \xi_j^a|\right) =$$

$$= tr(P_a \cdot P_\Lambda)$$

כאשר: P_a הוא אופרטור ההיטל על $|a\rangle$

P_Λ הוא אופרטור ההיטל על תת Λ.

מאחר ה Fidelity של סכומי הקידוד חסום ע"י:

$$F = \sum_{(p_a,|a\rangle)\in A_n} p_a \langle a|\omega_a|a\rangle \le \sum_{A_n^\varepsilon} p_a tr(P_a \cdot P_\Lambda) = tr(\rho^{\otimes n} P_\Lambda)$$

כדי נסמן ב: $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d^n}$ את בסיס הע"ע האורתו של $\rho^{\otimes n}$

עם ע"ע מתאימים $\{\mu_i\}$, ונניח ללא הגבלת הכלליות

$$\mu_1 \ge \mu_2 \ge \dots \ge \mu_{d^n}.$$

נרשום את החסם:

$$F \le tr(\rho^{\otimes n} P_\Lambda) = \sum_{i=1}^{d^n} \mu_i \, tr\left(|e_i\rangle\langle e_i| P_\Lambda\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d^n} \mu_i \langle e_i | P_\Lambda | e_i \rangle$$

נשים לב כי:

(א) $0 \le \langle e_i|P_\Lambda|e_i\rangle \le 1$ לכל i

$$\sum_{i=1}^{d^n} \langle e_i|P_\Lambda|e_i\rangle = \sum_i tr(P_\Lambda |e_i\rangle\langle e_i|) = tr(P_\Lambda \cdot I) = 2^{nR}$$

ומכאן בדור שמתקיים

$$F \le \sum_{i=1}^{2^{nR}} \mu_i \overset{\text{מ שקול ל-}(n)\delta<R}{<} \varepsilon$$

שקול ל-$(n)\delta<R$ יקרה לנו מה AEP (לאיחוד A_n^ε)

כי ל n מספיק גדול הסכום הזה קטן מ ε.

הסברים:

(א) מסתבר כללי יותר בשלמות לא רק מספרים קבוע כמו הטעות אולם יכול לשפר את - Fidelity (לפחות ב Visible coding).

(ב) לא הנחנו כלום הנחה על תהליך המקודד! (בהוכחה הכללית) לכן - גם אם המקודד יודע מהם המצבים של המקור אם לא יכול לעצור. משמע - מעקרה לגמרי קבוע הדחיסה טבעי blind coding בדומה לצבה של visible coding.

(ג) ההנחה הנה לקידוד בלוק בלבד ונתן להוכיח assymptotic גם לקידוד באורך - משתנה!

(ד) מתוך כפי הוכחת משפט קידוד המרוש, בוכחנו למעשה את ה AEP הקוונטי: לכל סבלנות ε קיים n מספיק גדול כך שקיים תת מרחב $T = T(n,\varepsilon,\delta)$ מימדי $2^{n(S+\delta)}$ שבורו

$$tr(\rho^{\otimes n} P_T) \geq 1-\varepsilon$$

לחילופין, לכל תת מרחב $\tilde{T}$ של $H^{\otimes n}$ מימדי $2^{n(S-\delta)}$ קיים n מספיק גדול כך ש

$$tr(\rho^{\otimes n} P_{\tilde{T}}) < \varepsilon$$

(ה) קידוד variable-length קוונטי: מסתבר פרטה יותר מאלגל ה Entropy שיכול להוודע בין הווקטורים שמשלב הקוד למיבוי מדמו, דוגמה נאיבי: נסתכל $\rho = \frac{1}{3}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ פיבוק אז, היינו מחבר אולם מיבוי טוב יושר אם בפיבוק הבא qubits. אבל, מצב מקור יכול להיות סופרפוזיציה של כמה ווקטורים, ולכן האורך של מילת הקוד יהיה מרחק קוונטי, תמורת סופרפוזיציה שם מרכיב... מבינים האורך ובעלות להרוס את מצב המקור.

הסבר: Indeterminate-lenght quantum coding
Schumacher Westmoreland 2001

(1) VL קוונטי אז נתן (בשאלה) $F=1$ + visibility, אולם אם יש מרוח קלאסי מקבל לשיפור האורכים בעקרה כמה אפשר מתקרב לקלאסי...

Purification

טענה: תהי מערכת A במצב ρ^A. אזי ניתן למצוא מערכת R ולהכין מצב שזוג $|AR\rangle$ במערכת AR כך שמתקיים

$$tr_R\left(|AR\rangle\langle AR|\right)=\rho^A$$

הוכחה: נכתוב את הפירוק האלכסוני: $\rho^A=\sum_i p_i|i^A\rangle\langle i^A|$

נגדיר מערכת R עם אותו מרחב מצב כשל A, ועם בסיס אלכסוני $|i^R\rangle$. נגדיר המצב:

$$|AR\rangle=\sum_i\sqrt{p_i}\,|i^A\rangle|i^R\rangle$$

נבצע trace-out למערכת R:

$$tr_R\left(|AR\rangle\langle AR|\right)=tr_R\left(\sum_{ij}\sqrt{p_ip_j}\,|i^Ai^R\rangle\langle j^Aj^R|\right)=$$

$$=\sum_{ij}\sqrt{p_ip_j}\,|i^A\rangle\langle j^A|\,tr\left(|i^R\rangle\langle j^R|\right)=$$

$$=\sum_{ij}\sqrt{p_ip_j}\,|i^A\rangle\langle j^A|\overbrace{\langle j^R|i^R\rangle}^{\delta_{ij}}=\sum_i p_i|i^A\rangle\langle i^A|=\rho^A$$

כנדרש.

(בהתאמה מרחב בסיס לפחות שווה של R)

הערה: ישנם ∞ purifications, כאשר כל אחד "ממש" אותו מצב אם אתם מ.מ. (תרגיל בי"ב)

The Schmidt Decomposition היא הערה בדומה הבאה

משפט:

יהי $|\psi\rangle$ מצב שזוג במערכת AB. אזי קיימים מצבים אלכסוניים $|e_i^A\rangle$ במערכת A ומצבים אלכסוניים $|f_i^B\rangle$ מתאימים להם במערכת B כך ש-

$$|\psi\rangle=\sum_i\lambda_i|e_i^A\rangle|f_i^B\rangle$$

כאשר $\lambda_i\geq 0$ ומקיימים $\sum\lambda_i^2=1$.

λ_i נקראים גם - Schmidt coefficients.

מספר ה λ_i השונים מאפס נקרא - Schmidt Number.

$Sch(\psi)$

הערה: A,B לא בהכרח מאותו מימד!

מסקנה: אם $|\psi\rangle$ טהור אז:

$$\rho^A = \sum_i \lambda_i^2 |e_i^A\rangle\langle e_i^A| \quad ; \quad \rho^B = \sum_i \lambda_i^2 |f_i^B\rangle\langle f_i^B|$$

(בשונים מאפס)

ומהמקרן שהעקבות של ρ^A ! ρ^B שווים - λ_i^2 בשניהם.

הוכחה: (Schmidt)

נבחר שני בסיסים אז למערכת A,B $\{|j^A\rangle\}$; $\{|k^B\rangle\}$

ונכתוב את המצב $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} \alpha_{jk} |j^A\rangle |k^B\rangle$$

נגדיר את מטריצת הצפיפות ω המצב

$$[\psi] \triangleq \sum_{jk} \alpha_{jk} |j^A\rangle\langle k^B| \qquad (|k^B\rangle \text{ ! } |j^A\rangle \text{ לפי הבסיסים})$$

והכרה ש $|\psi\rangle$! $[\psi]$ קשורים חח"ע.

טענה: לכל אופרטורים יונטריים U,V על A,B מתקיים

$$[(U\otimes V)|\psi\rangle] = U[\psi]V^\dagger$$

הוכחה: ישירות מהגדרה

$$(U\otimes V)|\psi\rangle = \sum_{jk} \alpha_{jk} (U|j^A\rangle)(V|k^B\rangle)$$

$$[(U\otimes V)|\psi\rangle] = \sum_{jk} \alpha_{jk} U|j^A\rangle\langle k^B|V^\dagger = U\left[\sum_{jk} \alpha_{jk} |j^A\rangle\langle k^B|\right]V^\dagger$$

$$= U[\psi]V^\dagger$$

משפט: (SVD) לכל מטריצה A קיימות U,V יונטרי

ו- Λ אלכסונית (עם אלכסון אי שלילי) כך שמתקיים

$$A = U\Lambda V^\dagger$$

תזכורת והרחבה: נתבונן בפירוק SVD למטריצה $[\psi]$

שלנו:

$$[\psi] = U\Lambda V^\dagger$$

כאשר $\lambda_i \geq 0$ הם האלכסון של Λ. נגדיר מצב הבא:

$$|\varphi\rangle = \sum_i \lambda_i |i^A\rangle |i^B\rangle$$

(מיושר אותם בסיסים j,k)

ומתקיים:

$$[\varphi] = \Lambda$$

לכן: $[\psi] = U[\varphi]V^{\dagger} \underset{\text{לפי השאלה}}{=} [(U\otimes V)|\varphi\rangle] =$

ומתוך הייצוג המטריצי:

$$|\psi\rangle = (U\otimes V)|\varphi\rangle = \sum_i \lambda_i U|i^A\rangle V|i^B\rangle = \sum_i \lambda_i |e_i^A\rangle|f_i^B\rangle$$

כאשר $\begin{cases} |e_i^A\rangle \triangleq U|i^A\rangle \\ |f_i^B\rangle \triangleq V|i^B\rangle \end{cases}$

הוכח סעיף אי כנדרש.

תזכורת:

(a) מקדמי Schmidt (ולכן גם $sch(\psi)$) אינוריאנטיים לטרנספורמציה יוניטרית על A ו/או B בנפרד. (תרגיל בית)

(b) $sch(\psi) = \dim tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$ (תרגיל בית)

הוכחה:

(a) קשר בין פירוק Schmidt ל purification:

המצב $|AR\rangle$ נכתב כך שהבסיס Schmidt שלו במערכת A (כלומר $|e_i^A\rangle$) יהיה בדיוק הבסיס העצמי של ρ^A!

בנוסף מקדמי schmidt הם בדיוק השורשים של ערכי ρ^A.

(b) מבט בפעולה purification: קל לראות ש- $|AR_1\rangle$ ו- $|AR_2\rangle$ הם purification של ρ^A מאותו AR טוקן קיים U_R יוניטרי על R כך ש- $|AR_2\rangle = (I_A\otimes U_R)|AR_1\rangle$

(c) המימד של המרחב R ב purification הוא לפחות הסדר כדרגת המטריצה ρ^A, ואין צורך ביותר מכך.