

אוניברסיטת תל – אביב

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן

המחלקה למכניקה חומרים ומערכות

אנליזה של מבנים באמצעות ייצוגים קומבינטוריים

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה"

בהנדסה מכנית באוניברסיטת תל-אביב

על – ידי

נבו תעשה

העבודה נעשתה במחלקה להנדסה מכנית

בהדרכת ד"ר עופר שי

אדר תשס"ב

עבודה זו נעשתה בהדרכתו המסורה של

ד"ר עופר שי

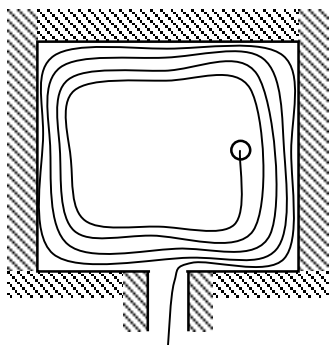
הקדמה

לפני כחמש שנים, באחד מימי החנוכה, טיילתי עם חברים במזרח הגליל. בצהרי היום הגענו אל ראש מצוק הארבל, וחנינו לסעודת המנחה. אני, שאיני ידוע כבעל תיאבון, חמקתי הצידה, והתחלתי יורד במצוק התלול. לאחר דקות מספר, פניתי לשוב על עקביי, ותוך שאני מגשש באצבעותיי למצוא אחיזה נתבררו לי שניים: האחד – טיפוס שכזה, אם לא יקפח את גופי, ירועע את נפשי; והשני – אכן תענוג גדול הוא הטיפוס. חזרתי אל הסועדים, אך את סקרנותם לא השבעתי, שכן מי בר-דעת ויגלה ברבים את דבר שיגיונותיו? לא יצאה שנה, ואני שוב על שפת מצוק, והפעם – מדבר יהודה. והנה, להפתעתי, חבורת אנשים, בני-דעת כביכול, מטפסים אף הם. או אז התברר לי, כי מה שנחשב בעיניי כחממה, הוא תחביב חובק עולם מזה 150 שנה, שאפס קצהו טרם חוויתי.

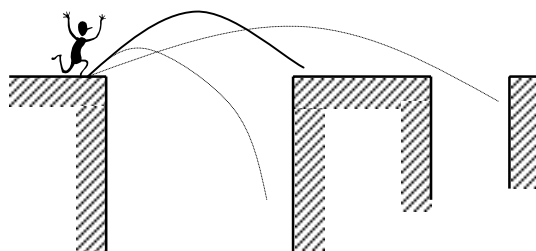
הסיפור שמאחורי העבודה המוגשת כאן הוא איזומורפי לראשון, ומשניהם גם יחד למדתי לקח חשוב: אם אתה אוהב לעשות משהו, יהא חריג ככל אשר יהא, עשה! מה שנראה לך חריג בסביבתך יתברר בבוא השעה כמסלול מוביל, שבו הולכים כמוך עוד רבים וטובים.

לפני כחמש שנים, חלצתי מן המדף ספר מסדרת 'שאוּם', 'מעגלים חשמליים' שמו, בניסיון להבין, כמהנדס מכוונת, את פעולת המעגל החשמלי. באופן חובבני למדי, כך נתברר לי לאחר זמן, ניסיתי להמיר מתח על פני נגד בכוח צירי שבמוט מסבך, ואת הזרם – בעיווי המוט. נראה היה לי זה כעיסוק מוזר, עד ששנה לאחר מכן, לאחר פגישות עם רבים מחברי הסגל במחלקה למכניקה בחיפוש אחר מנחה לתזה, פגשתי את ד"ר עופר שי. להפתעתי, שלף הלה ציור מוזר, וטען כי אין זה אלא מעגל חשמלי, ואם ארצה – גם מסבך. או כל דבר אחר. (אז גם הבנתי איך ניתן לייצג כבשה באמצעות תיבה עם שלושה חורים). חיפשיי אחר מנחה תמו, ובמהלך ארבע השנים מאז ועד הספר שלפניכם, לא זכיתי לטעום אלא כטיפה מתוך הים הגדול ורחב-ידיים שעוסקים בו כבר קרוב למאה וחמישים שנה.

אך זכיתי גם זכיתי לערוך את המחקר המוצג כאן בהנחייתו של ד"ר עופר שי. בעידודו המתמיד, ביד מכוונת ובנפש חפצה, סגר בפני כל דרך מילוט, והעמיד אותי בפני הבעיות העיקריות של המחקר, בלי יכולת לסגת אחור. בעזרת איור מתאים (איור א), התווה בפני את גודל הפער אותו יש לעבור, ודאג שאתכונן כראוי, שמא אקפוץ ללא הכנה, ואפול מטה, או שמא ארוץ מהר מדי, ואפול לבור הסמוך. גם לאחר שנידמה היה שיש קצה חוט, והפתרון כבר בתוך החדר, דומה הייתי כמגשש באפלה. אז דאג עופר להזהירני ללכת צמוד לקירות החדר (איור ב), ולהתכנס אט-אט פנימה, תוך היצמדות אל המוכר. במהלך כל התקופה, דאג עופר גם ליישר וליישב בדרכי נועם את כל הדורי הבירוקרטיה שאינם ממין העניין, ושבודאי היו מעסיקים לשווא את זמני ואת קוצר נפשי. מן הראוי לציין עוד, כי החברותא בקבוצת המחקר, והתרומה ההדדית בתוך הקבוצה, המנוצחת בשרביטו של עופר, תרמו רבות, בעיקר לאיכות המחקר, אך גם לאווירה הטובה ולתחושת הביטחון. על כל אלה, ועל עוד שקוצר הזמן מלכתוב, תודתי העמוקה. הנחייה כזו היא The best Offer I could ever get.



איור ב



איור א

תודה גם לחברי קבוצת המחקר של ד"ר עופר שי: לדניאל רובין שהקדיש לי מזמנו, החל מללמד אותי את צעדי הראשונים בתחום, דרך ביקורת ושיתוף פעולה במהלך המחקר, ועד לסיוע בשלבים הסופיים של הדפסת העבודה. לאנטון שטרח והתרוצץ למעני בשלבים האחרונים והמלחיצים של העבודה. וכן לאירנה ולד"ר יפים.

תודה לאוני ת"א על המלגה שהעניקה לי בשנת הלימודים הראשונה כחייל בשרות חובה, על האכסניה הנדיבה ומלגת הקיום שהעמידה לרשותי בשנה האחרונה, ועל המלגה המיוחדת מהאדונים הנכבדים קורן איזיק ופלדשטיין משה. תודה מיוחדת גם לדיקן הפקולטה להנדסה, פרופ' גדעון לנגהולץ, על שהעניק לי אשראי זמן נדיב, והוסיף על חוק לימודי חצי שנה, כדי לאפשר לי לסיים את המחקר. תודה לאנשי המחלקה למכניקה על העזרה והתמיכה, ובמיוחד לגב' אריאלה רגב, לפרופ' משה פוקס ולד"ר שמואל רבין.

יזכר לטוב בית הקפה 'שינקין 17' בת"א. בעת יושבי שם לארוחת בוקר של נבטים ופלחי אבוקדו בט"ו בחשוון השנה, הבנתי בפתע הבנה צלולה את משפט Tellegen – אחת מאבני היסוד של עבודה זו.

ולכל חברי הטובים – תודה על התמיכה והעידוד לאורך כל הדרך. הייתי זקוק לזה.

חיבוק גדול לנוגה קדמן, אלה ארצישראלית, ששורשיה יונקים מדמע האדמה, ומפירות רגישותה העדינים ניזון העולם כולו. מסירותה לפועלה הייתה לי להשראה, ושקידתה – למופת. בלעדיה הייתה עבודה זו מתמהמהת עד קץ הדורות.

חיבוק גדול לחברתי יפית, מעיין המתגבר, שבחריצותה מעוררת השחר משכה אותי בעליות הקשות, ובקבין ירושלמיים של טוב ליבה סמכה אותי בירידות. עצתה הנבונה ניכרת בעבודה בכל מקום, ורוחה המדברית נושבת בה מבין השיטין.

וחיבוק גדול למשפחתי, הערסל החם והעוטף, ובמיוחד לאחותי מוריה, הגדולה מהחיים, נר למאה כלאחד, והכי-הכי לאמא ואבא, שכל שבי – מהם.

נבו תעשה

אדר ה'תשס"ב

רבי טרפון אומר: היום קצר, והמלאכה מרובה, והפועלים עצלים, והשכר הרבה, ובעל הבית דוחק.

הוא היה אומר: לא עליך המלאכה לגמור, ולא אתה בן חורין ליבטל ממנה. (אבות, ב', כ')

תקציר

בעבודה פותח ייצוג איזומורפי למבנים המורכבים מאלמנטים של מסגרות, קורות ומסבכים. הייצוגים הקיימים שדווחו עד כה בספרות נעשו מתוך מגמה של אנאליזה, ולכן הסתפקו ברישום ישיר של המטריצות, ובקישורן בטופולוגיה אלגברית, כגון דיאגרמת Roth, המסייעת לניסוח המשוואות. במחקר זה הכיוון היה שונה, ועיקר המאמץ הוסב בראש ובראשונה לפיתוח תהליך שיטתי להמרת המבנה לייצוג קומבינטורי איזומורפי. משהתקבל הייצוג המתאים למבנה, כל החקירה, ובכללה פיתוח האלגוריתמים לאנליזה ופיתוח משפטים או חוקים הנדסיים, כולה מתבצעת על הייצוג בלבד.

הייצוג העיקרי בעבודה הוא ייצוג המבוסס על תורת הגרפים, שנקרא גרף התנגדות. בהתאם לייצוג זה, הכוחות באלמנטי המבנה מיוצגים ע"י זרימה בקשתות, ותזוזות הצמתים מיוצגות ע"י פוטנציאלים. הבעיה שבייצוג אלמנטי כפיפה במבנה (כגון קורות ומסגרות) היא כפולה: מבחינת הכוחות, כוח הגזירה באלמנט יוצר אי-שוויון בין מומנטי הקצוות, ובכך מונע יכולת לייצג את האלמנט באמצעות קשת פשוטה, דרכה זורם המומנט מצד אחד למשנהו. מבחינת התזוזות, התזווה הזוויתית בקצה אחד של האלמנט מוסיפה תזווה קווית צידית בקצהו האחר, גם אם אין כלל עיווי באלמנט, ומשבשת בכך את הגדרת היחס בין הפרשי הפוטנציאלים (העיוויים) לבין הזרימות (כוחות). יתר על כן, הייצוג של אלמנטי כפיפה מחייב הבחנה בין שני סוגי זרימה - כוח ומומנט, ושני סוגי פוטנציאל – קווי וזוויתי, בהתאמה. למרות שבעזרת טופולוגיה אלגברית ניתן להתגבר על בעיות אלו לצורך אנאליזה, הגישה בעבודת מחקר זו חייבה להמיר גם תכונות מיוחדות אלה, ולהטמיע אותן בייצוג, עם כל יתר תכונות המבנה.

הייצוג שפותח במחקר זה כולל את כל הידע המקורי הגלום במבנה, והבעיה ההנדסית מומרת לבעיה שקולה, המובעת בשפת הייצוג. בכך, את כל הידוע בשפת הייצוג, ובכלל זה משפטים ושיטות שפותחו במתמטיקה דיסקרטית, ובתורת הגרפים בפרט, ניתן ליישם ישירות על הייצוג. לדוגמה, השיטה שפותחה לניתוח הייצוג מבוססת על שיטה ידועה בתורת הגרפים - שיטת המשתנים המעורבים (Mixed Variable Method), שעד כה נוצלה רק לפתרון מערכות חשמליות, שהן חד-מימדיות, ואילו כעת הורחבה למערכות רב מימדיות.

לאחר שפותח הייצוג ונותח, התברר כי משפטים ושיטות שפותחו בתורת המבנים, נובעים מהידע המוטבע בייצוג, היינו, ניתן לראותם כמקרים פרטיים של משפטים בתורת הגרפים. לדוגמה, שיטה ידועה לחישוב תזוזות צמתים במבנה מתקבלת מאחד המשפטים היסודיים בתורת הגרפים - Tellegen's theorem. בנוסף לכך, התברר כי ניתן להמיר את הבעיה ההנדסית לבעיה אחרת על בסיס תכונות הייצוג. לדוגמה, על גרף המתאים לקורה מסוימת סטטית הופעל האלגוריתם למציאת גרף דואלי, והתקבל כי הקורה המתאימה לגרף הדואלי היא למעשה הקורה המצומדת (conjugate beam). יתרה מזאת, התברר כי הדואליות, שעליה מבוססת ההוכחה של קורה מצומדת, היא הרחבה של הדואליות שבין מסבכים ומכניזמים, שפותחה ודווחה כבר בספרות.

על סמך התוצאות הראשוניות שהתקבלו בעבודה, ניתן ללמוד, כי הבסיס התיאורטי שהונח במחקר זה, מאפשר לראות נושאים רבים בתורת המבנים בראייה חדשה, כוללת יותר, ופותח אופקים חדשים ליישומים בתחומים נוספים בהנדסה. הייצוג שפותח יוצר שפה משותפת, שבאמצעותה יוכל מהנדס מתחום הנדסי אחר ללמוד את תורת המבנים, ולהפך, להעביר ידע ושיטות מתחום אחד למשנהו, וכן למצוא קשרים חדשים בין תורת המבנים לבין נושאים אחרים בהנדסה על בסיס הקשרים הקיימים בין ייצוגים קומבינטוריים אחרים שפותחו כבר. יישום הייצוג במערכות משולבות רב-תחומיות יאפשר תכנון הנדסי כולל ע"י ייצוג כל חלקי המערכת כאחת ברמה הקומבינטורית המשותפת.

תוכן העניינים

vi	סימונים והגדרות
viii	רשימת איורים
x	רשימת טבלאות

פרק 1: מבוא

1	1.1 רקע היסטורי
1	1.1.1 שני חלוצים, שתי דרכים
3	1.1.2 ממשיכי הדרך – טופולוגיה אלגברית
3	1.1.3 החשיבות בפיתוח ייצוג איזומורפי כולל
5	1.2 מטרות המחקר
5	1.3 רקע תיאורטי בתורת הגרפים
5	1.3.1 הייצוג הגרפי (Graph Representation)
6	1.3.2 פוטנציאל וזרימה
7	1.3.3 ניסוח פוטנציאל וזרימה במושגי קשת
8	1.3.4 ניסוח אלגברי לייצוג הגרפי
14	1.3.5 יחסי זרימה והפרש פוטנציאלים בגרף
18	1.3.6 גרף התנגדות
20	1.3.7 שיטת המעגלים
21	1.3.8 שיטת החתכים
22	1.3.9 פעולות בגרף – כיווץ ומחיקה של קשתות
23	1.3.10 גרף דואלי (Dual Graph)

פרק 2: ייצוג אלמנט כפיפה על ידי גרף זרימות

25	2.1 הבעייתיות בייצוג אלמנטי כפיפה
25	2.1.1 ייצוג של אלמנט כפיפה על ידי קשת בגרף
27	2.1.2 ייצוג באמצעות מטריצת פגישות (Incidence Matrix)
31	2.2 פיתוח הייצוג של קורה על ידי גרף זרימות
31	2.2.1 ייצוג שיווי משקל של גוף חופשי
32	2.2.2 ייצוג שיווי משקל של קצות האלמנט
33	2.2.3 ייצוג שיווי משקל של קורה וצמצום ראשוני שלו
34	2.2.4 צמצום נוסף של קשתות בגרף זרימת כוחות הגזירה
35	2.2.5 אפשרות א' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים
35	2.2.6 אפשרות ב' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים
36	2.2.7 אפשרות ג' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים

36	הייצוג הנבחר של אלמנט קורה על ידי גרף זרימות	2.2.8
37	ניתוח משמעותה של קשת קיזוז המומנטים בייצוג לאלמנט קורה	2.2.9
39	דוגמה לייצוג של קורה על ידי גרף זרימות	2.2.10
40	משמעות הזרימות בייצוג ויצירת דיאגרמות הכוחות והמומנטים בקורה	2.3
40	משמעות לכיווני הקשתות	2.3.1
41	בניית דיאגרמת כוחות גזירה	2.3.2
42	בניית דיאגרמת מומנטים	2.3.3
45	פתרון קורה מסוימת סטטית על ידי גרף זרימות	2.4
45	קורה מסוימת סטטית – בעיה לדוגמה	2.4.1
45	ייצוג הקורה והבעיה באמצעות גרף זרימות	2.4.2
46	בחירת עצים פורשים כהכנה לניסוח חוק הזרימות	2.4.3
47	ניסוח חוק הזרימות באמצעות מטריצת המעגלים	2.4.4
48	פתרון הבעיה	2.4.5
49	סיכום ומסקנות לגבי הייצוג על ידי גרף זרימות	2.5

פרק 3: ייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות

51

51	כוחות ותזוזות באלמנט מבנה מישורי	3.1
51	כוחות קצה - שיווי משקל	3.1.1
52	תזוזות קצה (Displacements) ועיויים (Deformations) - התאמה	3.1.2
54	כוחות פנימיים	3.1.3
54	היחס בין הכוח הפנימי לעיווי	3.1.4
55	ייצוג גרפי של אלמנט מבנה מישורי	3.2
55	ייצוג התזוזות כפוטנציאל בגרף	3.2.1
58	ייצוג הכוחות כזרימה בגרף	3.2.2
61	איחוד גרף הזרימות וגרף הפוטנציאלים לגרף התנגדות	3.2.3
61	הידוק הקשרים בין המקורות התלויים	3.2.4
62	הייצוג הגרפי הסופי לאלמנט מבנה מישורי	3.2.5
64	קביעת זווית האלמנט, α	3.2.6
65	השפעות שינויי כיוונים בייצוג	3.2.7
66	ייצוגים לאלמנטים יסודיים	3.3
66	ייצוג מוט מסבך	3.3.1
67	קורה אופקית	3.3.2
68	אלמנט מסגרת אופקי או אנכי	3.3.3
68	דוגמה לייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות	3.4
68	הכנה לייצוג המבנה – בחירת צמתים, אלמנטים וכיוונים	3.4.1
69	ייצוג המבנה - אלמנטים, סמכים ועומסים	3.4.2
70	פירוש כללי לערכים השונים בייצוג	3.4.3

71	3.4.4	התייחסות לחיבור מפרקי בין אלמנטים
72	3.5	סיכום ומסקנות לגבי הייצוג על ידי גרף התנגדות

פרק 4: ניתוח הייצוג הגרפי 73

75	4.1	שיטת המשתנים המעורבים (Mixed-Variable Method) לפתרון גרף התנגדות
76	4.1.1	שלב א: מיון
77	4.1.2	שלב ב: חלוקה
77	4.1.3	שלב ג: בניית עצים
77	4.1.4	שלב ד: ניסוח הקשרים הבסיסיים
80	4.1.5	שלב ה: בניית הירארכיית הידע
83	4.1.6	שלב ו: הפתרון
84	4.2	דוגמה א' – קורה אופקית
84	4.2.1	בחירת צמתים ואלמנטים לגרף ההתנגדות
84	4.2.2	כללים לבחירת כיווני האלמנטים
86	4.2.3	בניית גרף ההתנגדות
87	4.2.4	מיון קשתות גרף ההתנגדות, ובניית עץ פורש
87	4.2.5	ניסוח המטריצות הקשורות לגרף ההתנגדות
89	4.2.6	צעדים לפישוט משוואת המשתנים המעורבים
90	4.2.7	פתרון הבעיה
91	4.2.8	השפעת שיוך קשתות ההתנגדות לקבוצה E
94	4.3	דוגמה ב' – מסגרת עם מוט מסבך
97	4.4	ניסוח מבוסס טופולוגיה
97	4.4.1	אלגוריתם 1: ייצוג מבנה על ידי גרף מעורב משתנים
97	4.4.2	ניסוח משוואות המשתנים המעורבים ישירות מן הגרף
100	4.4.3	אלגוריתם 2: רישום טופולוגי ישיר של משוואת המשתנים המעורבים

פרק 5: יישומים והרחבות של הייצוג הגרפי 105

105	5.1	ייצוג מסבך ופתרונו על ידי גרף
105	5.1.1	צמצום הייצוג הגרפי המעורב
105	5.1.2	צמצום משוואת המשתנים המעורבים לפתרון הגרף
106	5.1.3	דוגמה לפתרון מסבך על ידי גרף התנגדות
107	5.2	קורה מצומדת (Conjugate Beam) כתוצר של גרף דואלי
107	5.2.1	דואליות בין מסבך למכניזם
108	5.2.2	השוני בין אלמנט מסבך לאלמנט כפיפה בהחלת הדואליות
110	5.2.3	ייצוג קורה רציפה על ידי גרף

112	הגרף הדואלי של גרף הקורה	.5.2.4
113	הגרף הדואלי כייצוג של קורה דואלית	.5.2.5
114	ההזות בקורה המקורית ככוחות בקורה דואלית.	.5.2.6

117 **5.3 שיטות אנרגיה כהיסק של משפט Tellegen**

117	שיטת עבודה מדומה למציאת הזזה במבנה	.5.3.1
118	התאמת משפט Tellegen לגרף המייצג מבנה	.5.3.2
121	פתרון המבנה על ידי גרף זרימות	.5.3.3
122	החלת משפט Tellegen על הקורה לדוגמה	.5.3.4
124	החלת משפט Tellegen על גרף רציף	.5.3.5

125 **5.4 הרחבה לייצוגים נוספים - ייצוג על ידי מטרואיד**

126	תורת המטרואידים – רקע תיאורטי	.5.4.1
127	ייצוג מבנה על ידי מטרואיד	.5.4.2

131 פרק 6: סיכום, מסקנות והמשך מחקר

131	6.1 סיכום
131	.6.1.1 הבעיות שטופלו במסגרת העבודה
131	.6.1.2 עיקרי התוצאות שהתקבלו בעבודה
132	.6.1.3 שימוש בקשרים בין ייצוגים
132	6.2 מסקנות והמשך מחקר

סימונים, מושגים והגדרות

אותיות

אותיות גדולות ישרות מסמנות ערכים: אות דקה היא ערך סקלרי, **עבה** היא וקטור או מטריצה של ערכים, **ועבה** היא וקטור של וקטורים, או מטריצה של מטריצות, היינו – מטריצה וקטורית. באופן דומה, אותיות גדולות מוטות מסמנות קבוצות, ואות **מוטה ועבה** מסמנת אוסף של קבוצות. על אותיות קטנות לא חלים הכללים הנ"ל. לפיכך:

<p>p עומס מפולג.</p> <p>P וקטור מקורות זרימה בגרף, או וקטור עומס חיצוני במבנה.</p> <p>P רכיב זרימה במקור זרימה.</p> <p>P קבוצת מקורות הזרימה בגרף.</p> <p>PS קשת מקור הפרש פוטנציאלים תלוי.</p> <p>PS קבוצת מקורות הפרש פוטנציאלים תלויים בגרף.</p> <p>Q מטריצת החתכים של גרף.</p> <p>R קשת התנגדות.</p> <p>R קבוצת קשתות התנגדות בגרף.</p> <p>R מטריצת הגמישות הפנימית של אלמנט.</p> <p>R^R מטריצת ההתנגדות הכללית של קשת התנגדות.</p> <p>r רדיוס וקטור.</p> <p>s קיצור של $\sin()$.</p> <p>S כוח תגובה של סמך במבנה.</p> <p>S קבוצת איברי המטרואיד.</p> <p>T קבוצת הענפים בגרף.</p> <p>T' קבוצת הענפים בגרף, נטולת מקורות הפרש פוטנציאלים.</p> <p>T, T_t מטריצת המרה מן המערכת הכללית למערכת פנימית של אלמנט.</p> <p>T_{t→h} מטריצת המרת כוח מצומת הזנב לצומת הראש של האלמנט.</p> <p>t צומת זנב.</p> <p>v כציון עליון – פעולת שחלוף (Transpose).</p> <p>v מספר הצמתים בגרף.</p> <p>V כוח גזירה.</p> <p>α זווית של אלמנט.</p> <p>Δ וקטור הפרשי פוטנציאלים.</p> <p>Δ רכיב הפרש פוטנציאלים או קשת מקור הפרש פוטנציאלים.</p> <p>Δ קבוצת מקורות הפרשי הפוטנציאלים בגרף.</p> <p>θ רכיב עיווי זוויתי של אלמנט, במערכת פנימית.</p> <p>Θ רכיב פוטנציאל במימד זוויתי בגרף, או רכיב תזוזה זוויתית במבנה.</p> <p>Π וקטור פוטנציאלים בגרף, או וקטור תזוזות במבנה.</p> <p>Π רכיב פוטנציאל במימד קווי בגרף, או רכיב תזוזה קווית במבנה.</p>	<p>A מטריצת הפגישות של גרף.</p> <p>A שטח החתך של אלמנט.</p> <p>B מטריצת המעגלים של גרף.</p> <p>c קיצור של $\cos()$.</p> <p>C אוסף המעגלים במטרואיד.</p> <p>C קבוצת הקישורים בגרף.</p> <p>C' קבוצת הקישורים בגרף, נטולת מקורות זרימה.</p> <p>D וקטור העיווי של אלמנט.</p> <p>D רכיב עיווי קווי של אלמנט, במערכת פנימית.</p> <p>E מודול האלסטיות של אלמנט.</p> <p>E קבוצת קשתות בגרף.</p> <p>e מספר הקשתות בגרף.</p> <p>F אוסף הקבוצות הבלתי תלויות במטרואיד.</p> <p>F וקטור זרימות בגרף, או וקטור כוחות במבנה.</p> <p>F רכיב זרימה בגרף, או רכיב כוח במבנה.</p> <p>F קבוצת קשתות מאופיינות זרימה.</p> <p>f וקטור כוחות פנימיים באלמנט.</p> <p>f רכיב כוח פנימי באלמנט.</p> <p>FS קשת מקור זרימה תלוי.</p> <p>FS קבוצת מקורות זרימה תלויים בגרף.</p> <p>G גרף.</p> <p>h צומת ראש, של אלמנט או של קשת.</p> <p>H מטריצת תלות בין קשתות.</p> <p>I מומנט ההתמד לכפיפה של אלמנט.</p> <p>i אינדקס אלמנט במבנה.</p> <p>j אינדקס קשת בגרף.</p> <p>k אינדקס קישור בגרף.</p> <p>K מטריצת הקשיחות הפנימית של אלמנט.</p> <p>K^R מטריצת המוליכות הכללית של קשת התנגדות.</p> <p>L אורך של אלמנט.</p> <p>M וקטור זרימות במימד זוויתי בגרף, או וקטור מומנטים במבנה.</p> <p>M רכיב זרימה במימד זוויתי בגרף, או רכיב מומנט במבנה.</p> <p>m בחלק 5.4 מסמן גם מטרואיד.</p> <p>m רכיב מומנט פנימי באלמנט.</p> <p>o צומת ייחוס.</p>
---	---





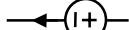

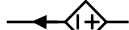
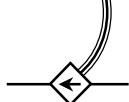

סימונים וקיצורים

- פעולת מחיקה של קשתות בגרף.
- ° פעולת כיווץ של קשתות בגרף.
- \bar{Q} (קרי: 'מטריצה Q הווקטורית') כל אלמנט במטריצה הוא רב-מימדי ומתייחס לערך וקטורי. וכן למטריצות B ו-A, וכן ליתר המטריצות, ומיושם גם לגבי וקטורים.
- * ערך או מרכיב בגרף דואלי.
- ה.פ. הפרש פוטנציאלים.

איורים במבנה

-  אלמנט מבנה כללי
-  אלמנט מבנה לאחר העמסה
-  אלמנט המוזז לפי צומת ראשו
-  סמך מקובע (ריתום)
-  סמך ניח
-  סמך נייד
-  מיפרק

איורים בגרף

-  צומת
-  צומת ייחוס
-  קשת רגילה או קשת התנגדות
-  ענף עץ פורש
-  מקור הפרש פוטנציאלים
-  מקור זרימה
-  מקור הפרש פוטנציאלים תלוי
-  קשר תלות בין מקורות תלויים
-  מקור זרימה תלוי

רשימת איורים וטבלאות

עמוד

מס' האזור

1	איור 1.1 : דמיון בין מבנה לגרף
4	איור 1.2 : פתרון בעיה מסובכת על ידי ייצוג פשוט
6	איור 1.3 : גרף, קשירות וכיווניות
6	איור 1.4 : פוטנציאל צמתים והפרש פוטנציאלים בקשתות
7	איור 1.5 : מעגלי זרימה וזרימה בקשתות
8	איור 1.6 : גרף וייצוג על ידי מטריצת פגישות (Incidence Matrix)
9	איור 1.7 : עץ פורש, ענפים וקישורים
10	איור 1.8 : מטריצת החתכים – המשמעות הראשונה
11	איור 1.9 : מטריצת המעגלים – המשמעות הראשונה
13	איור 1.10 : מטריצת החתכים – המשמעות השניה
13	איור 1.11 : מטריצת המעגלים – המשמעות השניה
17	איור 1.12 : מטריצת החתכים – המשמעות השלישית
17	איור 1.13 : מטריצת המעגלים – המשמעות השלישית
22	איור 1.14 : כיוון קשת
23	איור 1.15 : מחיקת קשת
24	איור 1.16 : גרפים דואליים לגרף פוטנציאלים ולגרף זרימות
26	איור 2.1 : בעייתיות בייצוג גרפי של אלמנט כפיפה
26	איור 2.2 : בעייתיות בייצוג גרפי של קורה רתומה
27	איור 2.3 : תיאור קורה בטופולוגיה אלגברית
29	איור 2.4 : ייצוג 'גרפי' של קורה על בסיס מטריצת פגישות
30	איור 2.5 : החלפת חתכי צומת בחתכים יסודיים
32	איור 2.6 : ייצוג פריטי מערכת בשיווי משקל על ידי גרף זרימות
32	איור 2.7 : ייצוג קורה רתומה בשיווי משקל על ידי גרף זרימות
33	איור 2.8 : ייצוג קורה בעלת שלושה אלמנטים על ידי גרף זרימות ראשוני
34	איור 2.9 : צמצום גרף זרימת כוחות גזירה שבאיור 2.8
34	איור 2.10 : הפשטה של גרף זרימת כוחות גזירה בקורה רתומה
35	איור 2.11 : הפשטה של גרף זרימת המומנט בקורה רתומה על ידי הוספת צומת ביניים
36	איור 2.12 : הפשטה של גרף זרימת המומנט בקורה רתומה ללא הוספת צומת ביניים
37	איור 2.13 : ייצוג אלמנט קורה על ידי גרף זרימות
37	איור 2.14 : חישוב המומנט בנקודה בהשפעת כוח קווי
39	איור 2.15 : קורה לדוגמה של ייצוג על ידי גרף זרימות
39	איור 2.16 : בידוד הצמתים בקורה וסימון הכוחות
40	איור 2.17 : ייצוג הכוחות באלמנטים על ידי גרף זרימות
40	איור 2.18 : ייצוג הכוחות בקורה על ידי גרף זרימות
40	איור 2.19 : זרימת כוחות בקשת
41	איור 2.20 : דיאגרמת כוחות גזירה באמצעות גרף זרימות

42	איור 2.21 : ייצוג רציף למומנט
43	איור 2.22 : זרימת מומנטים בקשת
44	איור 2.23 : דיאגרמת מומנטים באמצעות גרף זרימות
45	איור 2.24 : קורה מסוימת סטטית
45	איור 2.25 : גרף זרימות של הקורה לדוגמה
47	איור 2.26 : בחירת עצים פורשים בגרף הזרימות
47	איור 2.27 : ציון מעגלי הזרימה לקישורים הנבחרים לשם בניית מטריצות המעגלים
52	איור 3.1 : כוחות קצה על אלמנט מבנה מישורי
53	איור 3.2 : תזוזות הקצה של אלמנט מבנה מישורי
54	איור 3.3 : המרת הכוח על זנב האלמנט מרכיבים במערכת הכללית לרכיבים פנימיים
55	איור 3.4 : רכיבי כוח ועיווי פנימיים באלמנט מבנה מישורי
57	איור 3.5 : ייצוג אלמנט מבנה מישורי על ידי גרף פוטנציאלים
58	איור 3.6 : רכיבי כוח ועיווי פנימיים באלמנט מבנה מישורי
60	איור 3.7 : ייצוג זרימה באלמנט מבנה על ידי גרף זרימות
61	איור 3.8 : ייצוג אלמנט מבנה מישורי על ידי גרף התנגדות
63	איור 3.9 : הייצוג הסופי לאלמנט מבנה מישורי על ידי גרף התנגדות
67	איור 3.10 : יחסי פוטנציאלים במוט מסבך, והפרכת קשר ההתנגדות
69	איור 3.11 : דוגמה לייצוג מבנה על ידי גרף
73	איור 4.1 : ייצוג גרפי לקורה רתומה בעלת אלמנט אחד
76	איור 4.2 : מיון קשתות הגרף לשתי קבוצות
77	איור 4.3 : חלוקת הגרף לשני תת-גרפים
78	איור 4.4 : בחירת עצים פורשים בשני התת-גרפים
79	איור 4.5 : Two-port – אפשרויות ליחסי תלות מלאים
80	איור 4.6 : תהליך השגת הידע בשיטת המשתנים המעורבים
84	איור 4.7 : דוגמה א' - קורה אופקית
85	איור 4.8 : בחירה נכונה של כיווני אלמנטים
86	איור 4.9 : התועלת בבחירה נכונה של כיווני אלמנטים
86	איור 4.10 : דוגמה א' - גרף התנגדות לקורה
87	איור 4.11 : דוגמה א' - גרף התנגדות ממוין, עם עץ פורש
92	איור 4.12 : דוגמה א' - גרף התנגדות החורג מכלל מיון 2
94	איור 4.13 : דוגמה ב' - מסגרת עם מוט מסבך, וייצוגה על ידי גרף התנגדות
98	איור 4.14 : אלגוריתם 1 - ייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות
106	איור 5.1 : ייצוג מסבך על ידי גרף התנגדות
108	איור 5.2 : דואליות בין מסבך למכניזם
109	איור 5.3 : מרכיב התנגדותי בהפרשי פוטנציאלים של אלמנטים
110	איור 5.4 : ייצוג רציף של אלמנט מבנה אופקי

- 111 איור 5.5 : גרף רציף של קורה מועמסת, מופרד לשני מימדיו
- 112 איור 5.6 : גרף זרימות וגרף פוטנציאלים פרימאליים של קורה מועמסת, מופרדים למימדיהם
- 113 איור 5.7 : הגרפים הדואליים של קורה מועמסת, מופרדים למימדיהם
- 115 איור 5.8 : הגרפים הדואליים כגרפי זרימה של קורה דואלית
- 116 איור 5.9 : הגרפים הדואליים כגרפי זרימת כוחות ומומנטים של קורה דואלית
- 119 איור 5.10 : מציאת תזוזה על ידי משפט Tellegen – שני גרפים איזומורפיים לקורה
- 127 איור 5.11 : גרף מצומצם למבנה

עמוד

מס' הטבלה

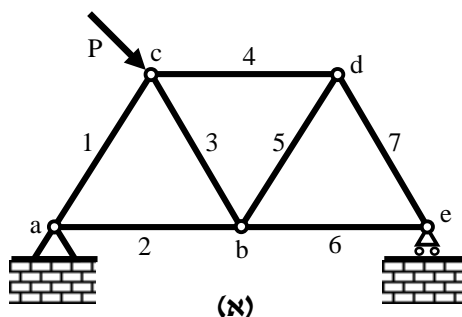
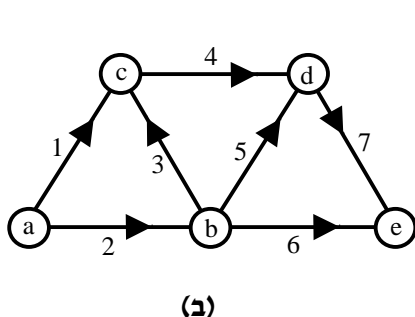
- 65 טבלה 3.1 : השפעת שינויי כיוון בקשתות על הקשרים בייצוג הגרפי
- 67 טבלה 3.1 : קשרים לכיוונים ראשיים של אלמנט קורה
- 68 טבלה 3.3 : קשרים לכיוונים ראשיים של אלמנט מסגרת
- 101 טבלה 4.1 : הפרשנות הטופולוגית של משוואת המשתנים המעורבים
- 103 טבלה 4.2 : הדגמת יישום אלגוריתם הרישום הטופולוגי – אגף שמאל
- 104 טבלה 4.3 : הדגמת יישום אלגוריתם הרישום הטופולוגי – אגף ימין
- 122 טבלה 5.1 : רישום טופולוגי לחוק הזרימות למבנה מסוים סטטית
- 123 טבלה 5.2 : רישום טופולוגי של מטריצות המקדמים במשוואת החתכים לקורה

'ויהי כל הארץ שפה אחת דברים אחדים...:ויאמרו הבה נבנה לנו עיר ומגדל וראשו בשמים ונעשה לנו שם פן נפוץ על פני כל הארץ: ...ויאמר ה' הן עם אחד ושפה אחת לכולם זה החילם לעשות ועתה לא יבצר מהם כל אשר יזמו לעשות':

בראשית י"א

1. מבוא

הדמיון החזותי בין המבנה שבאיור 1.1א לבין הצורה שבאיור 1.1ב, הלקוחה מעולמה של תורת הגרפים, מעורר מיד את הרצון לחקור את הקשר בין שתי הצורות. יתר על כן, בעוד המסבך מעמיד בדרך כלל בעיות בפני המהנדס, הרי שתורת הגרפים משמשת בדרך כלל לפתרון בעיות, ולפיכך, הידוק הקשר בין שני העולמות טומן בחובו פוטנציאל שאותו יש לבחון.



איור 1.1: דמיון בין מבנה לגרף

1.1. רקע היסטורי

1.1.1. שני חלוצים, שתי דרכים

בסוף שנות ה-30 של המאה העשרים נגמרה עבודת הפיתוח של שיטה טופולוגית לניתוח מעגלים חשמליים. היסודות לשיטה זו הם חוקי Kirchhoff הידועים, שנוסחו כבר באמצע המאה ה-19, ולשיא התפתחותה בתקופה האמורה הגיעה השיטה על ידי Gabriel Kron. את מרבית מחקריו ערך Kron במסגרת עבודתו כמדען הראשי של חברת General-Motors. הישגיו המדעיים פרצו דרכים חדשות של ייצוג ואנאליזה בתחום הנדסת החשמל ואף מחוצה לה, ובכללם שיטת ה-'Tearing' לניתוח מערכות בקנה-מידה גדול. רעיונותיו מרחיקי הלכת טרם מומשו במלואם אפילו היום, והקנו לו שם כ- 'possibly the greatest U.S. nonlinear electrical scientist of all time' (Bearden, 1995).

במקביל לסיום העבודה לגבי מעגלים חשמליים, הוחל בחיפוש אחר שיטות דומות גם לניתוח מבנים. במהלך 20 השנים 1940 – 1960 נוסדו שתי שיטות עיקריות לניתוח טופולוגי של מבנים. השיטה האחת היא שיטתו של Kron (1963), שהייתה המשך ישיר לעבודתו במערכות חשמליות, והושפעה מן הדמיון הטופולוגי בין מבנה למעגל חשמלי. במלותיו של Kron:

"The layman is struck by the similarity of an elastic structure, such as a bridge-network or the girders of a skyscraper, to an electrical network." (Kron, 1962, p.330)

Kron, וכך גם אחרים בתקופתו, הפכו בעיה מבנית לבעיה חשמלית על ידי שימוש באנאלוגים חשמליים למרכיבים המכניים של המבנה. מגמה זו הושפעה כנראה מן ההגמוניה שרכשה תורת החשמל והרשתות במהלך המאה העשרים, כי תהליך הפוך של ייצוג מערכת חשמלית באמצעות מבנה מכני לא טופל בעבודתם. גם ניסיון להחיל ישירות על המבנה שיטות אלגבריות שעמדו בבסיס תורת הרשתות לא נעשה, ואך היה טבעי להמיר תחילה את הבעיה לתחום ההנדסי השולט, קרי – חשמל, ורק אז לטפל בה.

כדי שהאנאלוגיה תהיה שלימה, היה על המעגל המייצג את המבנה לקיים את שני חוקי Kirchhoff, הלא הם חוק הזרימות וחוק הפוטנציאלים. בפרק השני בעבודה זו יתברר מדוע כה מסובך הוא ייצוג מבנה ששומר על חוק הזרימות, והייצוג של Kron היה מורכב עוד יותר מזה שפותח בעבודה זו. מורכבות זו הניאה חוקרים מלאמץ את השיטה, והניעה אותם לחפש, למצוא ולדבוק בשיטה השנייה.

השיטה השנייה מבוססת על קשרים אלגבריים בין קבוצות ידע, היינו – טופולוגיה אלגברית (Algebraic Topology). סידור הידע הקשור למבנה בצורה מטריציונית היה הצעד הראשון (Southwell, 1940), ומשם קצרה הייתה הדרך לניסוח הקשרים בין קבוצות הידע, על בסיס הדיאגרמה של Roth (1955).

מה שעשה Kron לשיטה הראשונה, עשה Börje Langefors לשיטה השנייה. Langefors היה המייסד של הגוף המחקרי בחברת SAAB השוודית, והראשון שעמד בראש גוף זה. במסגרת מחקריו פירסם שורה של עבודות שבהן הוא מייסד ומכליל שיטות אלגבריות לייצוג טופולוגי וניתוח של מבנים. Langefors ייצג, עוד לפני Kron, מסבכים באמצעות מעגלים חשמליים. Kron המשיך באותה הדרך גם לייצוג קורות ומסגרות, אך Langefors טען שהייצוג של Kron מסובך וכולל עבודה טנסורית רבה (Langefors, 1950). הוא גם שם לב לעובדה, שבייצוג של Kron, שינוי של ערך התנגדות אחד גורר שינוי של עוד ערכים רבים, וזה חיסרון גדול ביחס למערכת טופולוגית פשוטה, או מעגל חשמלי. לפיכך אימץ Langefors ופיתח את השימוש במטריצת הפגישות (Incidence Matrix) ככלי עיקרי להמרה בין קבוצות הידע במבנה.

Kron לעומתו דחה מכל וכל את האפשרות להשתמש במטריצת הפגישות בייצוג הטופולוגי, שכן, לדבריו, 'Incidence Matrices have nothing whatever to do with Kirchhoff's Laws' (Kron, 1963).

גם Langefors וגם Kron השתמשו בדיאגרמת Roth כדי להציג באופן מסודר וקומפקטי את הקשרים בין קבוצות הידע, אך בעוד שאצל Kron הייתה הדיאגרמה כלי עזר לסיכום הקשרים בין קבוצות

הידע על בסיס ייצוג המבנה כמעגל חשמלי, הרי שאצל Langefors הייתה הדיאגרמה הייצוג עצמו. מכל מקום, מטרתם של שני חלוצים אלה, כל אחד בדרכו שלו, הייתה ליצור טופולוגיה קומבינטורית, בדומה לתורת החשמל, אך עדיין עשו זאת ברמה ההנדסית של תורת המבנים, או שהמירו את הבעיה לרמה המקבילה – תורת החשמל. לא היה בעבודתם ניסיון להעלות את הטיפול בבעיה לרמה הקומבינטורית הכללית המשותפת (Shai, 2001b).

1.1.2 משיכי הדרך – טופולוגיה אלגברית

במשך העשורים האחרונים מאז ועד היום, ניכרת נטייה ברורה ללכת בדרכו של Langefors, שהיא פשוטה מאוד מבחינה אלגברית, ומיוצגת בפשטות על ידי דיאגרמת Roth. מגמה זו, למרות שמדגישה את יעילות שיטת ה- 'Tearing' שפותחה על ידי Kron (1963) לטיפול במורכבות הפתרון של מערכות גדולות, עדיין מציעה להשתמש במטריצת הפגישות כדי לייצג את המערכת.

כבר בשנות השישים אימץ Spillers (1963) את שיטתו של Langefors, פיתח אותה, וניסח את היחסים הפיסיקליים במבנה על ידי שימוש במבנה אלגברי טופולוגי המבוסס על מטריצת הפגישות (במידת מה של אירוניה, נתן Spillers למטריצה זו סימון מיוחד – N , ככוונה להבדילה מן המטריצה A המשמשת בתורת הרשתות, וכאילו למרות שהדמיון בין התחומים קורא לאיחודם, ההתבדלות דרך הסימונים מעידה על 'שמרנות טריטוריאלי' שהיה בה כדי לעכב איחוד זה).

תיאורו הטופולוגי של Spillers שמר על מעמדו עד היום, ונבנים עליו חוקרים רבים (Fenves, 1964; McGuire and Gallagher, 1979; Wang and Bjørke, 1991; Kaveh, 1995). באופן הפשוט בו מנוסחות המשוואות לצורך אנאליזה, ובמיוחד אמור הדבר לגבי אנאליזה של מבנים מרובי-אלמנטים, שם לשיטתיות ופשטות יש תפקיד קריטי. אכן, על בסיס פשטות השיטה נכתבו תכניות מחשב לאנאליזת מבנים, שיצא שמם בעולם כולו, ובפרט STRESS (Fenves et al., 1964), שהפכה את עלות האנאליזה לחסרת משמעות בקבלת החלטות תכנוניות (Fenves, 1996). מזו האחרונה התפתחה לאחר מכן ממשיכת דרכה, STRUDL, שהובילה את אנאליזת המבנים באמצעות מחשב אל שנות ה-80 (Fenves, 1996). בניסיון להכליל את הטופולוגיה האמורה, שילב אותה Bjørke (1995) במארג בין-תחומי רחב יותר של גישתו ההנדסית הכוללת למערכות ייצור, שהיא ביסודה אלגברית.

1.1.3 החשיבות בפיתוח ייצוג איזומורפי כולל

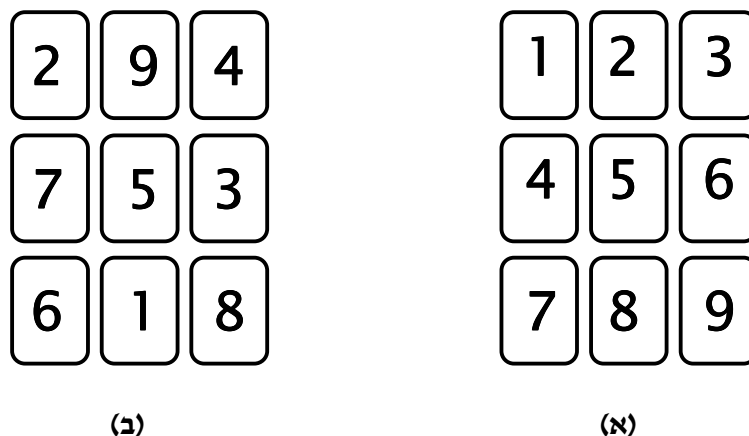
כאמור, ייצוג המבנה על ידי מעגל חשמלי, כשיטתו של Kron, הוא ייצוג מורכב יותר מן הייצוג על ידי מטריצת פגישות. אך לא לחינם התאמץ Kron בעבודתו. ייצוג השומר על חוקי הזרימה והפוטנציאל, ועוד יותר מזה – משמר את הטופולוגיה של הבעיה המיוצגת, מאפשר 'לראות' את המבנה בתוך הייצוג, ולמצוא כל היבט וכל ערך הקיים במבנה בתוך הייצוג, בלי לאבד אף פיסת מידע בתהליך ההמרה בין השניים.

מה שנראה אז יתרון גדול בייצוג בעיה מתחום אחד – תורת המבנים, על ידי שפה של תחום מקביל – תורת החשמל, הופך ליתרון גדול הרבה יותר כשמדובר בייצוג כולל ומופשט, מתמטי לחלוטין, החולש על

כל התחומים גם יחד, והכוונה היא לתורת הגרפים (גם תורת הגרפים היא מרכיב בתורה גדולה עוד יותר – תורת המטרואידיים, ועל כך – בפרק 5).

היתרון המיידי הנראה לעין בייצוג הכולל הוא 'שפה אחת ודברים אחדים'. היכולת לייצג תחומים הנדסיים שונים זה מזה באמצעות כלי מתמטי אחיד מאפשרת לגשר בין מהנדסים מתחומים שונים, וליצור שפה משותפת אחידה לניתוח ולתכן.

היתרון העמוק והחשוב יותר טמון ביצירת 'אזור סחר חופשי' של ידע. שיטות שלמות ודרכי חשיבה שונות זו מזו יכולות לנדוד מתחום הנדסי אחד למשנהו, להעשיר ולהפרות זה את זה, והחשוב מכל – לפצח בעיות קשות לפתרון; הסתכלות על בעיה מסובכת בתחום מסוים מזווית ראייה שונה לחלוטין באמצעות ייצוגה בכלים מתחום אחר יכולה להציף פתרון, שלעיתים הוא פשוט ביותר. דוגמה לכך מוצגת באיור 1.2.



איור 1.2: פתרון בעיה מסובכת על ידי ייצוג פשוט

(א) על שני שחקנים לקחת, איש בתורו, בשלושה סיבובים, קלף מתוך תשעה, המונחים גלויים על השולחן וערכם עולה מ-1 עד 9. המנצח מבין השניים הוא זה שסכום הספרות על שלושת קלפיו הוא בדיוק 15. אם לאחר שלושת הסיבובים אין לאיש מבין השניים '15', התוצאה היא תיקו. בפריסת הקלפים הפשוטה המוצעת, המשחק בהחלט מבלבל. (ב) בשינוי פריסת הקלפים, כל שורה, טור או אלכסון בריבוע יוצרים שלשה שסכומה 15! כעת המשחק פשוט ומוכר – זהו ה'אי-קס-מי-קס-דריקס'! והכל יודעים לשחק זאת! הנה כי כן, בייצוג המתאים, בעיה סבוכה באה על פתרונה הפשוט, וידע הגלום במשחק מוכר עובר על ידי הייצוג למשחק חדש. (Simon, 1981).

למרות שהייצוג על ידי דיאגרמת Roth לבדה, עם שימוש במטריצת הפגישות, כפי שיטתם של Langefors וממשיכי דרכו, השיג ביעילות את מטרתו - אנאליזה של מבנים, אין בו כלל משום האמור לגבי ייצוג כולל, ולא ניתן למצוא בו את היתרונות האמורים.

בשנים האחרונות, כחלק מהתעוררות כלל-עולמית של עולם המבנים לנוכח ההישגים של ייצוגים מוכללים בתחומי ההנדסה האחרים, התפתח מחדש קו המחשבה שהותווה על ידי Kron לפני ארבעים שנה. שני הישגים חשובים במסגרת מאמץ זה הם ייצוג איזומורפי של מסבך, המבוסס על תורת הגרפים (Shai, 2001c), וייצוג מבנה על ידי מטרואיד דרך המשוואות המבוססות על הטופולוגיה האלגברית (Kaveh, 1974, 1995). נדבך נוסף הוא הרחבת הייצוג של מסבך על ידי מטרואיד דרך הקשר לייצוג על ידי גרף התנגדות (Shai, 2001c).

1.2. מטרת המחקר

- היעד העיקרי במחקר המוצג בעבודה זו, לאור האמור לעיל, הוא לפתח ייצוג קומבינטורי איזומורפי למבנה הכולל אלמנטי מסגרת קורה ומסבך, כשמוטבעות בו בייצוג כל התכונות הגלומות במבנה.
- לאחר שיפותח הייצוג, כל תהליכי הניתוח וחקירת התכונות המיוחדות של המבנה יבוצעו דרך הייצוג האיזומורפי.
- המטרה הכללית יותר היא העברת ידע ושיטות בין תחומים שונים דרך הייצוג, ועל כן הגישה במחקר היא לבחור בייצוג שנעשה בו כבר שימוש בתחומים נוספים בהנדסה, ובכך לאפשר ראייה רחבה יותר על נושאים בתורת המבנים.

בעבודה זו ייבנה מן היסוד ייצוג כולל של מבנה על ידי גרף. תחילה ייבחנו ההיבטים הבעייתיים בייצוג המבנה על ידי גרף זרימות (פרק 2), ולאחר מכן ייבנה גרף המייצג את המבנה הן על ערכי הכוחות שבו, והן על ערכי ההזזות (פרק 3). לגרף המייצג תפוח שיטת פתרון המבוססת על שיטות מוכרות מתורת הגרפים (פרק 4), ולסיום ייבחנו היבטים נוספים ויישומים של הייצוג (פרק 5).

לצורך פיתוח הייצוג, כמו גם להבנת תהליך התפתחות הייצוגים הקומבינטוריים בכללם, על המגמות השונות, יש להכיר תחילה את הבסיס התיאורטי של ייצוגים אלה, ולפיכך מובא בחלקו השני של פרק המבוא רקע תיאורטי בסיסי בתורת הגרפים. בסיס זה הכרחי להבנת העבודה כולה, וגם למכירים את הנושא מומלץ לקרוא אותו כפי שהוא מובא כאן, ולו כדי להכיר את הסימונים והמינוחים שישמשו במהלך העבודה.

1.3. רקע תיאורטי בתורת הגרפים

תורת הגרפים רחבת היקף, והמובא כאן מקוצר וערוך לפי צורך העבודה. להרחבה ולהעמקה בנושאים המצוינים כאן, ניתן להיעזר בכל ספר בסיסי בתורת הגרפים, כגון Swamy and Thulasiraman (1981).

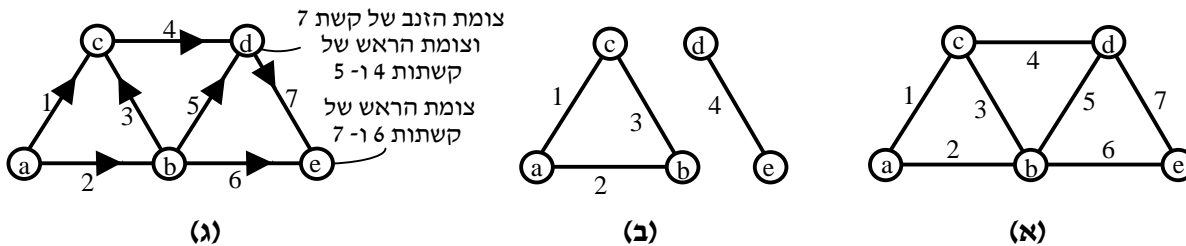
1.3.1. הייצוג הגרפי (Graph Representation)

גרף הוא אוסף צמתים (Nodes או Vertices), שמספרם יסומן ב- v , המקושרים ביניהם על ידי קשתות (Edges), שמספרן יסומן ב- e .

אם כל זוג צמתים בגרף מחובר במסלול קשתות, היינו, שמכל צומת ניתן להגיע לכל צומת באמצעות הקשתות הקיימות בגרף, הגרף הוא 'גרף קשיר' (Connected Graph).

ניתן לייחס כיוון לקשת, היינו, לציין אחד מצמתי הקצה של הקשת כצומת זנב, שממנו יוצאת הקשת, ואת צומת הקצה שאליו הקשת נכנסת - כצומת ראש. אם לכל קשת מיוחס כיוון, אזי הגרף הוא 'גרף מכוון' (directed graph).

העבודה תתמקד בגרף קשיר מכוון. עם זאת, רוב התוצאות בעבודה נכונות גם לגבי גרף שאינו כזה.



איור 1.3: גרף, קשירות וכיווניות

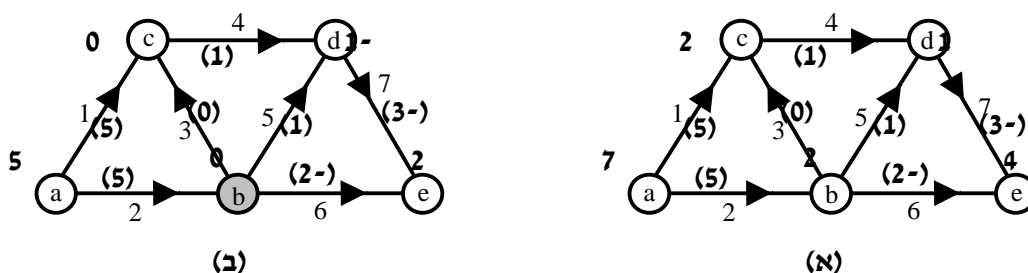
אותיות קטנות מסמנות צמתים, ומספרים – קשתות. (א) גרף קשיר בלתי-מכוון. $e=7, v=5$. (ב) גרף בלתי-קשיר. $e=4, v=5$. (ג) גרף קשיר מכוון.

1.3.2 פוטנציאל זרימה

ניתן לייחס לכל צומת בגרף ערך פוטנציאל אופייני, המציין את מיקום הצומת במרחב הקשור לגרף. לדוגמה, אם הגרף מייצג רשת חשמלית, המרחב הקשור אליו הוא מרחב הפוטנציאל החשמלי, וכל צומת יאופיין בפוטנציאל החשמלי של הנקודה ברשת שאותה הוא מייצג. מרחב זה הוא חד-מימדי, ולכן הפוטנציאל המיוחס לצומת הוא סקלרי.

אם המרחב הוא רב-מימדי, יהיה פוטנציאל הצומת וקטור של ערכים. לדוגמה, אם הגרף מייצג רשת תחבורה, השדה הקשור אליו הוא השדה הגיאוגרפי הדו-מימדי, וכל צומת בו יאופיין בוקטור דו-מימדי המציין את שתי קואורדינטות השדה השייכות לנקודה שאותה מייצג הצומת.

כל עוד שדה הפוטנציאל בגרף אינו תלוי בגורמים אחרים (ור' להלן – סעיף 1.2.6 - גרף התנגדות), פוטנציאל הצומת יכול להיקבע שרירותית, מבלי להשפיע על הפוטנציאלים של יתר הצמתים. יתר על כן, לא ניתן להשפיע על פוטנציאל צומת על ידי שינוי הפוטנציאלים של יתר הצמתים. לפיכך, כמספר הצמתים, v , כן מספר הפוטנציאלים הבלתי-תלויים (איור 1.4א).



איור 1.4: פוטנציאל צמתים והפרש פוטנציאלים בקשתות

(א) ערכי הפוטנציאל נתונים ליד הצמתים במספרים מודגשים, והפרשי הפוטנציאל נתונים ליד הקשתות בסוגריים. פוטנציאל הצמתים נקבע שרירותית (במקרה זה, הערכים הם גימטרייה קטנה של אותיות 'ערכים'), והפרשי הפוטנציאלים בקשתות מחושבים לפי פוטנציאל זנב פחות פוטנציאל ראש. (ב) הצומת b נבחר כייחוס, והפוטנציאל שלו הוא 0. ניתן לקבוע שרירותית את ה.פ. הצמתים האחרים ביחס אליו (ה.פ. – הפרש פוטנציאלים). כאן הותאמו הפרשי הפוטנציאל לאיור א, ולפיכך בהפרשי הפוטנציאל של הקשתות לא חל כל שינוי.

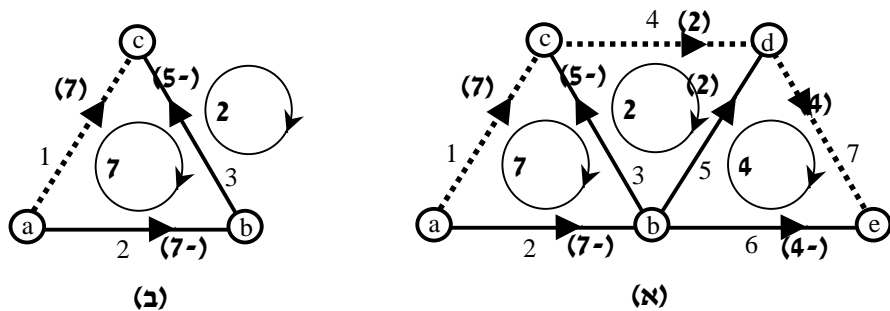
ההפרש בין פוטנציאלים של צמתים נקרא 'הפרש פוטנציאלים' (יסומן לעיתים בקצרה – 'ה.פ.'). בפרט, ה.פ. על פני קשת הוא ההפרש בין פוטנציאל צומת הזנב לבין פוטנציאל צומת הראש. בדרך כלל,

משמעות ערך הפוטנציאל של צומת נקבעת לפי יחסו לפוטנציאלים של צמתים אחרים. לפיכך, ניתן לקבוע צומת אחד בגרף כצומת ייחוס שהפוטנציאל שלו הוא אפס, ואז לקבוע את ה.פ. הצמתים ביחס לצומת הייחוס במקום לקבוע ישירות את פוטנציאל הצמתים. במקרה זה יש רק $v-1$ ערכים בלתי-תלויים של ה.פ. במקום v ערכי פוטנציאל בלתי-תלויים (איור 1.4 ב).

מלבד ערכי פוטנציאל שניתן לייחס לצמתי הגרף, ניתן לייחס לגרף גם זרימה. הזרימה היא מעבר של ערכים דרך קשתות הגרף, כך שבכל קשת זורם ערך אופייני מצומת הזנב לצומת הראש.

זרימה היא תופעת רצף, ולא ניתן לקבוע זרימה לאורך קשת, או לאורך כל קטע שהוא, מבלי לקבוע מסלול משלים דרכו תחזור הזרימה מצומת הראש לצומת הזנב. למעשה, כדי ליזום באופן שרירותי זרימה של ערך בגרף יש לציין מסלול סגור שבו יזרום הערך. מסלול סגור כזה נקרא מעגל.

ניתן למצוא בגרף מעגלים רבים, אך יש קבוצה מינימלית של מעגלים שהיא בלתי תלויה, היינו, שמחד ניתן לקבוע זרימה בכל אחד ממעגלי הקבוצה מבלי להשפיע על הזרימה ביתר מעגלי הקבוצה, ומאידך, לא ניתן להשפיע על ערך זרימה באחד ממעגלי הקבוצה על ידי שינוי ערכי הזרימה ביתר המעגלים. קבוצת המעגלים הבלתי-תלויים הפשוטה ביותר לבחירה היא קבוצת פיאות הגרף (איור 1.5).



איור 1.5: מעגלי זרימה וזרימה בקשתות

(א) ערכי הזרימה נתונים בכל מעגל במספרים מודגשים, והזרימות בקשתות - בסוגריים. מעגלי הפיאות הם בלתי-תלויים (פיאה – תא הנוצר על ידי מסלול קשתות סגור, ללא קשתות החותכות אותו), ולפיכך הזרם בהם נקבע שרירותית (במקרה זה, הערכים הם גימטרייה קטנה של אותיות 'זרם'). לכל אחד מן המעגלים יש קשת מייצגת (מסומנת בקו מרוסק) שכיוונה כיוון הזרימה, ושאינה משותפת עם מעגלים בלתי-תלויים אחרים. לפיכך, ניתן למספר את המעגלים לפי מספר הקשת המייצגת. לדוגמה, המעגל בו זורם הערך 2 הוא מעגל מספר '4', ובמעגל '1' הזרימה היא 7. במקום לקבוע את הזרימה במעגלים, ניתן לקבוע את הזרימה בקשתות המייצגות 1, 4 ו-7. (ב) כך מחושבת הזרימה בקשתות מעגל '1': קשת 1 היא המייצגת, ולכן הזרימה בה היא כערך זרימת המעגל – 7. כיוון קשת 2 מנוגד לכיוון הזרימה במעגל, לכן סימן הזרימה בה הפוך - 7. קשת 3 משותפת עם מעגל 4, לכן הזרימה בה היא סכום הזרימות במעגל 1 (בסימן הפוך כי כיוונה מנוגד) ובמעגל 4: $2+7=-5$.

יודגש כי בשינוי ערך הזרימה במעגל משתנה ערך הזרימה של קשת המשותפת עם מעגל אחר, אך אם מדובר בשני מעגלים בלתי תלויים, עדיין יהיו במעגל האחר קשתות שזרימתן לא תשתנה ותהיה תלויה אך ורק בערך הזרימה של אותו מעגל. במילים אחרות, לכל מעגל בלתי-תלוי יש קשת מייצגת אחת שהזרימה בה מגדירה את זרימת המעגל, ויכולה להיקבע שרירותית, מבלי להשפיע על הזרימה בקשתות המייצגות את יתר המעגלים הבלתי-תלויים, ומבלי להיות מושפעת על ידן.

כמו בפוטנציאל הצמתים, גם ערכי הזרימה יכולים להיות חד-מימדיים או רב-מימדיים.

ערכי הפוטנציאל מוגדרים לצמתים וערכי הזרימה מוגדרים למעגלים. אלא שברוב המקרים הבעיה הפיסיקלית מוגדרת באמצעות הקשתות, ואילו לצמתים ולמעגלים יש חשיבות משנית. לפיכך, רצוי לנסח את הפוטנציאל בצמתים והזרימה במעגלים באמצעות מושגים הקשורים לקשתות.

לקשת - צומת זנב וצומת ראש. אחד מן הערכים הקשורים לפוטנציאל שניתן לייחס לקשת הוא הפרש הפוטנציאלים על פני הקשת, המוגדר כהפרש בין פוטנציאל צומת הזנב לפוטנציאל צומת הראש. לפיכך בקשת כלשהי, j , מתקיים:

$$(1.1) \quad \Delta_j = \Pi_{t(j)} - \Pi_{h(j)}$$

כמובן, שמימדי הפרש הפוטנציאל מתאימים למימדי הפוטנציאל. הפרש פוטנציאל בין כל שני צמתים בגרף יחושב לפי סכום הפרשי הפוטנציאלים של הקשתות במסלול המחבר בין הצמתים. לעומת זאת, פוטנציאל של צומת לא יוכל להתחשב באמצעות הפרשים בלבד, אלא אם מוגדר צומת ייחוס שהפוטנציאל שלו ידוע. בעזרת הפרשי הפוטנציאלים של הצמתים ביחס לצומת הייחוס ניתן לחשב את פוטנציאל הצמתים.

התחליף במושגי קשת לקביעה שרירותית של פוטנציאל צומת הוא קביעה שרירותית של הפרש הפוטנציאל על פני קשת. אלא שכך לא ניתן לקבוע שרירותית את הפרשי הפוטנציאלים בכל הקשתות. במסלול סגור המכיל c קשתות ניתן לקבוע שרירותית רק $c-1$ הפרשי פוטנציאלים. הפרש הפוטנציאל על פני הקשת הנותרת יתקבל מסיכום הפרשי הפוטנציאלים ביתר קשתות המסלול. להלן יתברר יחס הדוק בין מעגלי זרימה בלתי-תלויים וקשתות הייצוג שלהם לבין מעגלים שהפרשי הפוטנציאלים בקשתות שלהם בלתי תלויים למעט קשת תלויה אחת בכל מעגל.

קשת בה ה.פ. נקבע שרירותית נקראת קשת מקור ה.פ., או בקצרה – 'מקור ה.פ.' (P.D. Source).

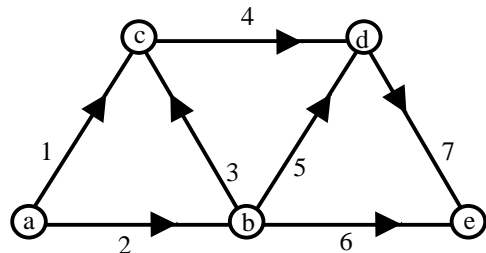
זרימה במונחי קשת קלה יותר להגדרה, והיא הזרימה בקשת בכיוון המיוחס לה. אלא שקביעה שרירותית של זרימה בקשת דורשת להגדיר תחילה את קבוצת המעגלים הבלתי-תלויים, ובכל מעגל כזה להגדיר את הקשת המייצגת, ורק בקשתות המייצגות ניתן לקבוע שרירותית את הזרימה.

קשת בה הזרימה נקבעת שרירותית נקראת קשת מקור זרימה, או – 'מקור זרימה' (Flow Source).

כפתיחה לניסוחים אלגבריים אשר יקלו את הטיפול בגרף ואת ניתוחו, תוצג כאן מטריצת הפגישות (Incidence Matrix). במטריצה זו, שסימונה \bar{A} , כל עמודה מייצגת קשת בגרף, וכל שורה – צומת. בכל עמודה יש 1 בשורה המתאימה לצומת הזנב של הקשת, ו-1 בשורה המתאימה לצומת הראש. לפי השורות ניתן לדעת אלו קשתות מיוחסות לכל צומת, והאם הן יוצאות ממנו או נכנסות אליו.

$$\bar{A}(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

מטריצת הפגישות של גרף G (ב)



גרף G (א)

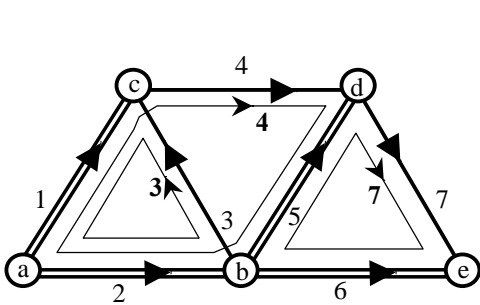
איור 1.6: גרף וייצוגו על ידי מטריצת פגישות (Incidence Matrix)

קשת 5 יוצאת מצומת b ונכנסת לצומת d. טופולוגיה זו מבוטאת בעמודה 5 במטריצה. כמו כן, בשורה c ניתן לראות, לפי ערכי השורה, כי הקשתות 1 ו-3 נכנסות לצומת c, ואילו קשת 4 יוצאת ממנו. זו בדיוק הטופולוגיה המיוצגת בגרף.

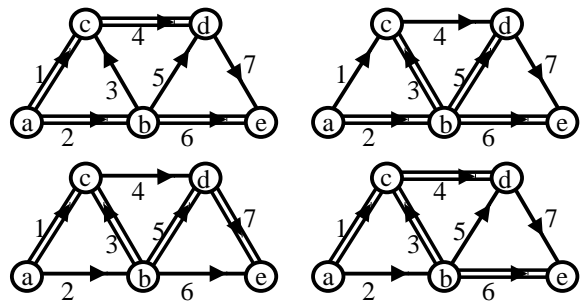
הערה: בעבודה זו נעשית הבחנה בין מטריצה וקטורית, המתייחסת לקשתות ולערכיהן כגודל אחד, ולמעשה מייצגת את הטופולוגיה הכללית בייצוג, לבין מטריצה סקלרית, המפורטת למימדי הייצוג ומתייחסת לערכים הסקלריים הקשורים לייצוג. מטריצה וקטורית תסומן \bar{A} , וכל אלמנט בה מתייחס לוקטור רב-מימדי, בעוד מטריצה סקלרית תסומן בפשוטות - A.

ייצוג זה קל לבניה אך יש בו מן הבזבוז, שכן דרגת המטריצה נמוכה מן המימד הקטן שלה.

כאמור, תלות בין ה.פ. של קשתות נוצרת כשהקשתות סוגרות מעגל. כמו כן, ניתן יהיה לבטא ה.פ. בין כל זוג צמתים בגרף אם יש בין כל זוג צמתים מסלול רציף של קשתות. לפיכך, תהיה תועלת בבחירת תת-גרף המכיל את כל הצמתים וכן קבוצה מינימלית של קשתות המקשרת בין כל הצמתים מבלי להכיל מעגל. תת-גרף כזה נקרא 'עץ פורש' (Spanning Tree), והוא אחד הכלים המרכזיים בתורת הגרפים, שעוזר לבטא את יחסי התלות בין ה.פ. של הקשתות השונות וכן את יחסי התלות בין הזרימות השונות.



(ב)



(א)

איור 1.7: עץ פורש, ענפים וקישורים

(א) דוגמאות לעצים פורשים אפשריים לגרף. ענפי העץ מסומנים בקו כפול. כל אחד מן העצים מכיל את כל הצמתים אך אינו מכיל מעגלים. (ב) דוגמה נוספת לעץ פורש. קישור יכול להיות מוכלל במעגלים רבים, אך רק אחד מהם יכול, חוץ מהקישור, ענפים בלבד. מעגל כזה הוא מעגל יסודי, וכל המעגלים היסודיים של העץ מסומנים בקו דק. (לדוגמה, הקבוצה {3,4,7,6} היא מעגל, אך מעגל הכולל את הקישור 4 בתוספת ענפים בלבד יש רק אחד: {4,5,2,1}). כיוון הזרימה במעגלים אלה נקבע לפי כיוון הקישור. לדוגמה, במעגל {4,5,2,1} הקישור 4 קובע את כיוון הזרימה, ואז הענפים 5 ו-2 מנוגדים לכיוון הזרימה במעגל זה, וכיוון ענף 1 הוא ככיוון הזרימה במעגל.

הקשתות הנכללות בעץ הפורש נקראות 'ענפים' (branches), קבוצת הענפים בגרף מסומנת $T(G)$, או

בקצרה - T, ומספר הענפים, כצפוי, הוא:

$$(1.2) \quad |T| = v - 1$$

ה.פ. של הענפים אינם תלויים זה בזה, אך הם קובעים את ה.פ. בין כל זוג צמתים (לפי מסלול הענפים המקשר בין בני הזוג). לפיכך, הוא גם קובע את ה.פ. בין זוג צמתים שבקצות כל קשת שאינה נכללת בעץ, וכך ה.פ. של כל יתר הקשתות שאינן נכללות בעץ - ידוע. הקשתות שאינן נכללות בעץ נקראות 'קישורים' (chords), קבוצת הקישורים בגרף מסומנת $C(G)$ או בקצרה C , ומספר הקישורים הוא:

$$(1.3) \quad |C| = e - |T| = e - v + 1$$

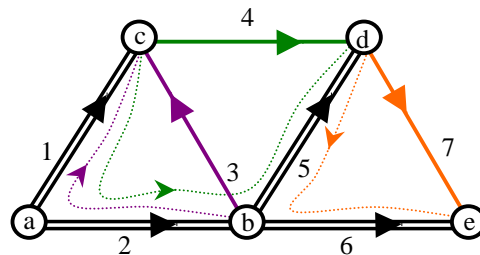
כל קישור בגרף יוצר מעגל עם ענפים, שכן מצומת הזנב של הקישור לצומת ראשו ניתן להגיע בשני אופנים; דרך הקישור ודרך ענפי העץ הפורש, שמהגדרתו הוא מקשר בין כל שני צמתים בגרף. אמנם אפשר לבנות גם מעגל הכולל מס' קישורים, אך כיוון שניתן למצוא לכל קישור השלמה למעגל באמצעות ענפים בלבד, הרי שאפשר לקבוע באופן בלתי תלוי את הזרימה בכל קישור בלי להשפיע על הזרימה בקישורים אחרים. אם כך, העץ הפורש מגדיר קבוצת מעגלים בלתי תלויים של זרימה, ובפרט מגדיר את הקשתות המייצגות את המעגלים האלה – הקישורים. יתר על כן, קבוצה זו היא מכסימלית, ולא ניתן למצוא מעגל בלתי תלוי נוסף וקשת המייצגת אותו, שכן מלבד הקישורים יש רק ענפים, וענפים מטבעם לא יכולים לסגור מעגל ללא עזרת קישור. קישור זה כבר מייצג מעגל עם ענפים, וכיוון שלא ייתכן שהוא משתתף בשני מעגלי ענפים שונים, כי זה אומר שענפים סוגרים לבדם מעגל – סתירה למבנה העץ, הרי שזה אותו מעגל המיוצג כבר על ידי הקישור. לפיכך, כמספר הקישורים כן מספר המעגלים הבלתי תלויים.

בהתאם ללוגיקה שתוארה, ניתן לנסח אלגברית את קשרי התלות של ה.פ.-ים והזרמים במושגי העץ הפורש. תחילה ה.פ.-ים. תהי \vec{Q} מטריצה ששורותיה מייצגות את ענפי העץ הפורש, ועמודותיה – את קשתות הגרף. החץ מסמן שהמטריצה היא וקטורית, היינו, שכל אלמנט בה מתייחס לכל המימדים בקשת, והטופולוגיה, שמיוצגת על ידי המטריצה, זהה לכל מימדי הגרף. בכל עמודה מוגדרת תלות הקשת בענפים לפיה מחושב ה.פ. באותה קשת. וכך, אם העמודה מייצגת ענף, הרי ה.פ. בענף אינו תלוי כי אם בענף עצמו, ולפיכך יופיע 1 בשורה המתאימה לאותו ענף. לעומת זאת, אם העמודה מייצגת קישור, יהיה ה.פ. באותו קישור צירוף של ה.פ. הענפים המשתתפים במסלול המקשר את צומת זנב הקישור עם צומת ראשו וסוגר מעגל עם הקישור, ואז בשורות המתאימות לענפים המשתתפים במסלול, יופיעו 1 בשורות הענפים שכיוונם ככיוון המסלול ו-1 בשורות הענפים שכיוונם מנוגד לכיוון המסלול. מבנה נוח יתקבל במטריצה אם העמודות הראשונות יוקצו לענפים, ויסודרו בהתאם לסדר הענפים בשורות, והעמודות הנותרות יוקצו לקישורים. כך, התת-מטריצה עם עמודות הענפים, \vec{Q}_T , תהיה מטריצת יחידה, וכל יתר העמודות ירכיבו את התת-מטריצה עם עמודות הקישורים, \vec{Q}_C .

לפי אופן בנייה זה, ניתן לחשב את ה.פ. בקישורים לפי:

$$(1.4) \quad \vec{\Delta}_C = \vec{Q}_C^t \cdot \vec{\Delta}_T$$

$$\bar{Q}(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



(ב) מטריצת החתכים של גרף G

(א) גרף G ועץ פורש

איור 1.8: מטריצת החתכים – המשמעות הראשונה

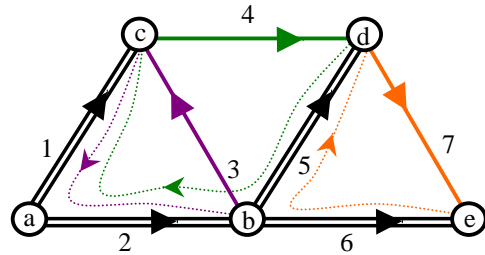
ניתן להביע ה.פ. בקשת באמצעות ה.פ. של ענפים בלבד. החלק השמאלי של המטריצה \bar{Q} (העמודות המייצגות את הענפים) הוא מטריצת יחידה, כיוון שה.פ. של הענף מובע באמצעות עצמו. החלק הימני של המטריצה מתאר כיצד ניתן להביע ה.פ. בקישורים. לדוגמה, ה.פ. על פני קישור 3 (סגול) יחושב על ידי ה.פ. על פני מסלול הענפים החלופי $\{2,1\}$ (סגול מרוסק). המסלול החלופי מקביל בכיוונו לקישור המקורי. כיוון שקשת 2 במסלול החלופי מנוגדת בכיוונה לכיוון המסלול, ה.פ. הנתרם על ידה נלקח בסימן הפוך. לכן בעמודה המתאימה לקישור 3 יופיעו ערכים רק בשורות המתאימות לענפים 1 ו-2, כשב-2 הערך הוא 1 כדי לציין את ההיפוך. באותו אופן נבנות העמודות של יתר הקישורים. כל קישור והמסלול החלופי לו מודגשים בצבע מבדיל. (כבר בשלב זה ניתן לשים לב, כי כל קישור יוצר מעגל עם המסלול החלופי לו, ושאלה בדיוק המעגלים המוראים באיור 1.7).

גם כאן, החץ מעל וקטור ה.פ. מציינ כי כל ערך בו הוא ערך וקטורי, כלומר שהוא יוקטור של וקטורים. סימון זה ישמש גם בהמשך, לכל מטריצה או וקטור שכל אלמנט בהם הוא רב-מימדי. את (1.4) ניתן להכליל כך:

$$(1.5) \quad \bar{\Lambda} = \bar{Q}^t \cdot \bar{\Delta}_T$$

באותו אופן תחושב הזרימה בקשתות. תהי \bar{B} מטריצה ששורותיה מייצגות את הקישורים, ועמודותיה – את כל קשתות הגרף. בכל עמודה מוגדרת תלות הקשת בקישורים לפיה מחושבת הזרימה באותה קשת. וכך, אם העמודה מייצגת קישור, הרי הזרימה בקישור אינה תלויה כי אם בקישור עצמו, ולפיכך יופיע 1 בשורה המתאימה לאותו קישור. לעומת זאת, אם העמודה מייצגת ענף, תהיה הזרימה באותו ענף צירוף של זרימות הקישורים הסוגרים מעגלים שבהם משתתף אותו ענף, ואז בשורות המתאימות לקישורים שבמעגלים שלהם משתתף הענף, יופיעו 1 בשורות הקישורים שכיוונם יוצר זרימה מעגלית התואמת את כיוון הענף ו-1 בשורות הקישורים שכיוונם יוצר זרימה המנוגדת לכיוון הענף.

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_C = \mathbf{I}$$



(ב) מטריצת המעגלים של גרף G

(א) גרף G ועץ פורש

איור 1.9: מטריצת המעגלים – המשמעות הראשונה

ניתן להביע זרימה בקשת באמצעות זרימה בקישורים בלבד. החלק הימני של המטריצה $\bar{\mathbf{B}}$ (העמודות המייצגות את הקישורים) הוא מטריצת יחידה, כיוון שהזרימה בקישור מובעת באמצעות עצמו. החלק השמאלי של המטריצה מתאר כיצד ניתן להביע זרימה בענפים. לדוגמה, הזרימה בענף 2 היא צירוף של שתי הזרימות העוברות בקישורים 3 ו-4. זרימות אלה (ירוק וסגול) עוברות גם בענף 2, כיוון שענף זה משתתף במעגלים היסודיים של הקישורים 3 ו-4. כיוון הזרימה בכל מעגל מוכתב על ידי כיוון הקישור המשתתף בו. הכיוון במעגל של קישור 3 (סגול) מתאים לכיוון הענף 2, אך כיוון המעגל של קישור 4 (ירוק) מנוגד לכיוון הענף, ולכן הזרימה הנתרמת על ידו נלקחת בסימן הפוך. בעמודה המתאימה לענף 2 יופיעו ערכים רק בשורות המתאימות לקישורים 3 ו-4, כשב-4 הערך הוא 1- כדי לציין את ההיפוך. באותו אופן נבנות העמודות של יתר הענפים. כל קישור והמעגל הקשור אליו מודגשים בצבע מובדיל. (ניתן לשים לב, כי ההבדל בין האיור למטריצת החתכים לבין האיור למטריצת המעגלים הוא בכיווני המסלולים המרוסקים בלבד. עובדה זו היא הבסיס להיפוך הסימן בקשר בין המטריצות שבנוסחה (1.8)).

גם כאן יתקבל מבנה נוח במטריצה אם העמודות הראשונות יוקצו לענפים, והעמודות הנותרות יוקצו לקישורים, ויסודרו בהתאם לסדר הקישורים בשורות. כך, העמודות הראשונות ירכיבו את התת-מטריצה $\bar{\mathbf{B}}_T$, ואילו התת-מטריצה עם עמודות הקישורים, $\bar{\mathbf{B}}_C$, תהיה מטריצת יחידה.

לפי אופן בנייה זה, ניתן לחשב את הזרימות בענפים לפי:

$$(1.6) \quad \bar{\mathbf{F}}_T = \bar{\mathbf{B}}_T' \cdot \bar{\mathbf{F}}_C$$

ובכלל:

$$(1.7) \quad \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{B}}' \cdot \bar{\mathbf{F}}_C$$

המשמעות שניתנה למטריצות $\bar{\mathbf{Q}}$ ו- $\bar{\mathbf{B}}$ לעיל היא הראשונה, ומשמשת לבנייה קלה של המטריצות. המשמעות הראשונה מבוססת על תפקיד העמודות במטריצות – ה.פ. לעמודות $\bar{\mathbf{Q}}$ זרימה לעמודות $\bar{\mathbf{B}}$.

כעת תינתן משמעות שניה למטריצות, לפי תפקיד השורות. שורה במטריצה $\bar{\mathbf{Q}}$ מייצגת ענף. הכניסות השונות מ-0 באותה שורה עומדות אחת כנגד הענף המיוצג על ידי השורה, והיתר כנגד קישורים שהענף סוגר איתם מעגל. מכאן שתי מסקנות חשובות:

המסקנה האחת – קטע השורה השייך לעמודות הקישורים, מציין את הקישורים הסוגרים מעגל עם הענף המתאים לשורה, וזה בדיוק תפקיד העמודה, במטריצה B, המייצגת את הענף. אלא שיש הבדל אחד – בעוד שעמודת ענף במטריצה $\bar{\mathbf{B}}$ כוללת קישורים הסוגרים עם הענף מעגלי זרימה, ולפיכך כיוון חיובי הוא זה המכוון לפי הזרימה במעגל, הרי שעמודת קישור ב- $\bar{\mathbf{Q}}$ כוללת ענפים, שאמנם יוצרים מעגל עם הקישור, אך תפקידם הוא לגשר בין צמתי הקישור באותו כיוון הפרש פוטנציאלים, וכיוון חיובי של הענף

הוא לפיכך במקביל לקישור. מכאן שהכיוונים החיוביים של ענף ביחס לקישור במטריצה \bar{Q} ובמטריצה \bar{B} – הפוכים זה לזה. אם כן, קטע השורה של ענף במטריצה \bar{Q} השייך לעמודות הקישורים זהה לעמודה המתאימה לענף במטריצה \bar{B} , רק בסימן הפוך. ובאופן כללי, קבוצת עמודות המטריצה \bar{Q} המייצגות קישורים, \bar{Q}_C , היא שיחלוף, בסימן הפוך, של קבוצת עמודות המטריצה \bar{B} המייצגות ענפים, \bar{B}_T . היינו,

$$(1.8) \quad \bar{Q}_C = -\bar{B}_T^t$$

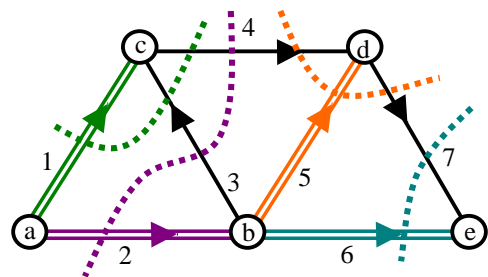
ולחלופין:

$$(1.9) \quad \bar{B}_T = -\bar{Q}_C^t$$

המסקנה השניה – בכל ענף, המיוצג על ידי שורה ב- \bar{Q} , הקשר בין קבוצת הצמתים בעץ המקושרים לצומת הזנב של הענף ובין קבוצת הצמתים המקושרים לראש הענף נעשה בשני אופנים; בעזרת הענף עצמו ובעזרת הקישורים היוצרים איתו מעגל, קרי, הקישורים המיוצגים על ידי כניסה שונה מ-0 בשורת הענף במטריצה \bar{Q} . מכאן, שבהסרת הענף, והקישורים הסוגרים איתו מעגל, מתוך הגרף, הגרף 'נחתך' לשתי קבוצות צמתים נפרדות. עם זאת, מספיקה קשת אחת כלשהי מתוך התת-קבוצה הזו כדי להחזיר את הגרף למצב קשיר. תת-קבוצה כזו, שבהסרתה נחתך הגרף, והיא מינימלית ביחס לתכונה זו (היינו, שיש להסיר את כל קשתות התת-קבוצה כדי לקיים את החיתוך) נקראת 'קבוצת חתך' (Cut-set), או בקצרה – 'חתך'. לפיכך, כל שורה במטריצה \bar{Q} מייצגת חתך, ותכונה זו היא אשר הקנתה למטריצה את שמה הרשמי – 'מטריצת החתכים' (Cut-set Matrix).

$$\bar{Q}(G) = \begin{array}{c|cccc|cccc} & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & \\ \hline 1 & 1 & \circ & \circ & \circ & 1 & -1 & \circ & \\ \hline 2 & \circ & 1 & \circ & \circ & -1 & 1 & \circ & \\ \hline 5 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & 1 & -1 & \\ \hline 6 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & 1 & \\ \hline \end{array}$$

ג (ב) מטריצת החתכים של גרף G



א (א) גרף G, עץ פורש וחתכים

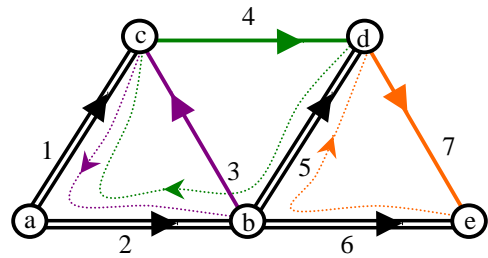
איור 1.10: מטריצת החתכים – המשמעות השניה

(א) כל ענף מגדיר חתך - קבוצת קשתות יסודית (היינו, מכילה ענף אחד והיתר - קישורים) שהסרתה מחלקת את צמתי הגרף לשתי קבוצות. לדוגמה, ענף 1 (ירוק) הוא גשר בין הצומת c לבין הצומת a ושאר הצמתים המחוברים אליו באמצעות יתר הענפים. לכן, ענף 1 מגדיר חתך (ירוק מרוסק) המחלק את הצמתים לשתי קבוצות: {c} ו- {a,b,d,e}. בחתך נכללים הענף עצמו והקישורים המחוברים בין קבוצות הצמתים (עליהם עובר הקו המרוסק), היינו: {1,3,4}. הענף גם מגדיר את כיוון החתך: ענף 1 עובר מקבוצה {a,b,d,e} לכיוון קבוצה {c}, ולכן קישור 3 הוא בכיוון החתך גם כן, בעוד קישור 4 מנוגד לכיוון החתך. (ב) את כל האמור ניתן למצוא במטריצת החתכים. לדוגמה, השורה הראשונה מיוחסת לענף אחד ולחתך המוגדר על ידו. ניתן לראות שאיברי השורה השונים מ-0 מיוחסים לקשתות המשתתפות בחתך, ובעוד שבמקומות המתאימים לקשתות 1 ו-3 הערך הוא חיובי, במקום המתאים לקשת 4 הערך שלילי ומציין את הניגוד לכיוון החתך.

יצוין שחתך כללי יכול להיווצר ללא קשר לעץ הפורש, אך חתכים המבוססים על עץ פורש, ומכילים ענף יחיד בתוספת הקישורים המתאימים, נקראים 'חתכים יסודיים' (Fundamental Cutsets). קבוצה זו

של חתכים היא בסיס הפורש את מרחב החתכים בגרף. היינו, חתכים אלה בלתי-תלויים (ולכן שורות המטריצה \bar{Q} בלתי-תלויות ליניארית), וכל חתך שהוא בגרף הוא צירוף ליניארי של חתכים אלה. כיוון שבעבודה זו ישמשו חתכים יסודיים בלבד, הם יקראו כאן 'חתכים' לשם הקיצור.

$$\bar{B}(G) = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 7 \end{array} \begin{array}{|cccc|cccc|} \hline & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ \hline -1 & 1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \\ \hline 1 & -1 & -1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \\ \hline \circ & \circ & 1 & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 \\ \hline \end{array}$$



(ב) מטריצת המעגלים של גרף G

(א) גרף G, עץ פורש ומעגלים

איור 1.11: מטריצת המעגלים – המשמעות השניה

(א) כל קישור מגדיר מעגל זרימה יסודי (היינו, מעגל המכיל קישור אחד, והיתר – ענפים). לדוגמה, קישור 3 (סגול) מחבר את הצמתים b ו-c, וחייבור נוסף בין צמתים אלה באמצעות ענפים בלבד יכול להתבצע באופן בלעדי על ידי ענפים 1 ו-2. לכן הקבוצה {1,2,3} היא המעגל היסודי המוגדר על ידי קישור 3. כיוון הזרימה בכל מעגל מוכתב על ידי כיוון הקישור המשתתף בו. הכיוון של ענף 2 מתאים לכיוון הזרימה של קישור 3 במעגל {1,2,3}, אך כיוון ענף 1 מנוגד לכיוון הזרימה במעגל זה. (ב) את האמור ניתן למצוא בניסוח הגרף על ידי מטריצת המעגלים, שבה כל שורה מתאימה לקישור, ומייצגת את המעגל היסודי המוגדר על ידו. לדוגמה, השורה הראשונה מתאימה לקישור 3, ולכן מכילה ערכים שונים מ-0 רק במקומות המתאימים לקשתות {1,2,3}, כשהערך המתאים לקשת 1 הוא שלילי, כדי לציין את הניגוד לכיוון הזרימה המוגדר במעגל על ידי הקישור 3.

באופן דומה ניתן לבחון את שורות המטריצה \bar{B} . כל שורה מייצגת קישור, וכניסותיה השונות מ-0 מייצגות מעגל המורכב מהקישור המיוצג עצמו ומכל הענפים המקשרים במסלול את צומת זנבו עם צומת ראשו.

מלבד עובדת הצימוד בין עמודות הענפים של \bar{B} לעמודות הקישורים של \bar{Q} , שצויינה קודם, יש חשיבות גם לקבוצת המעגלים המיוצגים על ידי שורות \bar{B} . כבר צויין שאלה מעגלים בלתי-תלויים. בנוסף לכך, הם גם פורשים את מרחב המעגלים שבגרף, וכל מעגל שהוא בגרף הוא צירוף ליניארי של מעגלים אלה. מעגלים אלה, המורכבים מקישור יחיד בתוספת הענפים המתאימים, נקראים 'מעגלים יסודיים' (Fundamental Circuits), וכאן, לשם הקיצור, כל עוד לא יצויין אחרת, תהיה הכוונה ב'מעגל' למעגל יסודי. משמעות זו של המטריצה \bar{B} היא שהעניקה לה את שמה – 'מטריצת המעגלים' (Circuit Matrix).

המשמעות השניה מבוססת על התפקיד הטופולוגי של השורות במטריצות: חתכים לשורות \bar{Q} ומעגלים לשורות \bar{B} .

ניתן להרחיב כעת את המשמעות הראשונה, ולומר כי עמודות \bar{Q}_C מציינות מסלולי ענפים הסוגרים מעגל עם כל אחד מן הקישורים לחישוב הפרש הפוטנציאלים בקישור, ואילו עמודות \bar{B}_T – קבוצות קישורים היוצרים חתך עם כל אחד מן הענפים לחישוב הזרימה בענף.

1.3.5 יחסי זרימה והפרש פוטנציאלים בגרף

הצבת (1.9) ב- (1.6) תיתן :

$$(1.10) \quad \vec{F}_T = -\vec{Q}_C \cdot \vec{F}_C$$

לאחר העברת אגפים :

$$(1.11) \quad \vec{F}_T + \vec{Q}_C \cdot \vec{F}_C = 0$$

ובהצגה מטריציונית מלאה :

$$(1.12) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{Q}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{F}_T \\ \vec{F}_C \end{bmatrix} = 0$$

או, בפשטות :

$$(1.13) \quad \vec{Q} \cdot \vec{F} = 0 \quad \text{חוק הזרימות}$$

כאן, כל שורה ב- \vec{Q} המוכפלת פנימית בוקטור זרימות הקיים בגרף, תוצאתה – 0. כיוון שכל שורה ב- \vec{Q} מציינת חתך, הרי שהמכפלה היא סכום הזרימות בקבוצת החתך, וסכום זה הוא אפס. תוצאה זו הגיונית למדי, ומזכירה, ולא בכדי, את חוק הזרם של קירכהוף (KCL – Kirchoff's Current Law). הטענה הנובעת ממנה היא שלא תיתכן זרימה מקבוצת צמתים לקבוצה המשלימה לה דרך קבוצת קשתות החתך המפרידה ביניהן. זרימה כזו תערער את עיקרון הרצף, ותסתור את ההנחה שזרימה היא מעגלית, וכל שהולך – חוזר.

כאן גם המקום להבהיר שוב את פשר הסימון המיוחד של המטריצה הווקטורית. הנה כל אלמנט במטריצת החתכים \vec{Q} מתייחס לגודל ווקטורי של זרימה בקשת בווקטור הזרימות \vec{F} , ומייצג את הטופולוגיה של הקשת בגרף ללא קשר לגיאומטריה שלה, או לחלוקה המימדית בתוכה.

התוצאה (1.13) נקראת 'חוק הזרימות' (Flow Law), ומוכרת גם בשם 'משוואת החתכים' (Swamy and Thulasiraman, 1981).

באותו אופן, ניתן להציב את (1.8) ב- (1.4) :

$$(1.14) \quad \vec{\Delta}_C = -\vec{B}_T \cdot \vec{\Delta}_T$$

פיתוח דומה למשוואת החתכים יניב הפעם :

$$(1.15) \quad \vec{B} \cdot \vec{\Delta} = 0 \quad \text{חוק הפוטנציאלים}$$

כאן, כל שורה ב- \vec{B} המוכפלת פנימית בוקטור ה.פ. הקיים בגרף, תוצאתה – 0. כיוון שכל שורה ב- \vec{B} מציינת מעגל, הרי שהמכפלה היא סכום ה.פ. לאורך המעגל, וסכום זה הוא אפס. גם כאן התוצאה הגיונית, ומזכירה הפעם את חוק הפוטנציאלים של קירכהוף (KVL – Kirchoff's Voltage Law).

התוצאה (1.15) נקראת 'חוק הפוטנציאלים' (Potential Law), ומוכרת גם בשם 'משוואת המעגלים' (Swamy and Thulasiraman, 1981).

את הרעיון הגלום במשוואת החתכים ובמשוואת המעגלים ניתן לעבד באופן הבא: יהי $\bar{\mathbf{F}}$ מצב זרימה כלשהו בקשתות הגרף (מסודר כשזרימות הענפים בתחילה, וזרימות הקישורים בסוף). מצב זה הוא סופרפוזיציה של $|C|$ זרימות מעגלים בלתי-תלויות בגרף, ולפיכך הזרימה בכל קשת תהיה:

$$(1.16) \quad \mathbf{F}_j = \sum_{k=1}^{|C|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \mathbf{F}_{|T|+k} \quad (j = 1, 2, \dots, |T|, |T| + 1, \dots, |G|)$$

כיוון שבכל מעגל סך ה.פ. הוא 0 (חוק הפוטנציאלים - 1.15), כלומר:

$$(1.17) \quad \sum_{j=1}^{|G|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \Delta_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, |C|)$$

הרי מכפלת ערך הזרימה של כל מעגל בסך הפרשי הפוטנציאלים של קשתות המעגל גם הוא 0:

$$(1.18) \quad \mathbf{F}_{|T+k|}^t \cdot \sum_{j=1}^{|G|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \Delta_j = 0$$

סיכום כל המכפלות בכל המעגלים יהיה גם הוא אפס:

$$(1.19) \quad \sum_{k=1}^{|C|} \left(\mathbf{F}_{|T+k|}^t \cdot \sum_{j=1}^{|G|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \Delta_j \right) = \sum_{k=1}^{|C|} \left(\sum_{j=1}^{|G|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \mathbf{F}_{|T+k|}^t \cdot \Delta_j \right) = \sum_{j=1}^{|G|} \left(\sum_{k=1}^{|C|} \mathbf{B}_{kj} \cdot \mathbf{F}_{|T+k|}^t \right) \cdot \Delta_j = 0$$

המעבר האמצעי ב- (1.19) התאפשר בגלל שכל אלמנט \mathbf{B}_{kj} במטריצת המעגלים הווקטורית הוא אלכסוני, שכן הטופולוגיה בכל המימדים היא זהה. הצבת (1.16) תתן:

$$(1.20) \quad \sum_{j=1}^{|G|} \mathbf{F}_j^t \cdot \Delta_j = 0$$

משמעות התוצאה האחרונה היא, שסך המכפלות של ה.פ. בזרימה שכל הקשתות בגרף הוא תמיד 0, אם מתקיימים חוק הזרימות וחוק הפוטנציאלים. בהצגה מטריציאליה התוצאה תיראה בפשטות כך:

$$(1.21) \quad \bar{\mathbf{F}}^t \cdot \bar{\Delta} = 0 \quad \text{משפט Tellegen:}$$

$$(1.22) \quad \bar{\Delta}^t \cdot \bar{\mathbf{F}} = 0$$

שלושת המשוואות האחרונות הן ניסוחים שונים לאחד מן המשפטים היסודיים בתורת הגרפים – משפט Tellegen (Tellegen's Theorem). כיוון שהמשפט אינו מותנה בקשר כלשהו בין הזרימות לבין ה.פ. בגרף, הרי שהוא תקף, וכך גם במקורו (Tellegen, 1952), גם כשה.פ. קשורים לגרף זה, והזרימות – לגרף אחר, ובלבד שהטופולוגיה של צמד הגרפים זהה. ניתן להיווכח בנכונות המשפט על ידי הפעלתו על שני הגרפים שווי-הטופולוגיה, גרף הפוטנציאלים שבאיור 1.4 וגרף הזרימות שבאיור 1.5. כזכור, בשניהם נקבעו הערכים הקשורים באופן שרירותי.

וודאי מתעוררת כאן תמיהה על הניסוח האלגברי של פיתוח המשפט כאן, המשתמש בסיכומים מסורבלים במקום במטריצות ובווקטורים. ובכן, הטעם לכך הוא שדרך ניסוח זה קל יותר להראות שהמשפט אינו תלוי במספר מעגלי הזרימה, וניתן לסכום עוד ועוד מעגלי זרימה לתוך (1.19), גם אם הם חופפים ותלויים ליניארית, שכן כל תוספת זרימה מעגלית משאירה בתוקף את חוק הזרימות, ועוברת דרך קשתות שסך ה.פ. שלהם הוא 0, כפי שמחייב חוק הפוטנציאלים. כל שנדרש הוא לבנות שורות מתאימות במטריצה \bar{B} , ולהמיר את זרימות הקישורים באותם ערכי זרימה המיוחסים למעגלים.

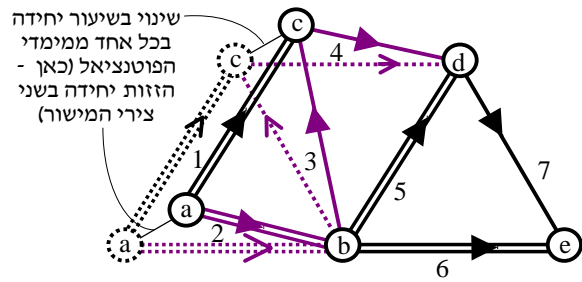
תמיהה נוספת וודאי מתעוררת על הניסוח (1.22), שאינו מוסיף דבר על הניסוח (1.21). ניסוח כפול זה מובא כדי ליצור הקבלה שלימה עם שני חוקים קודמים, בהתאמה – חוק הפוטנציאלים (1.15) (משוואת המעגלים) וחוק הזרימות (1.13) (משוואת החתכים). מן ההקבלה נראה שווקטור הזרימות (במבנה שורה) משחק תפקיד דומה לזה של מטריצת המעגלים, ואילו ווקטור ההזזות (במבנה שורה) משחק תפקיד דומה לזה של מטריצת החתכים. הקבלה זו מעידה על המשמעות השלישית של המטריצות הטופולוגיות:

המשמעות השלישית מבוססת על המצב הערכי המיוצג בשורות המטריצות: מצב ה.פ. אפשרי בשורות \bar{Q} ומצב זרימה אפשרי בשורות \bar{B} .

לפי המשמעות השלישית, שורה במטריצה \bar{Q} אינה מייצגת טופולוגיית חתך בלבד. ערכי השורה מממשים בעזרת הטופולוגיה מצב אפשרי של ה.פ. פוטנציאלים בגרף, שבו, בכל הקשתות המשתתפות בחתך, ורק בהן, יש ה.פ. בשיעור יחידה, עם סימן המתאים לכיוון הקשת: אם ה.פ. בענף המגדיר את החתך הוא חיובי, אזי ה.פ. בקישורים בעלי כיוון הפוך יהיו בסימן שלילי. כיוון שפוטנציאל הוא מיקום במרחב הקשור לגרף, הרי שניתן לראות את מצב הפרש הפוטנציאלים בשורת \bar{Q} כ'הרחקה' בשיעור יחידה של שתי קבוצות הצמתים, המופרדות על ידי החתך, זו מזו, כשבתוך כל קבוצת צמתים אין כל הזזה יחסית. ואז ה.פ. בין כל שני צמתים הוא 0, חוץ מה.פ. על קשתות שכל קצה שלהן נמצא בקבוצה אחרת של צמתים, שיהיה 1 או -1, בהתאם לכיווןן.

כל שורה במטריצה מייצגת מצב בלתי-תלוי של ה.פ. בגרף, וכל השורות פורשות את מרחב ה.פ. כולו, היינו, כל מצב ה.פ. המקיים את חוק הפוטנציאלים הוא צירוף ליניארי של המצבים המוגדרים בשורות מטריצת החתכים.

$$\bar{Q}(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



(ב) מטריצת החתכים של גרף G

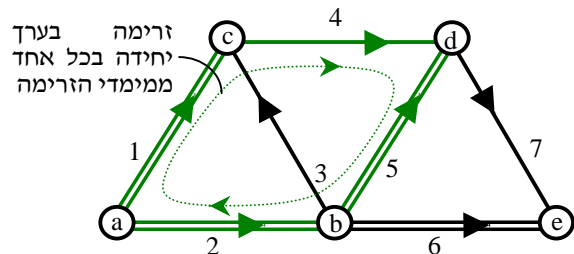
(א) גרף G, וה.פ. אפשרי לפי חתך 2

איור 1.12: מטריצת החתכים – המשמעות השלישית

(א) קבוצת החתך היסודי לפי ענף 2 מחלקת את צמתי הגרף לשתי קבוצות: הקבוצה הקשורה לזנב הענף - {a,c} וזו הקשורה לראש הענף - {b,d,e}. הזות קבוצת הזנב כמקשה אחת במרחב הפוטנציאל של הגרף בשיעור יחידה, תביא לה.פ. של יחידה בין קבוצת הזנב לקבוצת הראש. לפיכך כל הקשתות המחוברות בין הקבוצות, היינו קבוצת החתך, תהיינה בעלי ה.פ. 1 כשצומת הזנב הוא זה שזו (לפי 1.1), או ה.פ. -1 כשהראש הוא זה שזו. כמובן שבכל יתר הקשתות אין ה.פ. בין צמתי הקצה כי אין תזוזה יחסית בין צמתים בתוך כל אחת מן הקבוצות. (ב) בכל שורה נרשמים ערכי ה.פ. של החתך המתאים. כך, לדוגמה, בשורה המתאימה לענף 2, יש ה.פ. 1 בקשתות החתך 2 ו-4, ואילו בקשת 3 ה.פ. -1 כי הראש הוא זה שזו. בכל יתר הקשתות ה.פ. הוא 0.

באותו אופן, כל שורה במטריצת המעגלים, \bar{B} , מייצגת זרימה בשיעור יחידה דרך המעגל הבלתי-תלוי המוגדר על ידי הקישור המיוצג על ידי השורה. כמובן, שבענפים שכיוונם הוא כנגד הזרימה, תהיה הזרימה שלילית. כיוון שהמעגלים המיוצגים על ידי שורות המטריצה הם בלתי-תלויים, ופורשים את מרחב המעגלים בגרף, הרי שכל זרימה אפשרית בגרף היא צירוף ליניארי של זרימות היחידה בשורות \bar{B} .

$$\bar{B}(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



(ב) מטריצת המעגלים של גרף G

(א) גרף G, וזרימה אפשרית לפי קישור 4

איור 1.13: מטריצת המעגלים – המשמעות השלישית

(א) כל קישור מגדיר מצב זרימה אפשרי בגרף. לדוגמה, קישור 4 (ירוק) מגדיר את המעגל היסודי {4,5,2,1}. זרימה בערך יחידה לאורך מעגל זה יוצרת מצב אפשרי של זרימה בגרף. כיוון הזרימה מוכתב על ידי כיוון הקישור המגדיר את המעגל. לפיכך הזרימה בקשתות 1 ו-4 תהיה 1, ואילו בקשתות 2 ו-5 תהיה -1, כי כיוונן מנוגד לכיוון הזרימה. כמובן, שביתר קשתות הגרף הזרימה היא 0. (ב) בכל שורה נרשם מצב זרימה אפשרי המוגדר על ידי המעגל המתאים. וכך, בשורה השניה, המתאימה לקישור 4, מצויינים ערכי זרימה 1 במקומות המתאימים לקשתות {1,4}, ואילו הערכים המתאימים לקשתות {2,5} הם -1, כדי לציין את הניגוד לכיוון הזרימה במעגל.

בעזרת המשמעות האחרונה שניתנה למטריצות, יובן כעת כי חוק הזרימות (1.13) אינו אלא מקרה פרטי של משפט Tellegen, כי כל שורה במטריצה \bar{B} היא מצב זרימה אפשרי בגרף, והכפלתה בעמודת ה.פ. הקיים באותו גרף, תניב 0 לפי משפט Tellegen. בהתאמה גם חוק הפוטנציאלים הוא מקרה פרטי של משפט Tellegen.

לסיום, ללא הצגת ההוכחה כאן, תובא החוליה האחרונה, והמתבקשת מאליה, בשרשרת היחסים הטופולוגיים שהוצגו, הידועה בשם 'עקרון האורתוגונליות' (Swamy and Thulasiraman, 1981). אם כל שורה במטריצה \bar{Q} מייצגת מצב ה.פ. אפשרי בגרף, ואם כל שורה במטריצה \bar{B} מייצגת מצב זרימה אפשרי בגרף, הרי שאם שתי המטריצות מיוחסות לאותו גרף וממילא לאותה טופולוגיה, יתקיים בשתי המטריצות, על פי משפט Tellegen:

$$(1.23) \quad \bar{B} \cdot \bar{Q}^t = 0 \quad \text{עקרון האורתוגונליות:}$$

ולחילופין:

$$(1.24) \quad \bar{Q} \cdot \bar{B}^t = 0$$

ניתן להיווכח בנכונות העיקרון על ידי הפעלתו על המטריצה \bar{Q} שבאיור 1.12 וב על המטריצה \bar{B} שבאיור 1.13. המיוחסות שתיהן לטופולוגיה של אותו גרף.

1.3.6. גרף התנגדות

עד כה טופלו הפרשי הפוטנציאלים והזרימות בנפרד. על ה.פ. חל חוק הפוטנציאלים, ועל הזרימה – חוק הזרימות. העץ הפורש עזר לנהל את שתי המערכות – קביעת ה.פ. בענפים הכתיבה את ה.פ. בקישורים, וקביעת הזרימות בקישורים – את הזרימות בענפים.

על המצב שתואר יכולות לחול הגבלות חיצוניות, המונעות את האפשרות לקבוע בכל הקישורים ובכל הענפים את הזרימות ואת ה.פ., בהתאמה. יכולים להיות קשרי תלות בין ערכים שונים בגרף, המחייבים משטרי זרימה וה.פ. מאוד מסוימים. אחד מקשרי התלות היסודיים האלה הוא קשר ההתנגדות (Resistance).

קשר זה מייחס לקשת תלות ליניארית בין הפרש הפוטנציאלים שבה לבין הזרימה בה:

$$(1.25) \quad \Delta_j = R_j^R \cdot F_j$$

המטריצה R_j^R נקראת 'מטריצת ההתנגדות של הקשת j', וקשת המיוחס לה קשר כזה נקראת 'קשת התנגדות' (Resistance Edge). הציון העליון R^R מצוין שמטריצת הקשר מיוחסת לקשת התנגדות. ניסוח הפוך של היחס הוא קשר המוליכות (Conductance):

$$(1.26) \quad F_j = K_j^R \cdot \Delta_j$$

בגלל הקשר בין היחסים, השם 'התנגדות' יכול גם יחסי התנגדות וגם יחסי מוליכות, ולעיתים תיקרא 'קשת התנגדות' גם קשת המקיימת יחס מוליכות בלבד. קשר ההתנגדות מקביל לקשרים פסיקליים רבים בעולם ההנדסי. שניים לדוגמה הם חוק Ohm וחוק Hooke. במעגל התנגדות חשמלי, חוק Ohm מיוחס לכל הרכיבים במעגל, חוץ מלמקורות הזרם והמתח. גם במבנה מיוחס חוק Hooke לכל האלמנטים, חוץ מלכוחות החיצוניים ולסמכים. לפיכך, יש חשיבות לתת פתרון לגרף המייצג מערכת ששולטים בה קשרי התנגדות.

גרף שבו כל הקשתות הם קשתות התנגדות, חוץ ממקורות ה.פ. ומקורות זרימה, נקרא 'גרף התנגדות'. לצורך הנוחות נקרא כך גם גרף בו יש קשרי התנגדות רבים, גם אם שולטים בו גם יחסי תלות אחרים.

בגרף התנגדות מתחלקות הקשתות לשלוש קבוצות אפשריות: מקורות ה.פ., מקורות זרם וקשתות התנגדות. בבחירת עץ פורש, מן הראוי לכלול את מקורות ה.פ. בין ענפי העץ, כי ידיעת ה.פ. בענפים מסייעת לידיעת ה.פ. בגרף כולו. מסיבה מקבילה, ראוי שמקורות הזרימה ייכללו בין הקישורים. יתר הענפים והקישורים יהיו קשתות התנגדות, ולפיכך ניתן למנות בגרף ארבע קבוצות זרות ומשלימות של קשתות:

Δ – קבוצת מקורות הפרשי פוטנציאל. כל קשתות הקבוצה כלולות בעץ הפורש.

T' – יתר ענפי העץ הפורש, שאינם מקורות ה.פ., כי אם קשתות התנגדות.

C' – קישורים שאינם מקורות זרימה, כי אם קשתות התנגדות.

P – קבוצת מקורות הזרימה, שכולם בקישורי הגרף.

שתי הקבוצות T' ו- C' מכילות את כל קשתות ההתנגדות בגרף בלבד. לפיכך ייכללו שתי קבוצות אלה בקבוצת R , שתסומן R .

לפי חלוקה זו, חוק ה.פ. עם מטריצת המעגלים, וחוק הזרימות עם מטריצת החתכים יקבלו את הצורה הבאה:

$$(1.27) \quad \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\Delta} = {}^C_P \begin{bmatrix} \Delta & T' & C' & P \\ \bar{\mathbf{B}}_{CA} & \bar{\mathbf{B}}_{CT'} & \mathbf{I} & \circ \\ \bar{\mathbf{B}}_{PA} & \bar{\mathbf{B}}_{PT'} & \circ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_\Delta \\ \bar{\Delta}_{T'} \\ \bar{\Delta}_{C'} \\ \bar{\Delta}_P \end{bmatrix} = {}^C_P \begin{bmatrix} \Delta & R & P \\ \bar{\mathbf{B}}_{CA} & \bar{\mathbf{B}}_{CR} & \circ \\ \bar{\mathbf{B}}_{PA} & \bar{\mathbf{B}}_{PR} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_\Delta \\ \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(1.28) \quad \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = {}^\Delta_{T'} \begin{bmatrix} \Delta & T' & C' & P \\ \mathbf{I} & \circ & \bar{\mathbf{Q}}_{AC'} & \bar{\mathbf{Q}}_{AP} \\ \circ & \mathbf{I} & \bar{\mathbf{Q}}_{TC'} & \bar{\mathbf{Q}}_{TP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_\Delta \\ \bar{\mathbf{F}}_{T'} \\ \bar{\mathbf{F}}_{C'} \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} = {}^\Delta_{T'} \begin{bmatrix} \Delta & R & P \\ \mathbf{I} & \bar{\mathbf{Q}}_{AR} & \bar{\mathbf{Q}}_{AP} \\ \circ & \bar{\mathbf{Q}}_{TR} & \bar{\mathbf{Q}}_{TP} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_\Delta \\ \bar{\mathbf{F}}_R \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

וכיוון שקשרי ההתנגדות מיוחסים לקבוצה R כולה בלבד, ניתן לנסח אותם בהכללה לכל הגרף, כך:

$$(1.29) \quad \bar{\Delta}_R = \bar{\mathbf{R}}_R^R \cdot \bar{\mathbf{F}}_R$$

$$(1.30) \quad \bar{\mathbf{F}}_R = \bar{\mathbf{K}}_R^R \cdot \bar{\Delta}_R$$

מהמשוואות לעיל ניתן לחלץ פתרון בשתי שיטות, אך תחת טכניקה אלגברית יועדף כאן הסבר לרעיונות שמאחורי שתי שיטות אלה – שיטת המעגלים ושיטת החתכים. כדי להדגיש את ההקבלה בין השיטות, ההסבר בשתייהן יהיה בניסוח זהה.

1.3.7 שיטת המעגלים

חוק הפוטנציאלים מבוסס על הרעיון שסך הפרשי הפוטנציאלים לאורך כל מעגל הוא 0. לצורך יישום החוק בגרף התנגדות, יש להתחשב גם בזרימות המעגל, כי הן משפיעות על ה.פ. בקשתות ההתנגדות. את חוק ה.פ. די להפעיל על המעגלים היסודיים, לסכם בכל אחד מהם את ה.פ. ולהשוות את הסכום ל-0. בכל מעגל כזה, המוגדר על ידי קישור, סכום הפרשי הפוטנציאלים מורכב ממקורות ה.פ. ידועים במעגל (אם יש כאלה), מה.פ. בענפי התנגדות כתוצאה מהזרימה בהן, ומה.פ. על הקישור.

כזכור, כל הזרימות בגרף תלויות בזרימות הקישורים. לפיכך, אם הקישור המגדיר את המעגל הוא קשת התנגדות, הרי שהפרש הפוטנציאלים במעגל זה תלוי בזרימה בקישור, ובזרימת יתר הקישורים שמעגליהם משותפי קשתות עם המעגל המחושב. אם כך, ניתן לרשום משוואת ה.פ. אחת לכל מעגל המוגדר על ידי קישור התנגדות, והנעלמים היחידים בה יהיו זרימות בלתי-ידועות בקישורים. כיוון שכמספר קישורי ההתנגדות, שהם הקישורים שזרימתם לא ידועה, כן מספר המשוואות, הרי שמערכת המשוואות פתירה.

כיוון שהמשוואות מבוססות על מעגלים, נקראת שיטה זו 'שיטת המעגלים' (Swamy and Thulasiraman, 1981).

לתיאור המילולי גם ניסוח אלגברי פשוט. חוק ה.פ. למעגלי הקישורים שאינם מקורות זרימה, הוא שורת המשוואות המתאימה לקבוצה C' ב-(1.27), ולפיה:

$$(1.31) \quad \vec{\bar{A}}_{CA} \cdot \vec{\bar{A}}_A + \vec{\bar{B}}_{CR} \cdot \vec{\bar{A}}_R = 0 \quad \text{סך ה.פ. במעגלים:}$$

$\vec{\bar{A}}_R$ מחושב לפי (1.29) אך שם יש לבטא את $\vec{\bar{F}}_R$. בעזרת (1.7),

$$(1.32) \quad \vec{\bar{F}}_R = \vec{\bar{B}}_{CR}^t \cdot \vec{\bar{F}}_C + \vec{\bar{B}}_{PR}^t \cdot \vec{\bar{F}}_P \quad \text{הזרימות בקשתות ההתנגדות:}$$

והצבה ב-(1.29) תניב:

$$(1.33) \quad \vec{\bar{A}}_R = \vec{\bar{R}}_R^R \cdot \vec{\bar{B}}_{CR}^t \cdot \vec{\bar{F}}_C + \vec{\bar{R}}_R^R \cdot \vec{\bar{B}}_{PR}^t \cdot \vec{\bar{F}}_P \quad \text{ה.פ. בקשתות ההתנגדות:}$$

הצבת $\vec{\bar{A}}_R$ ב-(1.31), ובידוד הנעלמים באגף השמאלי, יתנו את משוואת המעגלים לגרף התנגדות:

$$(1.34) \quad \left(\vec{\bar{B}}_{CR} \cdot \vec{\bar{R}}_R^R \cdot \vec{\bar{B}}_{CR}^t \right) \cdot \vec{\bar{F}}_C = - \left(\vec{\bar{B}}_{CR} \cdot \vec{\bar{R}}_R^R \cdot \vec{\bar{B}}_{PR}^t \right) \cdot \vec{\bar{F}}_P - \vec{\bar{B}}_{CA} \cdot \vec{\bar{A}}_A \quad \text{משוואת המעגלים:}$$

לאחר מציאת הזרימות בקישורים, ניתן למצוא את הזרימות בכל קשתות ההתנגדות לפי (1.32), לפיהן לחשב את ה.פ. בקשתות ההתנגדות לפי (1.33), ולבסוף למצוא את ה.פ. בקישורים שהם מקורות זרימה לפי (1.27) כך:

$$(1.35) \quad \vec{\bar{A}}_P = -\vec{\bar{B}}_{PA} \cdot \vec{\bar{A}}_A - \vec{\bar{B}}_{PR} \cdot \vec{\bar{A}}_R \quad \text{ה.פ. במקורות הזרימה:}$$

מתהליך החישוב נראה כי השיטה חושפת תחילה את ערכי הזרימה בגרף, ורק לאחריהם את ערכי ה.פ., ומן הסתם תתאים יותר לחישוב ערכי זרימה. השימוש בה גם מותנה בהימצאותם של ערכי ההתנגדות בכל קשתות ההתנגדות.

1.3.8 שיטת החתכים

חוק הזרימות מבוסס על הרעיון שסך הזרימה דרך כל חתך הוא 0. לצורך יישום החוק בגרף התנגדות, יש להתחשב גם בה.פ. בקבוצת החתך, כי הם משפיעים על הזרימות בקשתות ההתנגדות.

את חוק הזרימות די להפעיל על החתכים היסודיים, לסכם בכל אחד מהם את הזרימה ולהשוות את הסכום ל-0. בכל חתך כזה, המוגדר על ידי ענף, סכום הזרימות מורכב ממקורות זרימה ידועים במעגל (אם יש כאלה), מזרימה בקישורי התנגדות כתוצאה מה.פ. בהן, ומזרימה בענף.

כזכור, כל ה.פ. בגרף תלויים בה.פ. של הענפים. לפיכך, אם הענף המגדיר את החתך הוא קשת התנגדות, הרי שהזרימה בחתך זה תלויה בה.פ. בענף, ובה.פ. של יתר הענפים שקבוצת החתך שלהם משותפי קשתות עם החתך המחושב. אם כך, ניתן לרשום משוואת זרימה אחת לכל חתך המוגדר על ידי ענף התנגדות, והנעלמים היחידים בה יהיו ה.פ. בלתי-ידועים בענפים. כיוון שכמספר ענפי ההתנגדות, שהם הענפים שזרימתם לא ידועה, כן מספר המשוואות, הרי שמערכת המשוואות פתירה.

כיוון שהמשוואות מבוססות על חתכים, נקראת שיטה זו 'שיטת החתכים' (Swamy and Thulasiraman, 1981).

לתיאור המילולי גם ניסוח אלגברי פשוט. חוק הזרימות לחתכי הענפים שאינם מקורות ה.פ., הוא שורת המשוואות המתאימה לקבוצה T' ב- (1.28), ולפיה:

$$(1.36) \quad \vec{Q}_{T'R} \cdot \vec{F}_R + \vec{Q}_{T'P} \cdot \vec{F}_P = 0 \quad \text{סך הזרימות בחתכים:}$$

\vec{F}_R מחושב לפי (1.30) אך שם יש לבטא את $\vec{\Delta}_R$. בעזרת (1.5),

$$(1.37) \quad \vec{\Delta}_R = \vec{Q}_{AR}^t \cdot \vec{\Delta}_A + \vec{Q}_{T'R}^t \cdot \vec{\Delta}_{T'} \quad \text{ה.פ. בקשתות ההתנגדות:}$$

והצבה ב- (1.30) תניב

$$(1.38) \quad \vec{F}_R = \vec{K}_R^R \cdot \vec{Q}_{AR}^t \cdot \vec{\Delta}_A + \vec{K}_R^R \cdot \vec{Q}_{T'R}^t \cdot \vec{\Delta}_{T'} \quad \text{הזרימות בקשתות ההתנגדות:}$$

הצבת \vec{F}_R ב- (1.36), ובידוד הנעלמים באגף השמאלי, יתנו את משוואת החתכים לגרף התנגדות:

$$(1.39) \quad (\vec{Q}_{T'R} \cdot \vec{K}_R^R \cdot \vec{Q}_{T'R}^t) \cdot \vec{\Delta}_{T'} = -(\vec{Q}_{T'R} \cdot \vec{K}_R^R \cdot \vec{Q}_{AR}^t) \cdot \vec{\Delta}_A - \vec{Q}_{T'P} \cdot \vec{F}_P \quad \text{משוואת החתכים:}$$

לאחר מציאת ה.פ. בענפים, ניתן למצוא את ה.פ. בכל קשתות ההתנגדות לפי (1.37), לפיהן לחשב את הזרימות בקשתות ההתנגדות לפי (1.38), ולבסוף למצוא את הזרימות בענפים שהם מקורות ה.פ. לפי (1.28) כך:

$$(1.40) \quad \vec{F}_A = -\vec{Q}_{AR} \cdot \vec{F}_R - \vec{Q}_{AP} \cdot \vec{F}_P \quad \text{הזרימה במקורות ה.פ.:}$$

מתהליך החישוב נראה כי השיטה חושפת תחילה את ערכי ה.פ. בגרף, ורק לאחריהם את ערכי הזרימה, ומן הסתם תתאים יותר לחישוב ערכי ה.פ.. השימוש בה גם מותנה בהימצאותם של ערכי המוליכות בכל קשתות ההתנגדות.

שיקול נוסף בבחירת השיטה המתאימה הוא מספר המשוואות בכל שיטה. במקרה של מיעוט קישורים תועדף שיטת המעגלים, ואם הקישורים רבים על הענפים – תועדף שיטת החתכים.

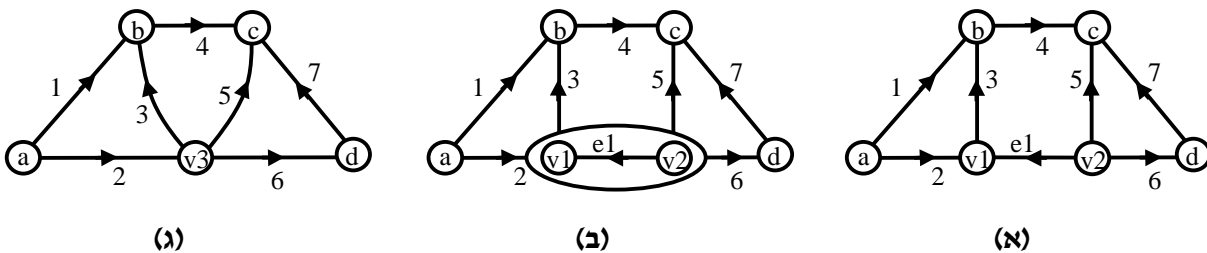
1.3.9 פעולות בגרף – כיווץ ומחיקה של קשתות

בסעיף זה יוגדרו התנאים לביצוע שתי פעולות בגרף, כיווץ קשת ומחיקת קשת. פעולות אלה – יש בהן כדי לצמצם את הייצוג הגרפי לגודלו החיוני, והן תהיינה לעזר במהלך עבודה זו.

כיווץ קשת: אם שני צמתים, v_1 ו- v_2 , מחוברים ביניהם בקשת e_1 , המכוונת מ- v_1 ל- v_2 , הרי שמבלי לפגוע בחוק הזרימות, ניתן לכווץ את הקשת e_1 , תוך איחוד הצמתים v_1 ו- v_2 , כמוראה באיור 1.14. באותו אופן ניתן לאחד כל זוג צמתים, תוך כיווץ כל הקשתות המקבילות המחברות ביניהם, מבלי לפגוע בחוק הזרימות. כיווץ כזה אפשרי תמיד כשמדובר בגרף זרימות, אך אסור בהחלט כשמדובר בגרף התנגדות, בו מיוחסים ערכי פוטנציאל לצמתים. אם לשני צמתים מיוחסים ערכי פוטנציאל שונים, לא ניתן לאחד אותם. עם זאת, אם הפוטנציאל בשני הצמתים זהה, ניתן לכווץ את הקשתות ביניהם, ומכאן הכלל לפעולת הכיווץ:

כלל הכיווץ: ניתן לכווץ קשת בגרף התנגדות אם הפרש הפוטנציאלים בה הוא 0.

פעולת הכיווץ מסומנת 'o'. לדוגמה, פעולת הכיווץ באיור 1.14 תסומן כך: $G_1 = G_x \circ e_1$.



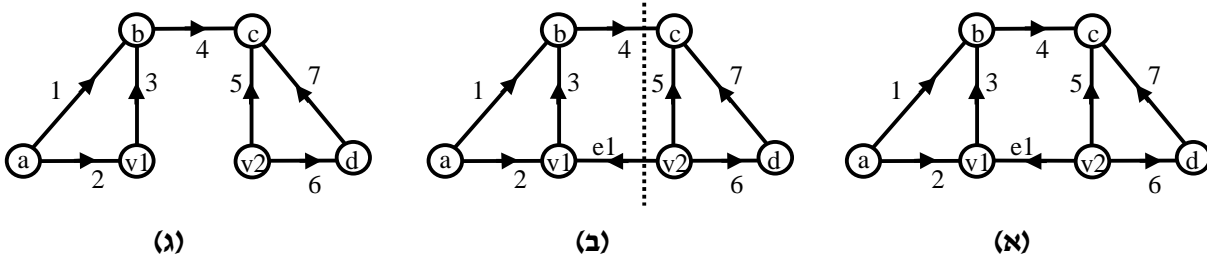
איור 1.14: כיווץ קשת

(א) הקשת e_1 מועמדת לכיווץ. (ב) שני צמתי הקצה של הקשת e_1 מאוחדים לצומת אחד. כאן מוראה הצומת המאוחד כמכיל את שני צמתי הקצה, וניתן לראות אותו כחתך בגרף. על פי חוק הזרימות, סך הזרימה דרך החתך הוא 0, וכך יישאר גם לאחר כיווץ הקשת e_1 ואיחוד צמתי הקצה שלה לצומת אחד, v_3 . לפיכך פעולת הכיווץ שומרת על חוק הזרימות. (ג) הגרף לאחר הכיווץ.

מחיקת קשת: ערכי פוטנציאל מיוחסים לצמתים, והקשתות לכל היותר מודדות את הפרש הפוטנציאלים בין צמתי הקצה שלהן. לפיכך ניתן למחוק מן הגרף כל קשת שהיא, כמוראה באיור 1.15, מבלי לפגוע בערכי הפוטנציאל, וממילא מבלי לפגוע בחוק הפוטנציאלים. מחיקה כזו אפשרית תמיד כשמדובר בגרף פוטנציאלים, אך אסורה בגרף התנגדות או בגרף זרימות, שכן מחיקת קשת מבטלת זרימה מן הזרימות בגרף, ומערערת בכך את משטר הזרימות ופוגעת בחוק הזרימות. עם זאת, אם הזרימה בקשת היא 0, הרי שאין לקשת תפקיד במשטר הזרימות, ומחיקתה לא תפגע בחוק הזרימות. מכאן הכלל לפעולת המחיקה:

כלל המחיקה: ניתן למחוק קשת בגרף התנגדות אם הזרימה בה היא 0.

פעולת המחיקה מסומנת ' - ' (כמו חיסור). לדוגמה, פעולת המחיקה באיור 1.15 תסומן כך:
 $G_x = G - e_l$



איור 1.15: מחיקת קשת

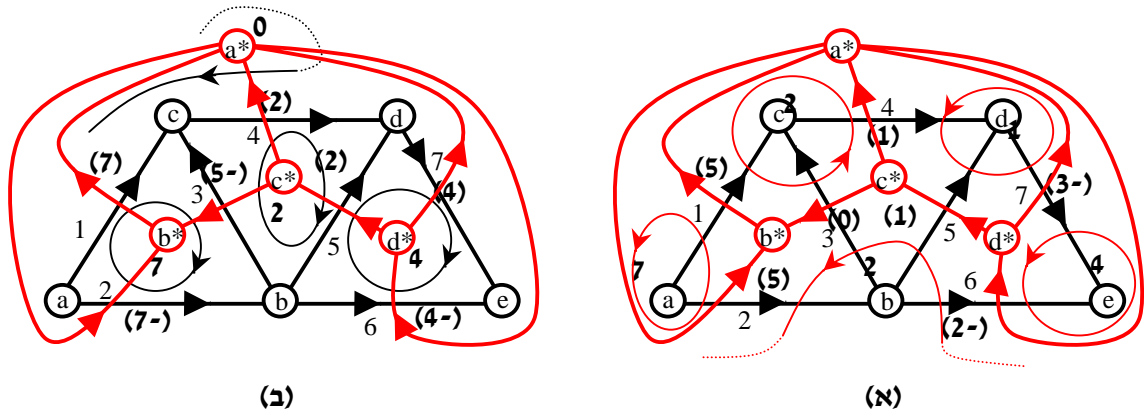
(א) הקשת e_1 מועמדת למחיקה. (ב) סך הזרימה בקבוצת החתך $\{e_1, 4\}$ הוא 0 לפי חוק הזרימות. מחיקת הקשת e_1 תערער את חוק הזרימות, למרות שלא תשנה את ערכי הפוטנציאלים בצמתים, ולא תפגע בחוק הפוטנציאלים. לפיכך פעולת המחיקה שומרת על חוק הפוטנציאלים, אך מותרת בגרף התנגדות רק אם הזרימה בקשת הנמחקת היא 0. (ג) הגרף לאחר המחיקה.

1.3.10 גרף דואלי (Dual Graph)

לסיום הרקע התיאורטי, יוצג כאן בקצרה, ללא הוכחה, כלי טופולוגי חשוב בתורת הגרפים – הגרף הדואלי (Swamy and Thulasiraman, 1981). הגרף הדואלי הוא עוד ביטוי לסימטריה החזקה שיש בין התנהגות הפוטנציאלים והתנהגות הזרימות בגרף. גרף דואלי ניתן לבנות לכל גרף מישורי, היינו, גרף שבלי לשנות את הטופולוגיה שלו ניתן לשרטטו במישור מבלי שקשת אחת תחתוך את רעותה (להגבלה זו חשיבות בפני עצמה בתורת המבנים, אך אין מקומה במסגרת עבודה זו). הגרף המקורי ייקרא 'הגרף הפרימאלי (Primal Graph)'.

הגרף הדואלי נבנה כך: לכל פיאה בגרף הפרימאלי, כולל הפיאה החיצונית, מותאם צומת בגרף הדואלי, ולכל קשת בגרף הפרימאלי, המבדילה בין שתי פאות, מותאמת קשת בגרף הדואלי, המחברת בין הצמתים המתאימים לשתי הפאות. כיוון הקשת הדואלית נקבע בהתאם לכיוון הקשת הפרימאלית, לפי כלל היד הימנית, כך, שאם הקשת הפרימאלית מייצגת את ציר x , הקשת הדואלית תייצג את ציר y במערכת ימנית.

אם הגרף הפרימאלי הוא גרף פוטנציאל, הרי שערך הפוטנציאל בצומת פרימאלי יהיה שקול לערך זרימה בפיאה הדואלית שלו. ולהפך – אם הפרימאלי הוא גרף זרימות, הרי שערך הפוטנציאל בצומת הדואלי יהיה כערך הזרימה בפיאה הפרימאלית. כפועל יוצא, ערך הזרימה בקשת בגרף הפרימאלי הוא ערך הפרש הפוטנציאלים בקשת המתאימה בגרף הדואלי, וכן להפך: ערך ה- f . בקשת פרימאלית היא ערך הזרימה בקשת הדואלית המתאימה. תחת כל ההגדרות לעיל, הגרף הדואלי של גרף זרימות פרימאלי שומר על חוק הפוטנציאלים, ואילו גרף דואלי של גרף פוטנציאלים פרימאלי שומר על חוק הזרימות. באיור 1.16 מוצגים הגרפים הדואליים לגרף הפוטנציאלים שבאיור 1.4, ולגרף הזרימות שבאיור 1.5. כמובן שניתן לבנות באותה דרך את הגרף הדואלי לגרף התנגדות, הכולל גם פוטנציאלים וגם זרימות.



איור 1.16: גרפים דואליים לגרף פוטנציאליים ולגרף זרימות.

(א) גרף הפוטנציאליים מאיור 1.4 משמש כאן כגרף פרימאלי, והגרף הדואלי מקבל עליו את פוטנציאל הצמתים וה.פ. הקשתות כזרימה בפיאות וכזרימה בקשתות, בהתאמה. (ב) גרף הזרימות מאיור 1.5 משמש כאן כגרף פרימאלי, והגרף הדואלי מקבל עליו את זרימות הפיאות וזרימות הקשתות כפוטנציאל בצמתים וכה.פ. בקשתות, בהתאמה. בגרף הדואלי יש צומת דואלי לפיאה החיצונית (במקרה זה a^*), ובגלל הטופולוגיה הפנימית-חיצונית הזו, הזרימה בפיאה החיצונית נראית כהפוכה בכיוונה לזרימה סביב הצומת הדואלי המתאים, אך החשוב הוא הכיוון ביחס לקשתות הגובלות בפיאה זו. (יזכר שוב: צומת וקשת מסומנים, בהתאמה, באות ובמספר קטנים ודקים, ערך זרימה בפיאה או פוטנציאל של צומת – במספר עבה, וערך זרימה או ה.פ. בקשת – בסוגריים).

2. ייצוג אלמנט כפיפה על ידי גרף זרימות

הייצוג הגרפי שפותח למסבכים (Shai, 2001c) עונה רק חלקית על הצורך בייצוג מוכלל לתורת המבנים. מוט מסבך הוא רק אחד מן האלמנטים המבניים המשמשים בתחום זה, הוא מעביר אופן כוח אחד – מתיחה או לחיצה, ויש בו דרגת חופש צירית אחת בלבד. קיימים עוד אלמנטים רבים, המשמשים להעברת מומנטי פיתול וכפיפה וכוחות גזירה, משולבים בצירופים כאלה ואחרים, ויש בהם מספר דרגות חופש בהתאם לצירופי הכוחות הפועלים בהם.

כצעד המשך ראשון לאחר הייצוג הגרפי של מוט מסבך, יעסוק פרק זה בקורה אופקית, ויוצגו בו היבטים שונים של סוגיית המומנט באמצעות הכלים הקומבינטוריים של תורת הגרפים. תוצג הבעייתיות של הטיפול באלמנטי כפיפה, שלא הייתה קיימת במוטות מסבך. יוצגו גישושים ראשוניים בדרך לטיפול בבעיה זו, ויוצג גרף המטפל באלמנטי הכפיפה רק ברובד הדינמי – שיקולי כוחות, בלא להיכנס לייצוג התזוזות.

צעדים ראשוניים אלה הם שאפשרו, במהלך המחקר, את המעבר לטיפול היסודי יותר בייצוג אלמנט מבנה כללי, והם גם שייקלו על הקורא, ויכינו אותו לטיפול זה, שיוצג בפרק הבא.

בקורה אופקית מבוטאים שני מימדים בלבד, לתזוזות ולכוחות: המימד האנכי – שקיעה או כוח אנכי, והמימד הזוויתי – שיפועים נקודתיים או מומנטים, היוצרים כפיפה במישור הדרך. לא תהיה התייחסות בפרק זה לתזוזות ציריות (התארכות) או לכוחות ציריים, וגם לא לאלמנטים שאינם אופקיים ובוודאי לא לכאלה שאינם במישור הדרך, וזאת כדי להתמקד בתופעת הכפיפה והמומנט.

2.1. הבעייתיות בייצוג אלמנטי כפיפה

הגישה הבסיסית בבניית הייצוג הגרפי, כפי שהייתה גם לגבי ייצוג מסבך, היא שמבנה עשוי מאלמנטים המחברים צמתים במבנה, ושכל אלמנט משמש 'צינור' להעברת השפעות מצומת לצומת. כבמסבך, גם במבנה המכיל אלמנטי כפיפה (קורות, מסגרות וכד') ניתן לזהות קטעים הבאים בממשק עם הסביבה, או עם אלמנטים אחרים, דרך קצותיהם. באותה גישה, ייקל לזהות את נקודות הממשק כצמתים, ואת האלמנטים – כקשתות המחברות ביניהם.

2.1.1. ייצוג של אלמנט כפיפה על ידי קשת בגרף

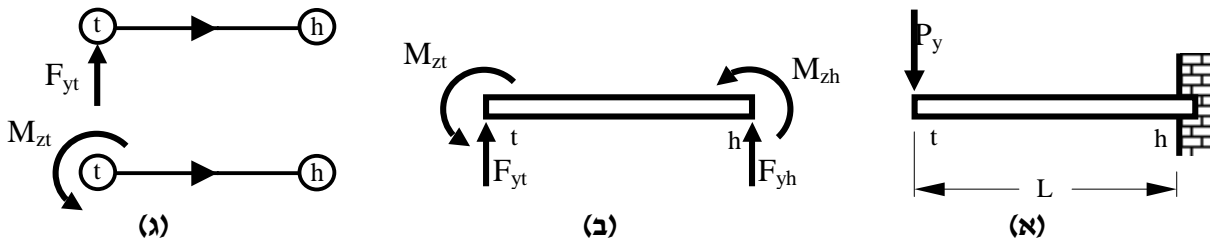
איור 2.1 מנסה ליישם גישה זו באלמנט המבני הבודד של קורה רתומה המועמסת בקצה, אך נראה שהייצוג הגרפי לפי גישה זו - לקוי. כידוע, היחס בין הכוחות הפועלים על ראש האלמנט לבין הכוחות הפועלים על זנבו הוא:

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} F_{yh} \\ M_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \textcircled{L} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{yf} \\ M_{zf} \end{bmatrix}$$

בעוד שהייצוג הגרפי המוצע, לפי הגישה 'קשת לכל אלמנט', מחייב את הקשר:

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} F_{yh} \\ M_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{yt} \\ M_{zt} \end{bmatrix}$$

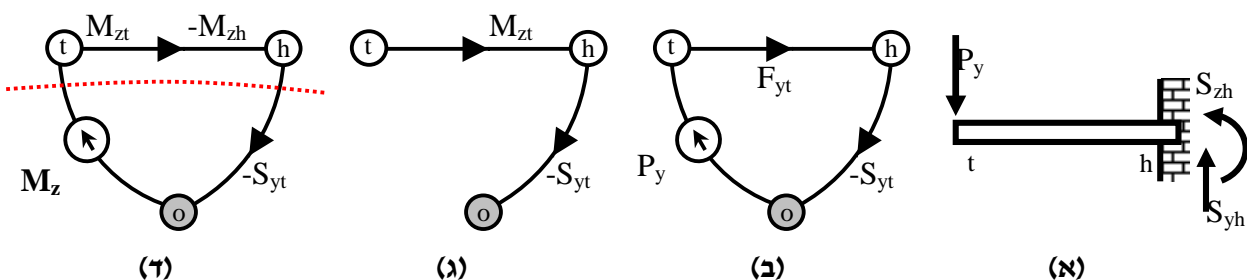
כדי שיתקיים חוק הזרימות בקשת, ולא תשתנה הזרימה היוצאת את הקשת מן הזרימה הנכנסת אליה.



איור 2.1: בעייתיות בייצוג גרפי של אלמנט כפיפה

(א) קורה רתומה מועמסת בקצה. (ב) בידוד האלמנט וסימון הכוחות הפועלים על קצותיו במערכת הצירים הכללית. (ג) ייצוג האלמנט בקשת המחברת את שני קצותיו. הייצוג מחולק לשני מימדי הזרימה, שהם כוח הגזירה ומומנט הכפיפה, הפועלים על זנב האלמנט, זורמים לתוך צומת הזנב, וממנו דרך הקשת המייצגת אל צומת הראש. יציאת הזורם מצומת הראש מייצגת הפעלה של כוח על הסביבה על ידי קצה הראש של האלמנט. כוח זה הוא היפוך הכוח החיצוני הפועל על צומת הראש. לפי ייצוג זה, הכוח הפועל על הראש הוא היפוך הכוח הפועל על הזנב. זה נכון לגבי כוח הגזירה, לפי משוואת שיווי המשקל (2.1), אך אין זה נכון לגבי המומנטים, כפי שמעידה אותה משוואה. לכן יש בעיה בייצוג זה.

הבעיה אינה מקומית לאלמנט בלבד, כי אם פושה בכל הייצוג הגרפי של הקורה, כמוראה באיור 2.2. הגרף המייצג את כוח הגזירה מתאים לערכים הפיסיקליים, ומקיים את חוק הזרימות, אך לא כן הגרף המייצג מומנטים. לפי גרף המומנטים דומה כאילו אין כלל מומנטים בקורה. זה נכון לגבי הקצה החופשי, t , אך לא לגבי הקצה המקובע, h . גם כשהקצה החופשי מועמס במומנט חיצוני, הייצוג הגרפי, המוראה באיור 2.2, לא מייצג את ההבדל במומנט שבשני קצות הקורה. ואם תהא קשת הייצוג של הקורה כזו שהמומנט משתנה לאורכה מערכו בזנב לערכו שבראש, הרי שלא יתקיים חוק הזרימות בגרף.



איור 2.2: בעייתיות בייצוג גרפי של קורה רתומה

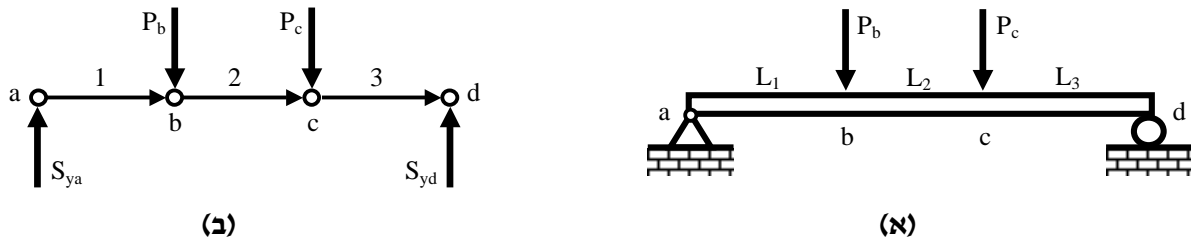
(א) קורה רתומה מועמסת בקצה. כאן סומנו גם התגובות בריתום (S-Support). (ב) גרף זרימת כוח הגזירה של הקורה הרתומה. הגרף מייצג נכונה את הכוח המופעל חיצוני על הקצה החופשי, את ערכו הקבוע לאורך הקורה, ואת פעולתו על הריתום (הכוח הפועל על הריתום הפוך לזה שהריתום מפעיל על הקורה. לכן המינוס). (ג) גרף זרימת המומנט בקורה הרתומה. הגרף הוא מסלול קשתות פתוח, אין בו מעגל סגור, ועל כן לא תזרום בו כל זרימה. תוצאה זו נכונה לצומת t כי הוא מייצג קצה חופשי שאין בו מומנט, אך אינה נכונה לגבי הצומת h המייצג את הריתום, בו יש גם יש מומנט. (ד) גם אם מופעל עומס מומנט על הקצה החופשי, ונסגר מעגל, הזרימה בו צריכה להיות קבועה כדי לשמור על חוק הזרימות, וההבדל במומנט בין שני הקצוות לא יתבטא בגרף. ואם באופן מלאכותי תהיה הקשת המייצגת את הגרף כזו שהזרימה בה משתנה מקצה לקצה, הרי שחוק הזרימות יופר. לדוגמה, הזרימה היוצאת מצומת t היא הכוח המופעל על קצה t של הקורה, ואילו זו הנכנסת ל- h היא זו המופעלת על ידי הקורה על הקצה h , היינו הכוח המופעל בקצה h על הקורה בסימן הפוך. לפיכך, בחתך המסומן, תצא לצומת t זרימה שונה מזו שתיכנס מהצומת h , וסכום הזרימות בחתך יהיה שונה מאפס, בניגוד לחוק הזרימות.

2.1.2 ייצוג באמצעות מטריצת פגישות (Incidence Matrix)

עד כה נראה שייצוג אלמנט במבנה על ידי קשת פשוטה המחברת בין צמתי קצותיו הוא בעייתי. אך הנה קיימים בספרות ייצוגים שונים למבנה, ובדרך כלל מופיע בהם האלמנט כקו המחבר בין צמתים, ומיוחסים לו ערכי תזוזות וכוחות, והייצוגים האלה משמשים בהצלחה לצורך אנאליזה של מבנים.

הבולט בהם, הייצוג הטופולוגי הנפוץ ביותר במכניקת המבנים בעשרות השנים האחרונות, הוא זה המבוסס על דיאגרמת Roth (Roth, 1955). לפי ייצוג זה, ערכי הכוחות והתזוזות במבנה קשורים ביניהם על ידי מטריצות המרה, ובהכפלות מטריצה ניתן לעבור בין ווקטורים של כוחות צמתים, כוחות אלמנטים, תזוזות צמתים ועיוויים. טופולוגיה זו היא אבן הפינה של אנאליזת המבנים המטריציאלי, ובשמה הנפוץ יותר – Algebraic Topology of Elastic Networks, שפניה המוכרות היום קיבלו את צורתן לראשונה על ידי Langefors (1950), ואחר כך עובדו על ידי Spillers (1963) ו-Fenves (1963).

בשיטה טופולוגית זו, הניתוח מבוסס על צמתים ועל היחס ביניהם. כך, למשל, כל צומת שרוי בשיווי משקל, ולפיכך סך הכוחות הפועלים עליו הוא 0. הכוחות על הצומת כוללים עומסים חיצוניים, תגובות סמכים, וכוחות מן האלמנטים המחוברים לצומת. הקשר בין כוחות אופייניים באלמנט, למשל כוחות הזנב, לבין הכוחות שהוא מפעיל על כל אחד משני הצמתים שבקצותיו, מקביל לקשר הטופולוגי בין קשת לבין הצמתים שבקצותיה, המיוצג על ידי מטריצת הפגישות. ואכן, מטריצת הפגישות היא המשמשת להמרת כוחות האלמנט לכוחות הצמתים. דוגמה לכך היא הקורה באיור 2.3.



איור 2.3: תיאור קורה בטופולוגיה אלגברית

(א) קורה פשוטה, מחולקת לצורך הניתוח לשלושה קטעים, בהתאם לשתי נקודות הממשק לאורכה עם העומסים החיצוניים. (ב) תיאור טופולוגי כיווני של שלושת אלמנטי הקורה, והממשק החיצוני של הצמתים דרך העומסים והתגובות.

התיאור הטופולוגי של הקורה מוראה באיור 2.3. לפי תיאור זה, תהיה מטריצת הפגישות:

$$(2.3) \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ -1 & 1 & \circ \\ \circ & -1 & 1 \\ \circ & \circ & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ותפקידה כפול: היא מתארת גם את השפעת כוחות הקצה של האלמנטים על הצמתים, וגם, כשהיא משוחלפת, את תזוזות קצות האלמנטים כתוצאה מתזוזות הצמתים. כך לדוגמה, שורה b כוללת את הכוחות של אלמנטים 1 ו-2 על צומת b, ואילו עמודה 2 מתארת את תלות תזוזות קצות אלמנט 2 בתזוזות הצמתים b ו-c.

הקשר בין כוחות האלמנט האופייניים, למשל כוחות הזנב, לבין הכוחות הפועלים על שני קצותיו, לפי (2.1) הוא:

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} F_{yt} \\ M_{zt} \\ F_{yh} \\ M_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \\ -1 & \circ \\ L & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{yt} \\ M_{zt} \end{bmatrix}$$

תפקידה של מטריצת ההמרה ב- (2.4) זהה לזה של האלמנטים במטריצת הפגישות (2.3). היא ממירה ערכים הקשורים לאלמנט בערכים הקשורים לצמתי הקצה שלו. את (2.4) ניתן לנסח בכלליות כך:

$$(2.5) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{tail}^i \\ \mathbf{F}_{head}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tail}^i \\ \mathbf{A}_{head}^i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F}^i$$

עם ההגדרות:

$$(2.6) \quad \mathbf{A}_{tail}^i = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A}_{head}^i = \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ L_i & -1 \end{bmatrix}$$

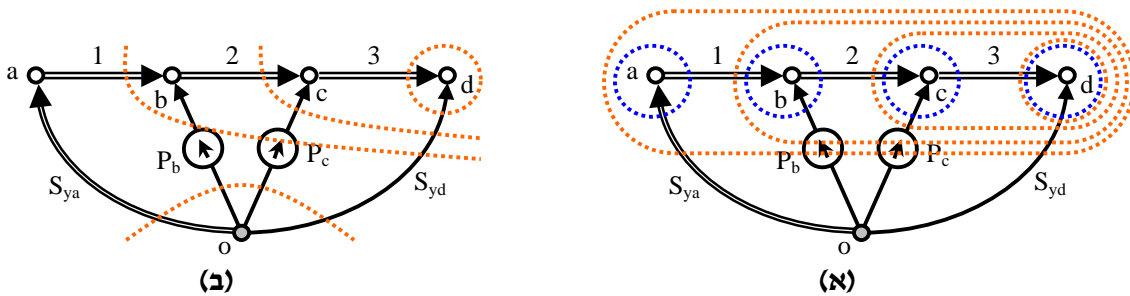
בהגדרות האחרונות ניתן להשתמש במקום האלמנטים שבמטריצת הפגישות, כשבמקום 1 ו-1, המציינים צומת זנב וצומת ראש, בהתאמה, ניתן להשתמש ב- \mathbf{A}_{tail} וב- \mathbf{A}_{head} , בהתאמה. משוואת שיווי המשקל לצמתי הקורה תיכתב באמצעות ההגדרות החדשות כך:

$$(2.7) \quad \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{tail}^1 & \circ & \circ \\ \mathbf{A}_{head}^1 & \mathbf{A}_{tail}^2 & \circ \\ \circ & \mathbf{A}_{head}^2 & \mathbf{A}_{tail}^3 \\ \circ & \circ & \mathbf{A}_{head}^3 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^a \\ \mathbf{F}^b \\ \mathbf{F}^c \\ \mathbf{F}^d \end{bmatrix}$$

היינו, בכל שורה, הכוחות המופעלים על האלמנטים על ידי הצומת שווים לכוחות החיצוניים, או לתגובות, הפועלים על הצומת. את (2.7) ניתן להרחיב לשני מימדי הקורה, תוך שימוש בהגדרות (2.6), כך:

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} 1 & \circ & & & & \\ \circ & 1 & & & & \\ -1 & \circ & 1 & \circ & & \\ L_1 & -1 & \circ & 1 & & \\ & & -1 & \circ & 1 & \\ & & & L_2 & -1 & \circ & 1 \\ & & & & & -1 & \circ \\ & & & & & & L_3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{yt}^1 \\ M_{zt}^1 \\ F_{yt}^2 \\ M_{zt}^2 \\ F_{yt}^3 \\ M_{zt}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ya} \\ \circ \\ -P_b \\ \circ \\ -P_c \\ \circ \\ S_{yd} \\ \circ \end{bmatrix}$$

כיוון שב-8 המשוואות, המתאימות ל-8 השורות, יש שמונה נעלמים (כוחות האלמנטים והתגובות) – המערכת פתירה. את המשוואה האחרונה ניתן להביע גם כך:



איור 2.5: החלפת חתכי צומת בחתכים יסודיים

(א) חתכי הצמתים המקוריים (בכחול) לפי שיטת הצמתים, וכתחליף להם מוצעים חתכים יסודיים (בכתום). כל קבוצת חתך יסודית מכילה בתוכה רק ענף אחד ויחיד. החתכים היסודיים פורשים את מרחב החתכים בגרף. באותו אופן, חתכי הצמתים גם הם פורשים את מרחב החתכים, ולכן אפשר לתאר כל חתך יסודי כצירוף ליניארי של חתכי הצמתים, ולפיכך גם לשנות את מטריצת הפגישות על ידי פעולות שורה אלמנטריות, כדי להביאה לצורת מטריצת החתכים המבוקשת. (ב) החתכים ב-א' מוצגים בנפרד ובצורה נוחה יותר.

ניסיון לעשות שינוי כזה במטריצה משבש לחלוטין את מערכת הכוחות בקורה. לדוגמה, החלפת

החתך c בחתך המשותף c-d תיתן מערכת משוואות כזו:

$$(2.10) \quad \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & \circ & & & & 1 & & & & \\ \circ & 1 & & & & \circ & & & & \\ -1 & \circ & 1 & \circ & & & 1 & & & \\ L_1 & -1 & \circ & 1 & & & \circ & & & \\ \hline & & -1 & \circ & \circ & & & 1 & 1 & \\ & & L_2 & -1 & \circ & \circ & & \circ & \circ & \\ & & & & -1 & \circ & & & & 1 \\ & & & & L_3 & -1 & & & & \circ \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} F_{yt}^1 \\ M_{zt}^1 \\ F_{yt}^2 \\ M_{zt}^2 \\ F_{yt}^3 \\ M_{zt}^3 \\ -S_{ya} \\ P_b \\ P_c \\ -S_{yd} \end{bmatrix} = 0$$

בשורה הכפולה המודגשת, האלמנטים השונים מ-0 מכילים את אלה שבחתך המקורי של צומת c, בתוספת ההדגשות לשינויים בעקבות שינוי קבוצת החתך – הורדת אלמנט 3 והוספת התגובה ב-d. לפי החלק השני של שורה זו:

$$(2.11) \quad L_2 F_{yt}^2 - M_{zt}^2 = 0$$

אך לפי (2.4):

$$(2.12) \quad L_2 F_{yt}^2 - M_{zt}^2 = M_{zh}^2$$

ולפיכך המומנט בחתך הצומת c הוא $\neq 0$! ובעליל, מסקנה זו מוטעית לחלוטין! אך כאן אין הפתעה כלל, שכן לפי סעיף 2.1.1, ברור שזרימה הנכנסת לאלמנט שונה מזו היוצאת ממנו, וקיצוץ אלמנט 3 באיחוד שני החתכים הוא מוטעה, שכן הזרימה היוצאת מחתך c אינה כזו הנכנסת לחתך d.

לפי הניתוח שלעיל גם ברור, שעבור מערכת חתכים יסודית אחרת צפויות להתקבל תוצאות אחרות, מוטעות, כנראה, גם הן, כי אותה בעיה של קיזוז באיחוד או פיצול של חתכים תחזור על עצמה. וכיוון שמערכת חתכים תלויה בעץ הפורש הנבחר, הרי שעבור עצים פורשים שונים יתקבלו תוצאות שונות!

קעת כבר ברור כי הייצוג הטופולוגי הפשטני של כל אלמנט מבנה על ידי קשת כיוונית, למרות שהוא מקל על ניסוח מטריצינוני של הקשרים במבנה, אינו מקיים את חוק הזרימות, ועל כן לא ניתן להפעיל עליו שיטות, ולו הבסיסיות ביותר, מתורת הגרפים.

אכן, את חוק הפוטנציאלים הוא מקיים, שכן, כזכור מפרק המבוא, די בקביעת הפוטנציאל בצמתים כדי לקיים חוק זה. אך, עם חוק הפוטנציאלים לבדו ניתן להפעיל רק שיטות המבוססות על חוק הפוטנציאלים, כמו שיטת החתכים. מסיבה זו, האנליזה המבוססת על טופולוגיה זו עושה שימוש ישיר בשיטת החתכים כדי לנסח את שיטת ההזזות (Displacement Method או שיטת הקשיחות – Stiffness Method), אך כדי לנסח את שיטת הכוחות (Force Method או שיטת הגמישות – Flexibility Method) לטופולוגיה זו נדרשת מניפולציה אלגברית בלתי מבוטלת. חסרון המחצית השניה, חוק הזרימות, מונע את האפשרות לנסח ישירות גם את שיטת הכוחות, שהיא הביטוי בתורת המבנים לשיטת המעגלים.

הייצוג הגרפי לקורה, ולמבנה בכלל, צריך להיבנות על שני היסודות – חוק הזרימות וחוק הפוטנציאלים, כדי לקבל את חסותה של תורת הגרפים. רק אז יהיו מוטבעים בו כל התכונות האופייניות לייצוג גרפי, ורק אז ניתן יהיה לנצל את הכלים של תורת הגרפים כדי לנתח את הייצוג באלגנטיות, ואף למצוא בו תובנות חדשות ברבדים שטרם נגלו בשיטות הקלאסיות של תורת המבנים. הייצוג הגרפי צריך להיות שונה מהייצוג הטופולוגי שתואר לעיל. הייצוג הגרפי צריך להיות אחר.

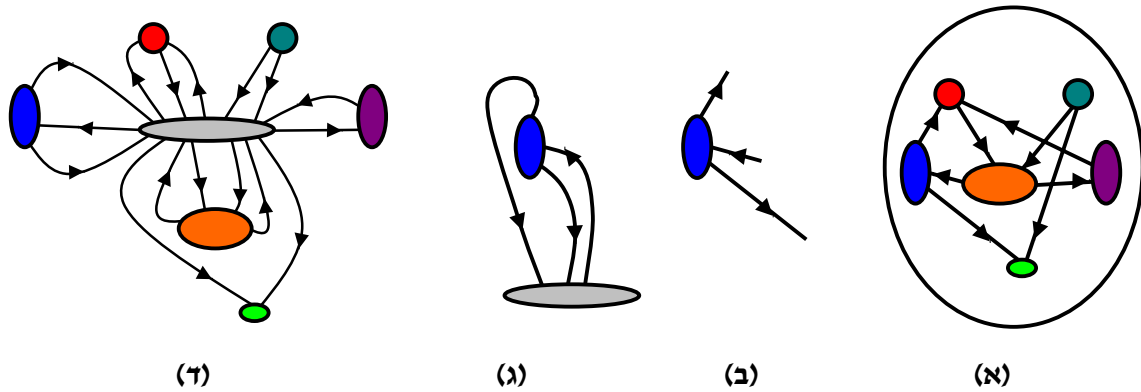
2.2. פיתוח הייצוג של קורה על ידי גרף זרימות

עד כה תוארה הבעיה שבייצוג משטר הזרימות באלמנט כפיפה. תוארה בקצרה גם השיטה הרווחת בספרות, העוקפת את הבעיה האמורה כדי להצליח לנתח מבנה גם מבלי לייצג אותו איזומורפית. אחד היעדים המרכזיים שהוצב בעבודה זו הוא ייצוג איזומורפי של המבנה, וכדי להשיג יעד זה לא די בשיטות הטופולוגיות הקיימות. בפרק הבא, פרק 3, יפותח מן היסוד, שלב אחר שלב, הייצוג המלא למבנה שעליו מבוססים כל הפרקים שלאחר מכן. הבערת בו סקרנותו יוכל לפנות מכאן לפרק 3, אך, לצחצוח הדעת, יובא בהמשך פרק זה פיתוח של גרף זרימות לייצוג הכוחות במבנה. הפיתוח כאן ייעשה בדרך שונה מזו שבפרק 3, כדי להרחיב ולהעשיר את רמת הטיפול בסוגיית ייצוג המומנט. פיתוח זה גם מצומצם באופיו מזה שבפרק 3, כי כאן הייצוג הוא רק לכוחות גזירה ומומנטים בקורה, אך כבר בייצוג פשוט ומצומצם שכזה יתגלה יתרונן של ייצוג איזומורפי, כשיתברר כי מוטבעות בתוכו מניה וביה הדיאגרמות הידועות של כוחות גזירה ומומנטים בקורה.

2.2.1. ייצוג שיווי משקל של גוף חופשי

נתונה מערכת בשיווי משקל, ובה פריטים נקודתיים המפעילים כוחות הדדיים ביניהם. כל פריט במערכת נמצא בשיווי משקל, ובפרט – ביחס לאדמה. בדומה לדיאגרמת גוף חופשי, ניתן לתאר את הפריט כנקודה שמפעילה כוחות או שפועלים עליה כוחות, ללא עניין במקור הכוחות או בפריטים אחרים המושפעים מכוחות אלה. בלי לפגוע במצבו הדינמי של הפריט, אפשר לייחס את כל הכוחות המשפיעים על

הפריט כאילו הם יוצאים מהאדמה, וליצור גרף זרימות, ובו קשתות זרימה הולכות וחוזרות בין הצומת המייצג את הפריט לבין הצומת המייצג את האדמה. תהליך בניית גרף כזה מודגם באיור 2.6.

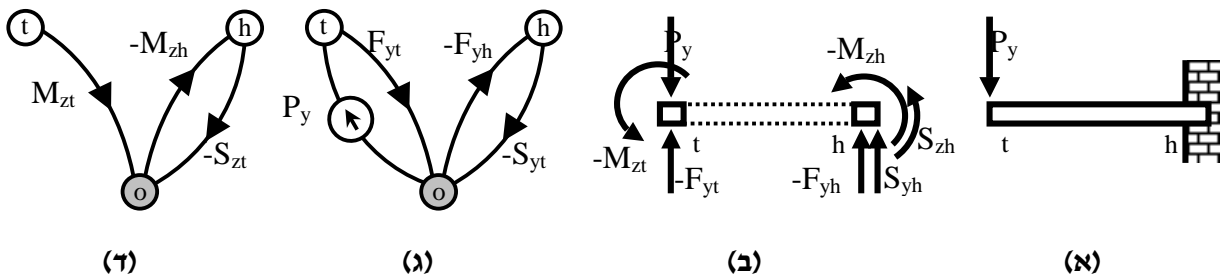


איור 2.6: ייצוג פריטי מערכת בשיווי משקל על ידי גרף זרימות

(א) מערכת פריטים נקודתיים המפעילים כוחות זה על זה. (ב) דיאגרמת גוף חופשי של הפריט הכחול שבמערכת. (ג) גרף זרימות המבוסס על דיאגרמת הגוף החופשי הכחול. הגרף מקיים את חוק הזרימות, כי הגוף הכחול בשיווי משקל, ועל כן סך הזרימות היוצאות ממנו והנכנסות אליו הוא אפס. אותם זרימות, בסימן הפוך, הם הנכנסים אל והיוצאים מצומת הייחוס, הצבוע אפור, ומהווים אותה קבוצת חתך כקודם, שהזרימה בה – אפס. (ד) ייצוג המערכת על כל פריטיה על ידי גרף זרימות.

2.2.2. ייצוג שיווי משקל של קצות האלמנט

בעזרת גרף הזרימות הכללי לשיווי משקל, ניתן לייצג את החלקים החשובים באלמנט הכפיפה, והם שני הקצוות, שבדרך כלל כלפיהם מיוחסות השאלות ההנדסיות, כמו תזוזות קצה, כוחות וכד'. כדי לעשות זאת, יש לבדוד תחילה את הקצוות, היינו הקטע המזערי שבכל אחד מקצות האלמנט, מזערי כל כך עד שלמעשה אין לו אורך ולכן אין בו שינוי מומנט כמתחייב מן הקשר (2.1). לכל קצה כזה יש לייחס את כל הכוחות הפועלים עליו. זה כולל את הכוחות הפועלים על הקצה מחוץ לאלמנט – עומסים, תגובות סמכים וממשק עם אלמנטים אחרים, וכולל גם את הכוחות הפועלים מתוך האלמנט על הקצוות. כמובן, שאם האלמנט בשיווי משקל, יהיו הקצוות בשיווי משקל, ולכן הכוח הפועל מתוך האלמנט על קצה יהיה שקול והפוך לסך הכוחות הפועלים על הקצה מחוץ לאלמנט. תהליך הייצוג מודגם באיור 2.7 על קורה רתומה.



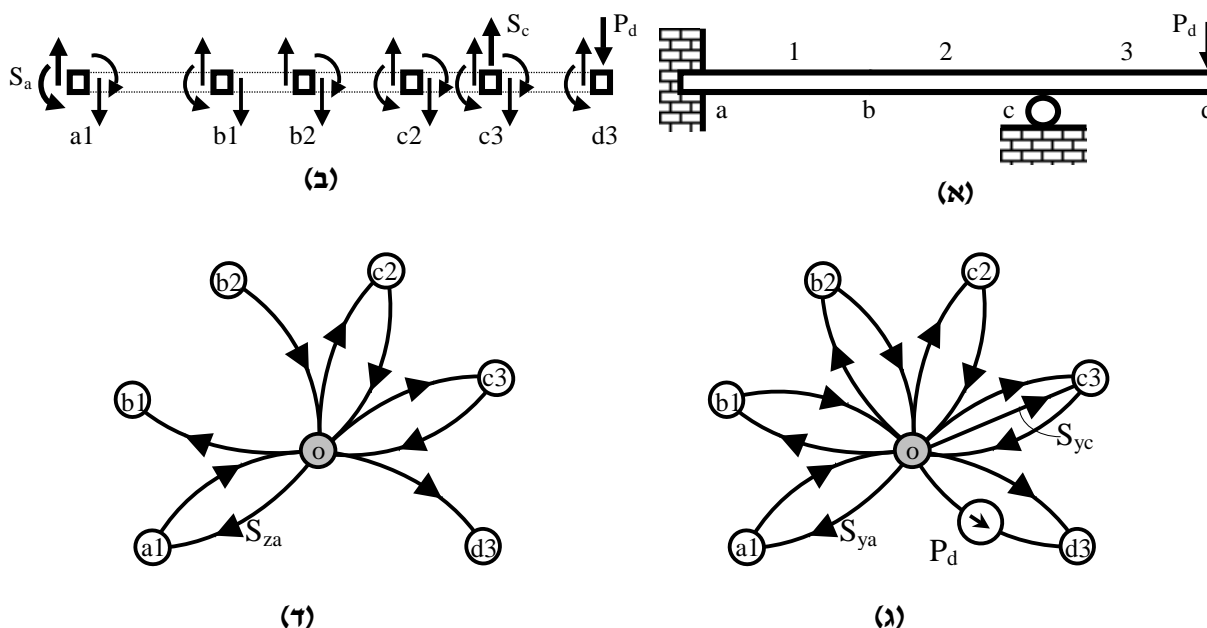
איור 2.7: ייצוג קורה רתומה בשיווי משקל על ידי גרף זרימות

(א) קורה רתומה מועמסת בקצה. (ב) שני ה'פריטים' המעניינים במערכת הקורה הם הקצוות, לכן מוראות דיאגרמות גוף חופשי של הקצוות בלבד, ללא עניין, בשלב זה, בהשפעה ההדדית ביניהם. בקצה הזנב פועלים העומס ושני מימדי הכוחות המופעלים על ידי הקורה על הקצה (שהם ההפך מהכוחות המופעלים על הקורה, ולכן סימן המינוס). בקצה הראש פועלים הכוחות מצד הקורה (גם כאן נדרש המינוס), וכן שני מימדי תגובות סמך הריתום. (ג) גרף זרימות לפי שיווי משקל בכוח הגזירה לשני הפריטים. ניתן לסמן את הכוח הפועל על הצומת בסימן המקורי, כפי שנעשה לגבי P_y ו- F_{yh} , או להפוך את כיוון הקשת, כאילו הצומת הוא מפעיל הכוח, ואז להפוך גם את סימן הכוח, כפי שנעשה לגבי F_{yt} ותגובות הריתום. (ד) גרף זרימות לפי שיווי משקל במומנט לשני הפריטים. גם כאן נהפך סימן הכוח כשמתהפך כיוון הפעלתו.

כל קצה מיוצג על ידי צומת בגרף הזרימות, וכל צומת בגרף מקושר בלעדית עם צומת הייחוס על ידי קשתות, שהזרימה בהן מייצגת את הכוחות הפועלים על הקצה המיוצג על ידי הצומת. אם כוח פועל על הקצה בערך מסוים, ניתן לייצג את הכוח כקשת המכוונת מצומת הייחוס אל הצומת המייצג, ובה זרימה באותו הערך, או כקשת המכוונת הפוך – מן הצומת המייצג אל צומת הייחוס, עם ערך זרימה הפוך גם כן.

2.2.3. ייצוג שיווי משקל של קורה וצמצום ראשוני שלו

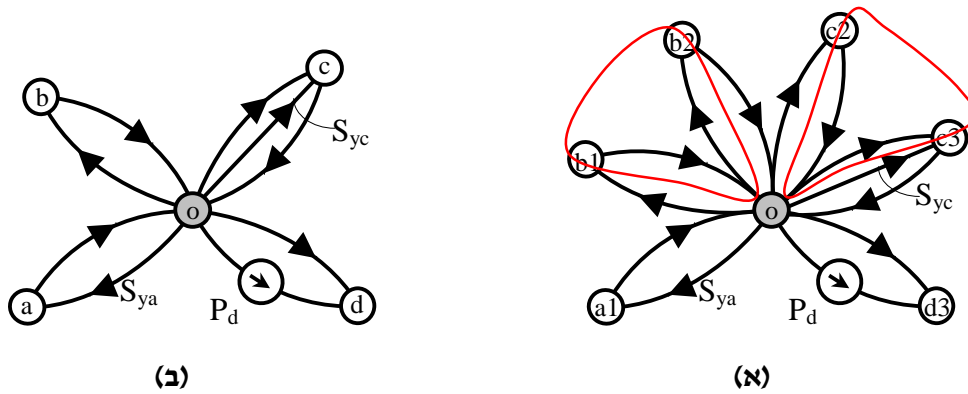
התוצאה הראשונית של ייצוג כזה היא גרף מאוד מורכב, שמספר צמתיו כפול ממספר האלמנטים במערכת, וכל אחד מן הצמתים שבו מחובר ישירות לצומת הייחוס בקשתות שמספרן כמספר הכוחות הפועלים על הרכיב המיוצג על ידי הצומת. מספר הקשתות בכל מימד גם הוא כפול ממספר האלמנטים, שכן כל כוח פנימי באלמנט פועל על שני קצותיו, וכל פעולה מבין השתיים מיוצגת בקשת נפרדת. באיור 2.8 ניתן לראות ייצוג גרפי של קורה בעלת שלושה אלמנטים.



איור 2.8: ייצוג קורה בעלת שלושה אלמנטים על ידי גרף זרימות ראשוני

(א) קורה בעלת שני אלמנטים מובהקים. הנקודה c היא נקודת ממשק נוספת על שני קצות האלמנט בגלל תגובת הסמך שם, לפיכך חולק האלמנט הימני לשניים, ומעתה יש שלושה אלמנטים בקורה, מסומנים 1-3. (ב) בגישה הבסיסית של שיווי משקל, שתי נקודות הקצה בכל אלמנט הם פריטים נפרדים המערכת, ולפיכך יש בקורה, על שלושת אלמנטיה, 6 פריטים נפרדים. כל פריט מסומן באות המציינת את הצומת בקורה שאליה הוא קשור, ובמספר המציינת את האלמנט, שלו הוא קצה. בכל פריט מסומנים הכוחות הפועלים עליו, גזירה ומומנט. בין האלמנטים b1 ו-b2 אין מומנט הדדי, בגלל מפרק החיבור בנקודה b בקורה. בנקודה c יש תגובת סמך, ובחלוקה לפריטים תגובה זו צוינה כלפי הפריט c3, אך באותה מידה ניתן היה לציין אותה כלפי c2. על הפריט d3 פועל גם כוח חיצוני, כי פריט זה מציינת את קצה הקורה. (ג) גרף זרימת כוחות גזירה. כל פריט מיוצג על ידי צומת, ובנוסף לכך – צומת ייחוס. (ד) גרף זרימות מומנטים. שני הגרפים מרובי צמתים וקשתות.

צמצום מספר הצמתים בגרף ייעשה בפשטות על ידי איחוד צמתים המייצגים קצוות הבאים במגע הדדי. למעשה, ניתן מלכתחילה להגדיר את אזור הממשק בין אלמנטים (מפרק סיבוב, מפרק חיבור וכד') כצומת אחד שעליו פועלים העומסים, התגובות וגם הכוחות מתוך האלמנטים המחוברים לאזור זה. באיור 2.9 מודגם צמצום גרף זרימת כוחות הגזירה של הקורה שבאיור 2.8.



איור 2.9: צמצום גרף זרימת כוחות הגזירה שבאיור 2.8

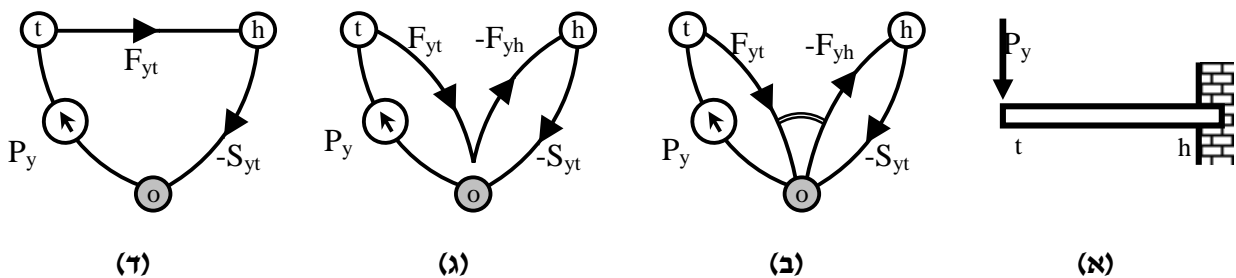
(א) התחומים המוקפים אדום מציינים כל אחד נקודה פיסיקלית אחת, ושתי הקשתות בכל תחום מציינות שני כוחות הדדיים באותה נקודה. שני כוחות אלה שווים ומנוגדים מעצם טבעם, ואינם מוסיפים ידע. (ב) צמצום התחומים האדומים על ידי ביטול צמד הכוחות ההדדיים בכל תחום, ואיחוד זוג הצמתים, המייצגים אותה נקודה פיסיקלית. כיוון שאין יותר שני צמתים באותה נקודה, ניתן לוותר על הסימון הכפול של הצומת, ולהסתפק בציון האות של הנקודה שאותה הוא מייצג.

2.2.4. צמצום נוסף של קשתות בגרף זרימת כוחות הגזירה

צמצום מספר הקשתות המיוחסות לכל אלמנט ייעשה על ידי החלת קשרי התלות בין ערכי הזרימה, כפי שניתן להסיק מ- (2.1). תחילה גרף זרימת הכוחות. מ- (2.1) נמצא כי:

$$(2.13) \quad F_{yh} = -F_{yt}$$

לפיכך קשר ישיר בין זרימת הכוח הפועל מן הקורה על קצה הזנב לבין זה הפועל על קצה הראש. מבלי להפר את חוק הזרימות, ניתן להעביר ישירות זרימה מצומת הזנב לצומת הראש של האלמנט, בלא שזו תעבור בצומת הייחוס. תהליך זה מוראה באיור 2.10.



איור 2.10: הפשטה של גרף זרימת כוחות גזירה בקורה רתומה

(א) קורה רתומה מועמסת בקצה. (ב) הכוח שהצומת t מפעיל על הקורה זהה לכוח שמפעילה הקורה על הצומת h (2.13), ועובדה זו צויינה על ידי קו כפול (כסימן '=') המקשר בין שתי הקשתות המייצגות כוחות אלה. (ג) הכוח השווה נכנס לצומת הייחוס מכיוון צומת t, ומיד יוצא ממנו לעבר צומת h. לפיכך, אינו משפיע על יתר הזרימות הקשורות לצומת הייחוס, וניתן לבצע את ההחזרה ל- h עוד לפני שהזרימה נכנסה לצומת הייחוס, בלי לשבש את משטר הזרימה, ולפיכך גם בלי לעבור על חוק הזרימות. (ד) את המסלול המעוקל של זרימת הכוח הפנימי של הקורה ניתן ליישר, ולקבל גרף מופשט, בו הצומת t משפיע ישירות על הצומת h באמצעות קשת שערך הזרימה בה כערך הכוח שמפעיל הקצה t על הקורה. כמוכן שזה גם הכוח שמפעילה הקורה על הקצה h.

ניסיון ליישם צמצום זה על גרף זרימת המומנטים אינו עולה בקנה אחד עם היחס בין המומנטים הפועלים בתוך הקורה על הקצוות, כפי שהוא מופק מ- (2.1):

$$(2.14) \quad M_{zt} = -M_{zh} + L \cdot F_{yt}$$

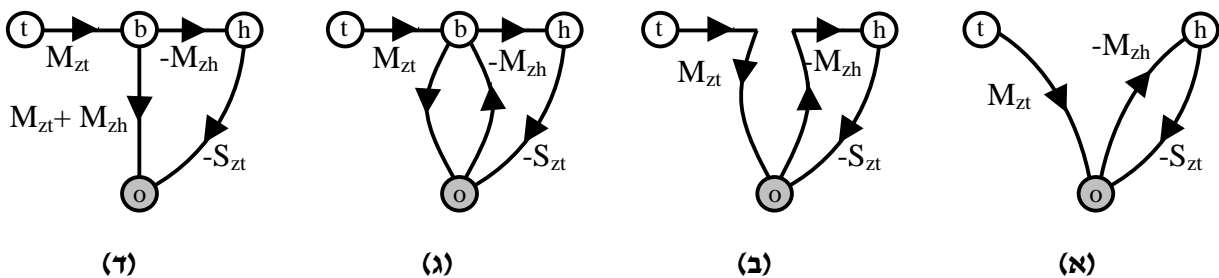
למעשה, מחזיר ניסיון כזה את הבעיה העיקרית אל העניין, ולפיכך יש להימנע ממנו. תחת זאת, ייעשו ניסיונות אחרים לבטא את הקשר (2.1) בתוך הגרף.

2.2.5. אפשרות א' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים

ניסיון ראשון ייעשה על בסיס שמירה על ערכי הזרימה המיוחסים לצמתים, כלומר, זרימה הנכנסת לצומת, או היוצאת ממנו, תישאר כפי שהיא. ברוח זו, הזרימה מ- t תצא כסדרה, אך כדי שתגיע ל- h בערכה הנכון, ינוכה ממנה הפרש הזרימות אל צומת הייחוס, והיתרה תהיה אז ערך הזרימה שצריך להגיע לצומת h. הניכוי ייעשה בצומת חדש, צומת ביניים שיסומן b (b-between), והתהליך, השומר על חוק הזרימות, מוראה באיור 2.11. הפרש הזרימות, על פי (2.14), יהיה:

$$(2.15) \quad M_{zt} - (-M_{zh}) = M_{zt} + M_{zh} = L \cdot F_{yt}$$

התוצאה, המוראית באיור 2.11, לא זו בלבד שלא צמצמה את הגרף, כי אם הוסיפה לו קשת וצומת על כל אלמנט במבנה. עם זאת, פינה של כבוד שמורה לתוצאה זו, שכן היא תואמת ברוחה ייצוג אחר של אלמנט מבנה, ייצוג על ידי מעגל חשמלי, שנעשה על ידי Kron (1963) לפני כארבעים שנה, וככל הידוע, זהו הייצוג האחרון עד כה לאלמנט כפיפה שנעשה תוך שמירה על חוק הזרימות.

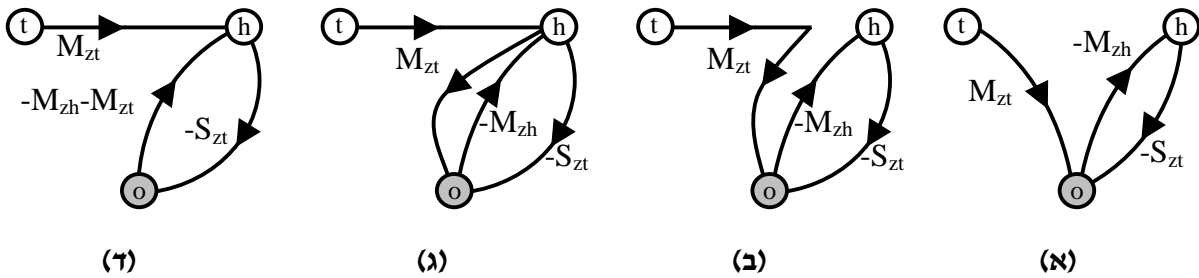


איור 2.11: הפשטה של גרף זרימת המומנט בקורה רתומה על ידי הוספת צומת ביניים

(א) גרף זרימת המומנטים של הקורה הרתומה לפי שיווי משקל בצמתים. (ב) תהליך הפוך לזה שנעשה בקשת זרימת כוח הגזירה בגרף הכוחות (איור 2.10) נעשה כאן לגבי קשתות הזרימה של המומנטים בקצות הקורה. כל קשת 'מכופפת' כדי ליצור נקודת ביניים לאורכה, (ג) ושתי נקודות הביניים מאוחדות ליצירת צומת ביניים, b. חוק הזרימות נשמר, כי כל זרימה הנכנסת לצומת b יוצאת ממנו במלואה לכיוון יעדה המקורי. (ד) הזרימה הכפולה בין צומת b וצומת הייחוס מאוחדת לזרימה בקשת אחת, שסך הזרימה בה, לפי (2.15), הוא סכום המומנטים הפועלים על קצות הקורה.

2.2.6. אפשרות ב' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים

הייצוג של Kron נעשה בראייה של מהנדס חשמל, וללא קשר ישיר לתורת הגרפים וליכולות הניתוח שלה. תוספת צומת – משמעותה ענף נוסף בעץ הפורש, ולפיכך שורה נוספת במטריצת החתכים. תוספת קשת – קישור נוסף ושורה נוספת במטריצת המעגלים. כדי להימנע מהרחבה זו, ייעשה ניסיון נוסף לשפר את הייצוג הגרפי המקורי של שיווי המשקל, בתהליך המוראה באיור 2.12.



איור 2.12: הפשטה של גרף זרימת המומנט בקורה רתומה ללא הוספת צומת ביניים

(א) גרף זרימת המומנטים של הקורה הרתומה לפי שיווי משקל בצמתים. (ב) קשת מומנט הזנב 'מכופפת' כדי ליצור נקודת ביניים לאורכה. (ג) נקודת הביניים מאוחדת עם צומת h. חוק הזרימות נשמר, כי הזרימה הנוספת שהוכנסה לצומת h מוצאת ממנו במלואה לכיוון יעדה המקורי. (ד) הזרימה הכפולה בין צומת h וצומת הייחוס מאוחדת לזרימה בקשת אחת, שסך הזרימה בה, לפי (2.15), הוא סכום המומנטים הפועלים על קצות הקורה. האיחוד לא כולל את קשת תגובת הריתום, שגם היא מקשרת בין אותם צמתים, כדי לא לאבד מידע לגבי ערך הזרימה בקשת זו.

מתוך שתי הקשתות של כוחות הקצה באלמנט, רק קשת הזנב תעבור את תהליך החצייה, ונקודת הביניים תהיה בצומת קיים – צומת הראש. כפיצוי על הקשת שנחצתה לשתיים, תאוחד הקשת הכפולה שבין צומת הראש וצומת הייחוס. באפשרות זו, הזרימה המקוזזת את הבדלי המומנטים בקצוות יוצאת מצומת הייחוס, ולא נכנסת אליו כבאפשרות הראשונה. על כן ערך הזרימה בה הפוך ל- (2.15):

$$(2.16) \quad -M_{zt} - M_{zh} = -L \cdot F_{yt}$$

כאן המקום להעיר, שתהליך איחוד של קשתות ניתן היה לעשות כבר בגרף המקורי של שיווי המשקל, כשכל הקשתות היוצאות מצומת כלשהי אל צומת הייחוס היו מאוחדות. כמובן שאז סך הזרימה בכל קשת מאוחדת כזו היה 0. באופן כללי, בתהליך איחוד אובד ידע. מהבחינה הזו – הסכום קטן מחלקיו. לעומת זאת, בתהליכי האיחוד שהופעלו בשתי האפשרויות שתוארו, מידע אינו הולך לאיבוד, אלא לובש צורה אחרת. בפרט, אם מספר הקשתות נותר כפי שהוא, כבאפשרות האחרונה, הידע מתחלק אחרת בין הקשתות, אך אינו מאבד מערכו.

2.2.7. אפשרות ג' לצמצום קשתות בגרף זרימת המומנטים

כיוון שהניסיון השני צלח יפה, יצוין בקצרה ניסיון שלישי, הוזה לשני, חוץ מהיפוך תפקידי הקשתות. באפשרות זו, הקשת הנחצית היא דווקא הקשת המכוונת אל הראש, והצומת שבו מתבצעת החצייה היא צומת הזנב. כיוון שכך, האיחוד נעשה בין קשת הזנב והקשת החדשה המקבילה לה, ולפיכך קשת הקיזוז יוצאת מהזנב לצומת הייחוס (במקום מצומת הייחוס אל הראש כבאפשרות השנייה), ובקשת המחברת את הזנב עם הראש זורם היפוך הכוח הפועל על הראש (במקום הכוח הפועל על הזנב). אפשרות זו שקולה לאפשרות השנייה מבחינת המידע המוטבע בה, ומבחינת סגולותיה הגרפיות, ולכן לא תטופל עוד בעבודה זו.

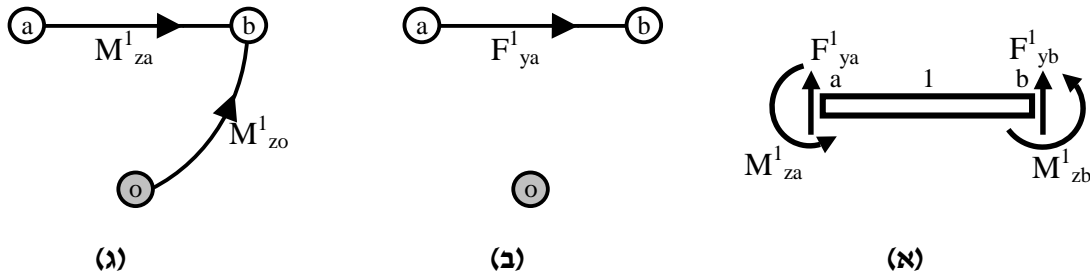
2.2.8. הייצוג הנבחר של אלמנט קורה על ידי גרף זרימות

יסוכם לפיכך על בחירת האפשרות השניה כייצוג המועדף לכוחות המבנה. כדי להימנע מהצורך לרשום בתוך הייצוג את תלות הזרימה של קשת קיזוז המומנטים בזרימה של הקשת המייצגת את

האלמנט, תצוין קשת הקיזוז בסימון משלה, M_{zo} , לציין שזרימת המומנט שבה מגיעה מצומת הייחוס. התלות בין הזרימות תצוין בנפרד, לפי (2.16), כך:

$$(2.17) \quad M_{zo} = -L \cdot F_{yt}$$

באיור 2.13 מוראים הגרפים הסופיים, המייצגים את כוחות הגזירה ואת המומנטים באלמנט, עם הסימון החדש לקשת הקיזוז.



איור 2.13: ייצוג אלמנט קורה על ידי גרף זרימות

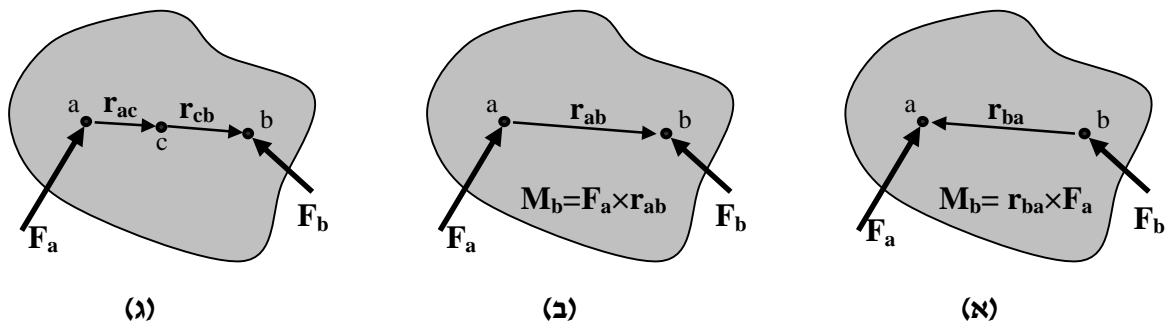
(א) אלמנט שמספרו במבנה הוא 1, נתון בין הצמתים a ו-b. סך הכוחות המופעלים על קצותיו הם אלה המוראים. (ב) גרף זרימות המייצג את האלמנט. זהו אינו גרף מלא כמובן, כי אינו מקיים את חוק הזרימות, אך הוא מייצג את הזרימה באלמנט לבדו. (ג) ייצוג זרימת המומנטים באלמנט. גם זה אינו גרף מלא, כי אם ייצוג הזרימה באלמנט לבדו. הזרימה בקשת o-b מקזזת את ההבדל בין הזרימה הנכנסת לצומת b מצומת a לפי הגרף לבין זו הנדרשת בפועל לפי המציאות. זרימה זו תלויה בזרימת כוח הגזירה באלמנט, לפי (2.17), כך:

$$(2.18) \quad M_{zo}^1 = -L_1 \cdot F_{ya}^1$$

2.2.9. ניתוח משמעותה של קשת קיזוז המומנטים בייצוג לאלמנט קורה

בטרם תודגם שיטת הבנייה של גרף זרימות על מבנה מורכב יותר, כדאי להבהיר את ערך הקיזוז הזורם, בשלוש האפשרויות שהוזכרו, בין צומת הייחוס לאחת משלושת הצמתים, בהתאם לאפשרות. הדברים ידועים מן המכניקה הקלאסית של גוף קשיח, אבל כדאי להזכיר אותם כאן, כדי להבין יותר לעומק את ייצוג מהלך הזרימה באלמנט המבנה.

באיור 2.14 מתואר בפשטות אופן חישוב המומנט בנקודה לפי כוח ומרחקו מהנקודה.



איור 2.14: חישוב המומנט בנקודה בהשפעת כוח קווי

(א) חישוב המומנט בנקודה b אינו מושפע מכוח קווי העובר ב-b. (ב) ניסוח התוצאה בעזרת רדיוס-וקטור הפוך. (ג) שימוש בתוצאות של א' וב' כדי לנסח את המומנט בנקודת ביניים.

הניסוח המוכר הוא :

$$(2.19) \quad \mathbf{M}_b = \mathbf{r}_{ba} \times \mathbf{F}_a$$

ובהיפוך כיוון הרדיוס-וקטור :

$$(2.20) \quad \mathbf{r}_{ba} = -\mathbf{r}_{ab}$$

משוואה (2.19) תהיה :

$$(2.21) \quad \mathbf{M}_b = \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{ab}$$

שימוש בתוצאות (2.19) ו-(2.21) לגבי נקודת ביניים, c, שבין שתי נקודות הפעלת כוח, כבאיור 2.14, תניב את המומנט הבא :

$$(2.22) \quad \mathbf{M}_c = \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{ac} + \mathbf{r}_{cb} \times \mathbf{F}_b$$

כשהקשר בין שני הרדיוס-וקטורים הוא :

$$(2.23) \quad \mathbf{r}_{ac} + \mathbf{r}_{cb} = \mathbf{r}_{ab}$$

אם הגוף בשיווי משקל, הרי שמתקיים :

$$(2.24) \quad \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = 0$$

הצבת (2.24) ב-(2.22) תיתן :

$$(2.25) \quad \mathbf{M}_c = \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{ac} + \mathbf{r}_{cb} \times (-\mathbf{F}_a) = \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{ac} + \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{cb}$$

עם הצבת (2.23), ושימוש נוסף ב-(2.24) וב-(2.20), יתקבלו 4 ניסוחים שונים למומנט הנטפל לגוף בהשפעת שני הכוחות הקוויים :

$$(2.26) \quad \mathbf{M}_c = \mathbf{F}_a \times \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_{ba} \times \mathbf{F}_a = \mathbf{r}_{ab} \times \mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b \times \mathbf{r}_{ba}$$

את התוצאות של (2.26) אפשר ליישם על אלמנט הקורה הרתומה שלעיל, עם הצבת הבאים :

$$(2.27) \quad \mathbf{r}_{ab} \rightarrow \mathbf{r}_{th} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{r}_{ht}$$

$$(2.28) \quad \mathbf{F}_a \rightarrow \mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{yt} \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{F}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{yh} \\ 0 \end{bmatrix}$$

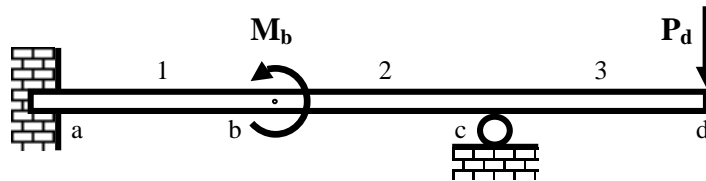
ואז המומנט הנטפל לקורה, לפי (2.26), הוא :

$$(2.29) \quad M_{zc} = -L \cdot F_{yt} = L \cdot F_{yh}$$

וזה בדיוק הקיזוז להפרש הזרימות לפי (2.17). המומנט, וזאת אפשר לראות גם באופן כללי מ- (2.26), אינו תלוי במיקום נקודת הביניים. זו יכולה להיות בראש, בזנב, ביניהם, ובכל נקודה במרחב. מכאן נדבך נוסף בהבנת השקילות בין שלוש האפשרויות של גרף זרימות המומנטים. בכל האפשרויות, התוספת, המגיעה אל הקורה מצומת הייחוס, זהה בערכה, בין אם היא מגיעה לצומת הראש, כבאפשרות השניה, בין אם לצומת הזנב, כבאפשרות השלישית, ובין אם לצומת ביניים, כבאפשרות הראשונה, ששם סימנה הוא הפוך רק בגלל כיוונה ההפוך של קשת הקיזוז.

2.2.10. דוגמה לייצוג של קורה על ידי גרף זרימות

כסיכום ביניים, יודגם תהליך הבנייה של גרף זרימות בצורתו הסופית על הקורה שבאיור 2.15.

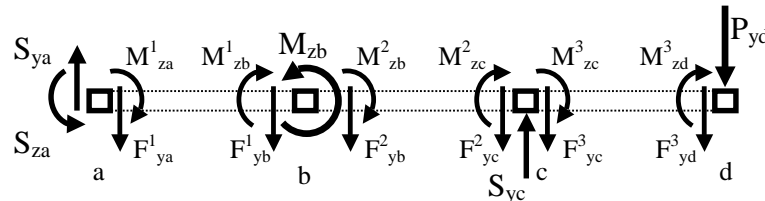


איור 2.15: קורה לדוגמה של ייצוג על ידי גרף זרימות

בקורה אלמנט אחד בלבד, אך זה מחולק לשלושה בגלל שתי נקודות הממשק לאורכו: b – נקודת הפעלת מומנט חיצוני, ו-c – נקודת סמך.

השלב הראשון בבניית ייצוג לקורה הוא לאתר את נקודות הממשק בין אלמנטים או בין הקורה לסביבתה. נקודות אלה הן ארבע: a – הריתום, b – נקודת הפעלת מומנט חיצוני, c – נקודת סמך, ו-d – נקודת הפעלת כוח חיצוני.

כל אחת מהנקודות תיוצג כצומת, והשלב השני הוא לסמן בכל נקודה את הכוחות הפועלים עליה.



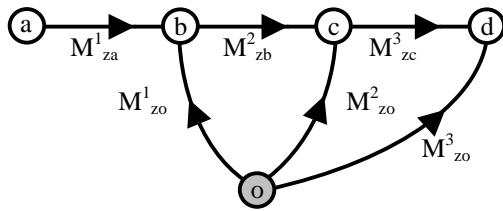
איור 2.16: בידוד הצמתים בקורה וסימון הכוחות

הכוחות המופעלים על ידי האלמנטים עצמם על הצמתים ניתנו בערכם ההפוך, לפי כוחות המופעלים על האלמנטים על ידי הצמתים, ולכן כיוון פעולתם הפוך גם הוא לכיוונים החיוביים המוגדרים במערכת הצירים הכללית.

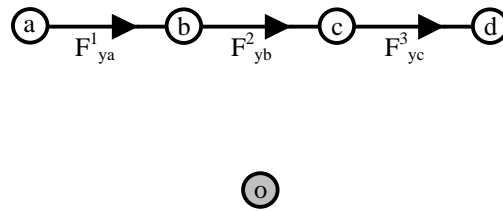
בשלב השלישי ייבנו הגרפים של זרימת כוחות הגזירה וזרימת המומנטים, כל גרף עם צמתיו וצומת ייחוס, כשהאלמנטים מיוצגים לפי איור 2.13. שני הגרפים בשלב זה – באיור 2.17.

לגרפים עצמם יש להוסיף את קשרי התלות בין זרימת המומנטים בקשתות הקיזוז לבין זרימת כוחות הגזירה בקשתות האלמנטים המתאימות להן, לפי (2.17):

$$(2.30) \quad \begin{bmatrix} M_{zo}^1 \\ M_{zo}^2 \\ M_{zo}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & & \\ & -L_2 & \\ & & -L_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{ya}^1 \\ F_{yb}^2 \\ F_{yc}^3 \end{bmatrix}$$



(ב)

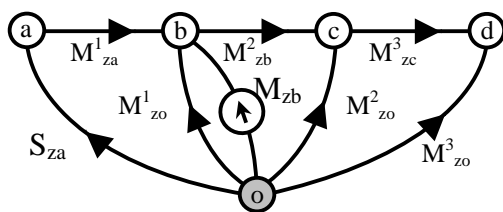


(א)

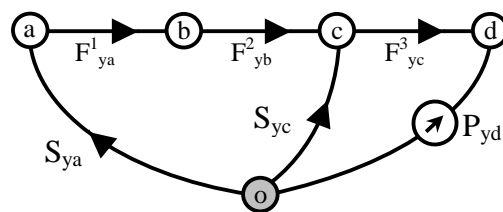
איור 2.17: ייצוג הכוחות באלמנטים על ידי גרף זרימות

(א) גרף זרימת כוחות גזירה. (ב) גרף זרימת מומנטים. ערכי המומנטים בקשתות הקיזוז חושבו לפי (2.17), והם תלויים לפיכך בזרימת כוחות הגזירה, כל אלמנט וכוח הגזירה שלו.

השלב הסופי בייצוג הוא להוסיף את העומסים והתגובות לגרפים. באיור 2.18.



(ב)



(א)

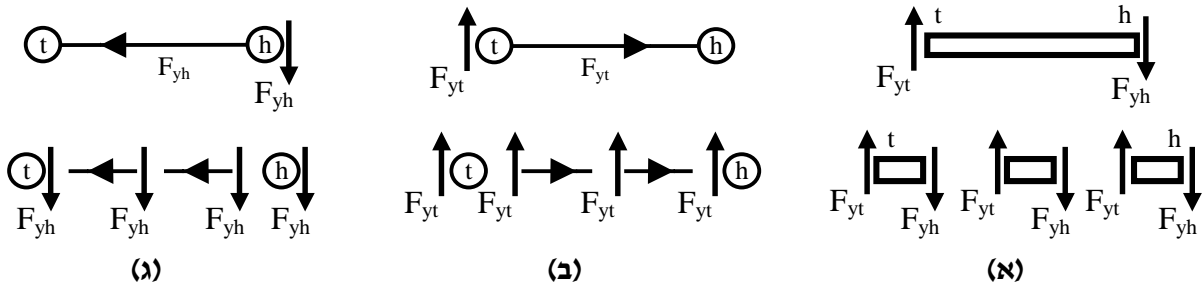
איור 2.18: ייצוג הכוחות בקורה על ידי גרף זרימות

(א) גרף זרימת כוחות גזירה. (ב) גרף זרימת מומנטים.

2.3 משמעות הזרימות בייצוג ויצירת דיאגרמות הכוחות והמומנטים בקורה

2.3.1 משמעות לכיווני הקשתות

לפי הצורה בה נבנו הקשתות בייצוג הגרפי, ניתן לפרש את הזרימה בקשת (איור 2.19).



איור 2.19: זרימת כוחות בקשת

(א) כוחות הגזירה הפועלים על אלמנט קורה. כאן צוינו הכוחות הסקלריים, והעובדה שהם מנוגדים מבוטאת בניגוד כיוון חיצו הכוח. מצב זה חל על כל קטע וקטע באלמנט. בכל קטע, על צד הפונה לזנב פועל אותו כוח הפועל על הזנב, וכן לגבי הראש. ניתן לראות זאת כזרימה של הכוח הפועל על הזנב לאורך האלמנט, כך שבכל נקודה ונקודה, על החתך שמצד הראש פועל כוח הזנב על ידי החתך שמצד הזנב, ואילו על החתך שמצד הזנב פועל כוח הראש על ידי החתך שמצד הראש. (ב) זרימת הכוח בקשת מבטאת עניין זה: הזרימה הנכנסת לזנב הקשת, וזרימת בקשת עד ראשה, היא הכוח המופעל על הזנב, ובכל נקודה בקשת ממשיכה הזרימה להפעיל את הכוח על קטע הקשת הבא. (ג) בהיפוך כיוון הקשת מתהפך גם הכוח, ושווה אז לכוח הפועל על ראש האלמנט. זרימה זו ממשיכה מצומת הראש (המקורית) לצומת הזנב, ופועלת, בכל נקודה לאורך הקשת, על הקטע שבהמשך הקשת, בכוח הזורם.

זרימה בקשת, מצומת הזנב לצומת הראש, היא הכוח המופעל על ידי צומת הזנב על צומת הראש. הפעלת הכוח היא רציפה – כל נקודה לאורך הקשת מפעילה את הכוח על הנקודה הסמוכה לה מצד הראש. דומה הדבר להתקדמות חזית גל בתווך.

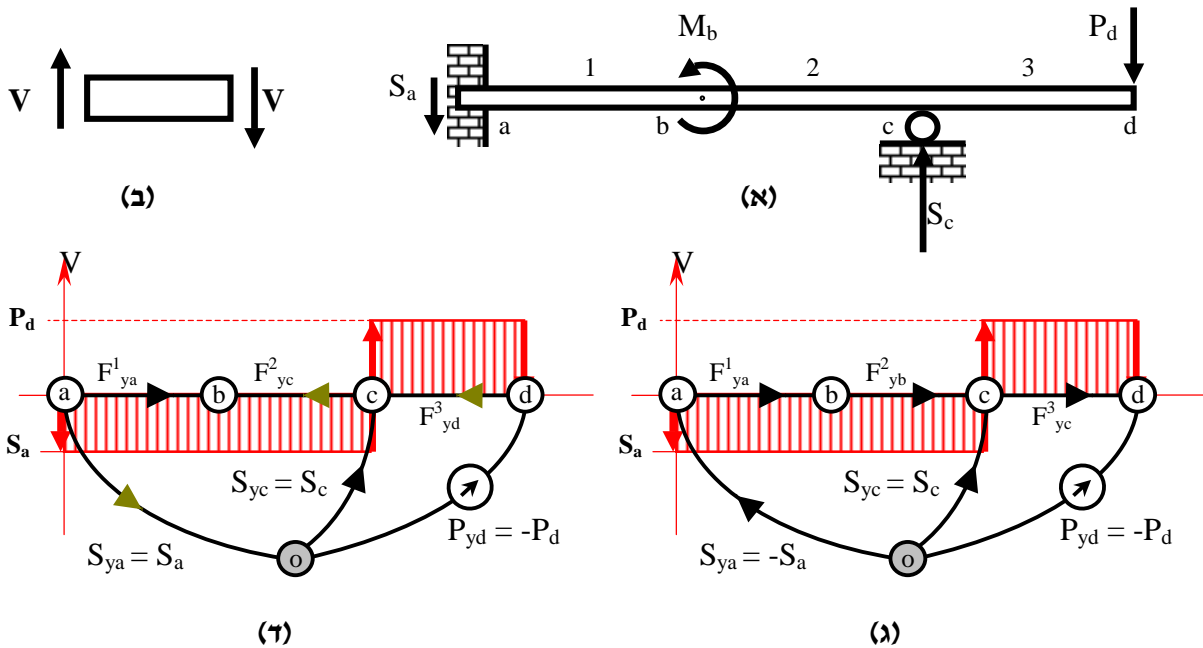
החלפת כיוון בקשת מהפכת את ערך הזרימה בקשת, ולפיכך יזרום כוח הפוך בכיוון ההפוך. משמעות זו מתלכדת עם החוק השלישי של ניוטון. אם חותכים את הקשת בנקודה כלשהי לאורכה, יופעל בחתך כוח מצד הזנב על צד הראש השווה לכוח הזורם בקשת. לפיכך, באותו חתך, יפעיל צד הראש על צד הזנב את הכוח ההפוך, לפי החוק השלישי של ניוטון, ויהיה זה הכוח הזורם בקשת בכיוון ההפוך.

2.3.2. בניית דיאגרמת כוחות גזירה

אחד מכלי הניתוח הבסיסיים לידיעת מצבה הפנימי של קורה הוא דיאגרמות הכוחות הפנימיים – דיאגרמת כוחות הגזירה ודיאגרמת המומנט. בייצוג על ידי גרף זרימות מוטבעת דיאגרמת כוחות הגזירה, וניתן ללמוד זאת מן המשמעות שהוקנתה לעיל לזרימה בקשת. לצורך הדוגמה, תיבנה דיאגרמת כוחות גזירה לקורה שבאיור 2.15. הדיאגרמה תיבנה ללא ערכים מספריים, ויונח כי המומנט בצומת b קטן דיו, כך שהתגובה האנכית בריתום a היא כלפי מטה, והתגובה ב-c היא כלפי מעלה והיא כמובן סכום התגובה ב-a והעומס ב-d (איור 2.20). האופן בו מוגדרת גזירה חיובית מוראה באיור 2.20. לפי הגדרה זו:

אם הכוח הזורם בקשת משמאל לימין הוא חיובי, הרי שהגזירה היא חיובית.

כי זרימה משמאל לימין משמעותה, כאמור לעיל, הפעלת כוח בכל קטע וקטע על הצד השמאלי שלו, וכוח חיובי (כלפי מעלה) על הצד השמאלי נחשב לגזירה חיובית. הדיאגרמה מתוארת באיור 2.20.



איור 2.20: דיאגרמת כוחות גזירה באמצעות גרף זרימות

(א) הקורה מאיור 2.15. לצורך הדוגמה הונח שהמומנט החיצוני קטן דיו כדי שתגובות הסמכים, בערכן החיובי, יהיו בכיוון המוראה. (ב) הגדרה לכוח גזירה חיובי (Hibbeler, 1985). (ג) דיאגרמת כוחות הגזירה נבנית על בסיס גרף הזרימות מאיור 2.18. על פי הזרימה בקשתות האלמנטים, ניתן לדעת את ערך הגזירה, והאם הוא חיובי או שלילי. (ד) התחכום בגרף הזרימות הוא שאם כיוון הקשת משתנה, גם הכוח הזורם בקשת הופך כיוון, ומופעל על הצד השני של החתך בכל נקודה ונקודה. כך נשמרות באופן אוטומטי ההגדרות של כוח גזירה חיובי לפי ב'. כאן נבחרו אקראית שלוש קשתות להפוך בהן את הכיוון (סומנו בירוק, וערכיהן שונו בהתאם), וניתן להיווכח שדיאגרמת הגזירה נותרה בעינה.

2.3.3 בניית דיאגרמת מומנטים

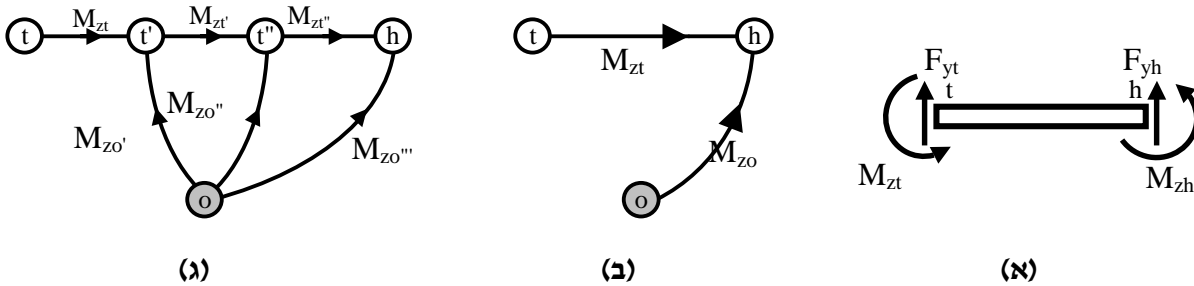
ניסיון להחיל את משמעות הזרימה בקשת על גרף זרימות המומנטים נתקל בבעיה שהיא נחלתם של כל הייצוגים הטופולוגיים למומנט – בעיית האי-רציפות. בשונה מכוח הגזירה, הקבוע לאורך האלמנט, המומנט משתנה לאורך האלמנט, גם אם האלמנט מושפע מקצותיו בלבד.

למרות שהייצוג על ידי גרף זרימות מדמה את היחס בין האלמנט לסביבתו, הוא מצמצם את הידע לגבי הנעשה בתוך האלמנט לכדי ערך קיזוז כללי אחד של המומנט בין קצות האלמנט, ולא תורם לידיעת המומנט בכל חתך וחתך של הקורה. ידיעה כזו נדרשת לבניית דיאגרמת מומנטים, ומן הראוי שגרף הזרימות יידע לענות גם על דרישה זו.

ניתן לטעון לקולא, שאם ההשפעות על האלמנט הן בקצוות בלבד, הרי מידיעת המומנטים בקצוות ניתן לשרטט את דיאגרמת המומנט, כי בידוע הוא שקצב השתנות המומנט לאורך הקורה בין שני ערכי הקצה הוא קבוע, ולפיכך קו ישר יחבר בדיאגרמה בין ערכי הקצה. טענה זו יפה בדיעבד, לאחר שייוודע כיצד להשתמש בגרף הזרימות כדי לשרטט את דיאגרמת המומנט, אך אינה יפה לכתחילה, שכן היא עושה שימוש במידע חיצוני אשר, נכון לעכשיו, אינו טבוע בייצוג. לפי הייצוג, המומנט קבוע לאורך האלמנט, ובראשו מתווסף באחת ערך הקיזוז בין הקצוות, וזו אינה המציאות.

הפתרון לבעיית האי-רציפות נמצא בחשבון האינפיניטסימלי: יש לחלק כל אלמנט חלוקה נוספת, לתת-אלמנטים אינפיניטסימליים, והייצוג אז ישקף את זרימות הכוחות והמומנטים בכל נקודה לאורך הקורה.

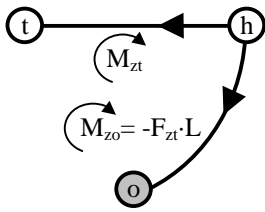
כדי לפשט את התיאור שלהלן, יחולק כל אלמנט לשלושה תת-אלמנטים בלבד, והדמיון ישלים לבדו את התמונה כולה. הייצוג לאלמנט קורה יהפוך לפיכך לזה המוראה באיור 2.21, ויכונה בהמשך פרק זה – 'הייצוג הרציף'. יש לשים לב לכך, שבמקום קיזוז חד-פעמי של מומנטים בראש האלמנט, הקיזוז הוא כעת רציף, על ידי תוספת אינפיניטסימלית של מומנט הקיזוז בכל נקודה, לפי אורך התת-אלמנט, dL , וכוח הגזירה הזורם בתת-אלמנט זה. כמובן, שהזרימה של כוח הגזירה היא אחידה בכל התת-אלמנטים של אותו אלמנט, כפי שניתן ללמוד מדיאגרמת כוחות הגזירה שבאיור 2.20. כיוון שגם אורך התת-אלמנטים הוא אחיד, הרי שערך הקיזוז, $F_y \cdot dL$, הוא אחיד לכל אורך האלמנט, ומכאן שקצב גידול המומנט לאורך אלמנט הקורה הוא קבוע, בתנאי שאין לאלמנט ממשק עם הסביבה לאורכו, חוץ מקצותיו.



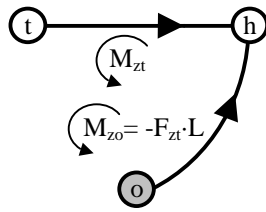
איור 2.21: ייצוג רציף למומנט

(א) אלמנט קורה ללא ממשק עם הסביבה לאורכו. (ב) הייצוג הרגיל, הבדיד, לזרימת המומנטים באלמנט. (ג) ייצוג רציף לזרימת מומנטים באלמנט. האלמנט מחולק לקטעים אינפיניטסימליים שאורך כל אחד מהם dL , וקשת קיזוז המומנט המתאימה לכל תת-אלמנט שווה בערכה לזרימת כוח הגזירה באלמנט, מוכפלת באורך האינפיניטסימלי: $M_{zo} = F_{yt} \cdot dL$. כאן, למען הפשטות, יוצגו רק שלושה תת-אלמנטים כאלה.

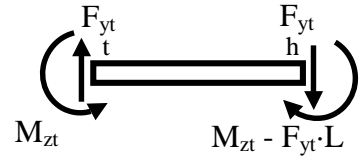
לפני שרטוט דיאגרמת המומנטים, יש לבחון, והפעם בקצרה, את משמעות זרימת המומנטים בקשתות הייצוג לאלמנט, בהתאם למשמעות שניתנה לזרימת כוחות הגזירה לעיל. באיור 2.22 ניתנת משמעות לזרימה בשני כיווני הקשת, עם התחשבות בהגדרת הכיוון החיובי של המומנט.



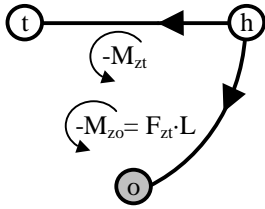
(א)



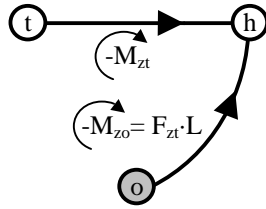
(ב)



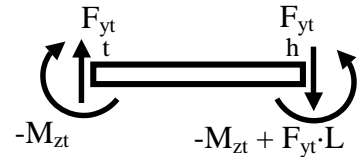
(ג)



(ד)



(ה)



(ו)

איור 2.22: זרימת מומנטים בקשת

(א) האלמנט, עם הכוחות והמומנטים הפועלים עליו. הערכים הם סקלריים (ולכן לא מודגשים), וכיונם החיובי הוא כזה המוראה. על הזנב פועל מומנט הזנב נגד כיוון השעון, ועל הראש פועל, עם כיוון השעון, מומנט השווה למומנט הזנב חסר מכפלת כוח הגזירה באורך האלמנט. (ב) כמו לגבי כוחות הגזירה, משמעות זרימת המומנט בכיוון הקשת שהמומנט הפועל על הזנב, נגד כיוון השעון כאמור, ממשיך לאורך הקשת, ובכל נקודה לאורכה מופעל, על ידי קטע הקשת שלפני הנקודה, על הקטע שבהמשך הקשת, בצד ראשה, באותו ערך ובאותו כיוון. בצומת הראש מצטרף גם המומנט המגיע מצומת הייחוס, ושניהם גם יחד פועלים לצאת מצומת הראש ולפעול את פעולתם על המשך הקורה. (ג) ניתן להפוך את כיוון הזרימה בכל קשת, ואז הערך הזורם גם הוא מתהפך. כאן, במקום שינוי סימן, ההיפוך נעשה על ידי החלפת כיוון המומנט – עם כיוון השעון. כעת המשמעות היא שלתוך צומת הראש נכנסת זרימה בשיעור מומנט הראש, ומיד מתפצלת לשתי זרימות. האחת מפעילה על צומת הייחוס את המומנט המוראה עם כיוון השעון, והשניה זורמת בקשת האלמנט ומפעילה, ממנה והלאה, מומנט שערכו כמומנט הזנב, אך עם כיוון השעון. (ד) את המומנטים על האלמנט בא' ניתן להפוך בכיונם, ואז הערכים הם כמוראה. (ה) לפי ד', הזרימה מצומת הזנב לצומת הראש היא עם כיוון השעון, בערך הפוך למומנט הזנב. למסקנה זו ניתן היה להגיע ישירות מב', על ידי היפוך הערך והכיוון של המומנט הזורם. (ו) היפוך קשתות הייצוג מקנה לו משמעות של המומנט המופעל בד' על הראש. מן הראש מתפצלת הזרימה, ולצומת הזנב מגיע מומנט נגד כיוון השעון, המתנגד למומנט המופעל חיצונית על צומת הזנב בערך זהה אך בכיוון הפוך. למסקנה זו ניתן היה להגיע ישירות מג', על ידי היפוך הערך והכיוון של המומנט הזורם.

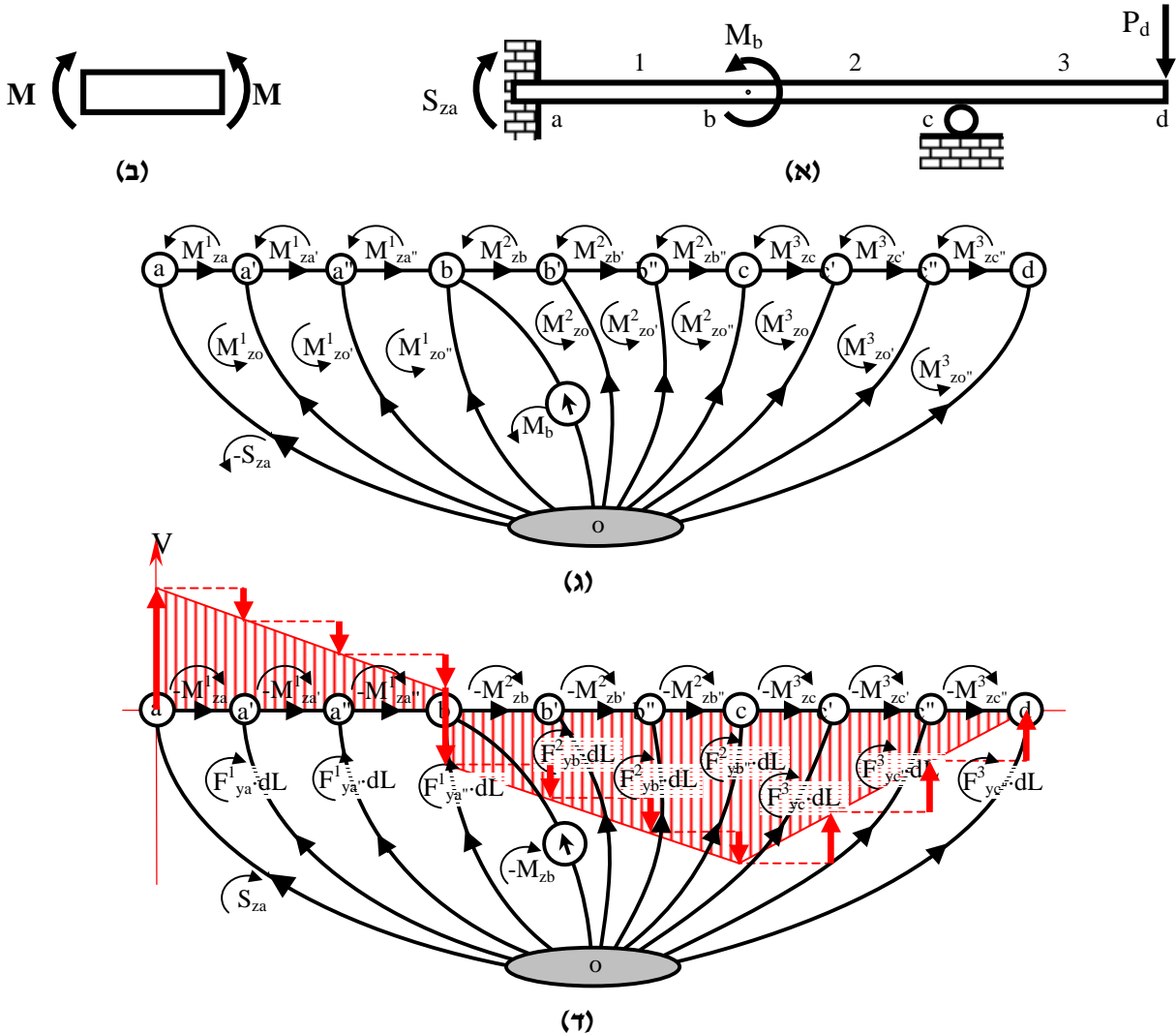
עם הבנת משמעות הזרימה בקשת, ניתן לחזור אל הקורה ולבנות לה גרף רציף, כמוראה באיור 2.23. בהגדרה המסורתית של כיווני המומנט החיוביים על האלמנט לצורך דיאגרמת המומנט (Hibbeler, 1985), כמתואר באיור 2.23, על הקצה השמאלי המומנט הוא עם כיוון השעון, ואילו על הקצה הימני – נגד כיוון השעון. זאת בניגוד להגדרה הכללית כאן, שכיוון חיובי הוא תמיד נגד כיוון השעון. לפיכך, גרף זרימת המומנטים, 2.23, הפוך בסימניו לנדרש בדיאגרמת המומנט:

אם המומנט הזורם בקשת משמאל לימין הוא שלילי, הרי שהכפיפה היא חיובית.

עם זאת, לפי איור 2.22, ניתן להפוך את כיוון המומנט בקשת, תוך שינוי סימן הערך, בלי לשנות את כיוון הקשת עצמה. המעבר לגרף שבאיור 2.23 הוא לפיכך מיידי, ושם, הזרימה בקשתות מפעילה ימינה מומנט עם כיוון השעון, כפי שנדרש לצורך דיאגרמת המומנט.

דיאגרמת המומנט מתקבלת אוטומטית לפי הזרימות בגרף, כמוראה באיור 2.23, ולמרות שכל אלמנט חולק, לצורך תחושת הרציפות, לשלושה תת-אלמנטים בלבד, בניית דיאגרמה רציפה אינה דורשת יותר מכך. היפוך כיוונה של קשת הופך את סימן הערך או את כיוון ההפעלה של המומנט הזורם, ואם,

בהיפוך קשת, בוחרים לשנות את כיוון ההפעלה, אזי ערך הזרימה נשאר בעינו, והגדרת הכיוונים מתיישבת עם הנדרש בהגדרה המסורתית של הכיוונים בדיאגרמת המומנט. ממילא, כמו בדיאגרמת הכוחות שנבנתה לעיל, גם כאן, דיאגרמת המומנט נותרת קבועה ללא תלות בכיווני הקשתות.



איור 2.23 : דיאגרמת מומנטים באמצעות גרף זרימות

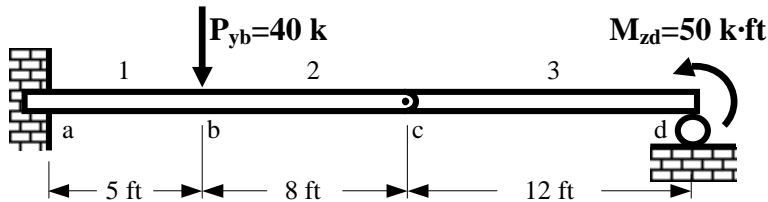
(א) הקורה מאיור 2.15, עם סימון תגובת המומנט בריתום בערכה הסקלרי החיובי, לפי הכיוון המוראה. (ב) הגדרת הכיוונים החיוביים לצורך דיאגרמת המומנטים. (ג) גרף זרימות מומנטים רציף. הערכים זורמים בקשתות בערכם הסקלרי המוראה, על סמך הגדרת הכיוון החיובי של מומנט – נגד כיוון השעון. לפי המשמעות של זרימה בקשת, המומנט, למשל בקשת a-a', מתקדם ימינה, ככיוון הקשת, כשהוא מפעיל על הקצה השמאלי שלה מומנט נגד כיוון השעון, בניגוד לכיוון המוגדר בצד שמאל של הקטע המייצג בב' לצורך דיאגרמת המומנט. (ד) כיוון הפעלת המומנטים הוחלף, תוך שינוי סימן הערך, מבלי להפוך את כיווני הקשתות, וכעת זרימת המומנט מתאימה להגדרה בב'. הקו המרוסק תוחם את דיאגרמת המומנט לגרף המוראה, שבו כל קטע חולק רק לשלושה תת-אלמנטים. הזרימה מתחילה מצומת a לפי ערך התגובה בריתום, ועם כל תת-אלמנט יש שינוי לפי קשתות הקיזוז היוצאות מצומת הייחוס. בשני האלמנטים הראשונים, כוח הגזירה, לפי הדיאגרמה באיור 2.20, הוא שלילי, ולכן ערך הקיזוז בקשתות המיוחסות לתת-אלמנטים המתאימים הוא שלילי. בהקבלה, ערך הקיזוז באלמנט 3 הוא חיובי, וערכו שונה, בהתאם לשוני כוח הגזירה בו ביחס לאלמנטים 1 ו-2. בצומת b יש תוספת (שלילית בערכה) לפי המומנט החיצוני הנכנס אליו. התאמת הדיאגרמה לגרף רציף לגמרי היא פשוטה, ומסומנת בקו רציף.

2.4 פתרון קורה מסוימת סטטית על ידי גרף זרימות

גרף הזרימות שפותח עד כה מייצג במהותו את יחסי הכוחות, ומבטא באופן שונה, אך איזומורפי, את שיווי המשקל במערכת. תנאי שיווי משקל לבדו אינו מספיק, אלא לפתרון בעיות מסוימות סטטית לכוחות, וכיוון שגרף זרימות אינו כולל ידע נוסף על יחסי הכוחות, הרי שבעזרתו ניתן גם כן לפתור בעיות מסוימות סטטית בלבד, ורק לכוחות. פתרון לתזוזות, ובוודאי שפתרון בעיות יתר סטטיות, דורש מערכות תנאים ויחסים נוספות, שאינם כלולים בגרף הזרימות. בחלק זה, המסכם את הפרק, יודגם פתרון של קורה מסוימת סטטית באמצעות הכלים הקומבינטוריים שפותחו עד כה. בהמשך העבודה יפותחו כלים נוספים, ואז ניתן יהיה לפתור את הייצוג לזרימות בצורה שיטתית שתוצג בפרק 5 (סעיף 5.3.3).

2.4.1 קורה מסוימת סטטית – בעיה לדוגמה

הבעיה הנתונה מבוססת על תרגיל 24-3 ב-Hibbeler (1985), ומוראת באיור 2.24. יש למצוא את כוח הגזירה במפרק c ואת המומנט בחתך b.

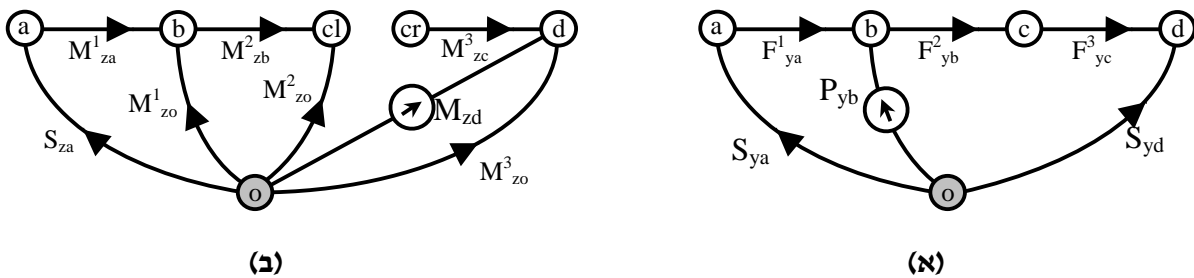


איור 2.24: קורה מסוימת סטטית

הקורה מסוימת סטטית, בעלת שני אלמנטים מובהקים המחוברים ביניהם במפרק סיבוב. למרות זאת, יזוהו בה שלושה אלמנטים לצורך הייצוג הגרפי, כי הנקודה b מהווה צומת לממשק עם הסביבה בגלל העומס החיצוני המופעל בה. הצמתים מסומנים a-d, והאלמנטים - 1-3.

2.4.2 ייצוג הקורה והבעיה באמצעות גרף זרימות

גרף זרימת כוחות הגזירה נבנה מיידית, ומוראה באיור 2.25. בבניית גרף זרימת המומנטים יש להיזהר, שכן המפרק c אינו מעביר מומנטים, ומשמעות הדבר לגבי הייצוג הגרפי היא שיש נתק בזרימה בין הצד הימני של c לבין צידו השמאלי. הרי זה כאילו היו שתי קורות נפרדות מבחינת המומנטים, ועל כן הגרף המתקבל הוא כבאיור 2.25ב.



איור 2.25: גרף זרימות של הקורה לדוגמה

(א) גרף זרימת כוחות גזירה. (ב) גרף זרימת מומנטים. הצומת c אינו מעביר מומנטים, ולכן מהווה נתק בזרימה. לפיכך הופרד לשניים – cr – לצד הימני של c, ו-c1 – לצד השמאלי.

דרך אחרת להסתכל על הנתק, היא לחזור לאופן בחירת הצמתים בגרף. צומת נבחר לייצג נקודה במבנה, באופן שהכוחות הפועלים עליה מאזנים זה את זה. אזור המפרק c אינו יכול לפיכך להיבחר כצומת, שכן מומנט מצד אחד אינו יכול לאזן מומנט מן הצד האחר, וכל מומנט צריך איזון על ידי גורם אחר הנמצא באותו הצד, ומכאן שדרושות שתי משוואות שיווי משקל, ולא אחת, לאותו אזור. לפיכך יש לבחור כל צד של אזור המפרק כצומת נפרד עם איזון משלו.

לגרפים עצמם יש להוסיף את קשרי התלות בין זרימת המומנטים בקשתות הקיזוז לבין זרימת כוחות הגזירה בקשתות האלמנטים המתאימות להן, לפי (2.17):

$$(2.31) \quad \begin{bmatrix} M_{zo}^1 \\ M_{zo}^2 \\ M_{zo}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & & \\ & -L_2 & \\ & & -L_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{ya}^1 \\ F_{yb}^2 \\ F_{yc}^3 \end{bmatrix}$$

כיוון שהייצוג קיים, ניתן להתעלם ממה שהוא מייצג, ולהתייחס אליו כאל גרף זרימות כללי. הבעיה המקורית לובשת ניסוח חדש, כך: עבור הייצוג הגרפי שבאיור 2.25, עם קשר התלות (2.31), יש למצוא את הזרימה F_{yb}^2 הנכנסת לצומת c וכן את הזרימה M_{zb}^2 הנכנסת לקשת מצומת b, בהינתן ש:

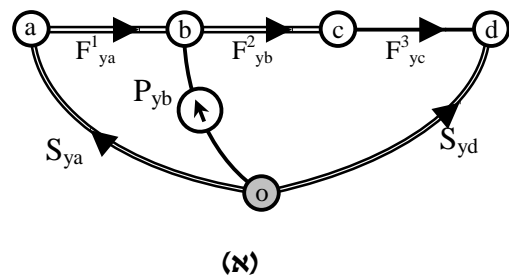
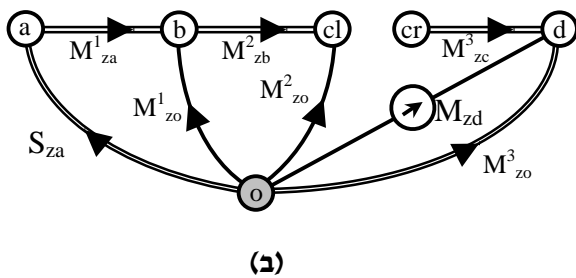
$$(2.32) \quad P_{yb} = 40 \text{ k} ; M_{zd} = 50 \text{ k} \cdot \text{ft} ; L_1 = 5 \text{ ft} ; L_2 = 8 \text{ ft} ; L_3 = 12 \text{ ft}$$

2.4.3. בחירת עצים פורשים כהכנה לניסוח חוק הזרימות

את גרף הזרימות יש לנתח באמצעות חוק הזרימות (1.13). כדי לעשות זאת ביעילות, יש למצוא עץ פורש לכל אחד משני הגרפים. העץ הפורש בכל גרף צריך להיבחר בתבונה, כדי לייעל את תהליך איתור המידע. כיוון שהגרף מייצג זרימות בלבד, וכזכור מפרק המבוא (1.7), זרימות בגרף תלויות בזרימות הקישורים, יש לבחור עץ פורש כך שהקישורים יהיו בעלי זרימה ידועה, או לפחות זרימה שידועתה תקל על מציאת זרימות נוספות בגרף. למעשה, במקום לבחור עץ פורש, צריך פשוט לבחור קישורים.

בגרף זרימת כוחות הגזירה (איור 2.25א), מלבד מקור הזרימה הידוע, הקשת המייצגת את אלמנט 3 היא המקילה ביותר על ידיעת זרימות נוספות, ובזאת ניתן להיווכח בשלב זה על ידי בחינת הזרימה בצומת d בגרף המומנטים (איור 2.25ב), שלה קשורות שלוש זרימות: האחת - של אלמנט 3, והיא זרימה אפסית, שכן קשת זו אינה כלולה במעגל ולכן לא יכולה לזרום בה כל זרימה, השניה – מקור המומנטים, שהזרימה בו ידועה, והשלישית – קשת הקיזוז של אלמנט 3, שהזרימה בה חייבת להיות שווה והפוכה בכיוונה לזרימה השניה, זו של המקור, כדי שסך הזרימות בחתך, הכולל את שלוש הקשתות האמורות, יהיה אפס. כיוון שהזרימה השלישית תלויה חד-חד ערכית בזרימת כוח הגזירה בקשת המייצגת את אלמנט 3, הרי שידעת הזרימה בקשת המייצגת את אלמנט 3 תקל על ידיעת הזרימה בקשת הקיזוז של אלמנט 3, ולפיכך תיבחר כקישור בגרף זרימת כוחות הגזירה. יתר הקשתות בגרף זה תהיינה ענפים של העץ הפורש.

בגרף זרימת המומנטים, מלבד קשת מקור הזרימה, יש לבחור עוד שני קישורים, ואלו יהיו שתי קשתות הקיזוז של אלמנטים 1 ו-2, כיוון שהזרימה בהן תלויה בזרימת כוחות הגזירה בקשתות המייצגות את אלמנטים 1 ו-2 בהתאמה, וכיוון שהזרימות האחרונות תיוודענה מיידית עם שימוש בקישורים שנבחרו לגרף כוחות הגזירה, הרי ששתי קשתות הקיזוז בגרף המומנטים קרובות לידעת הזרימה בהן, ולפיכך תיבחרנה כקישורים. יתר הקשתות בגרף זרימת המומנטים תיבחרנה כענפים בעץ הפורש.



איור 2.26: בחירת עצים פורשים בגרף הזרימות

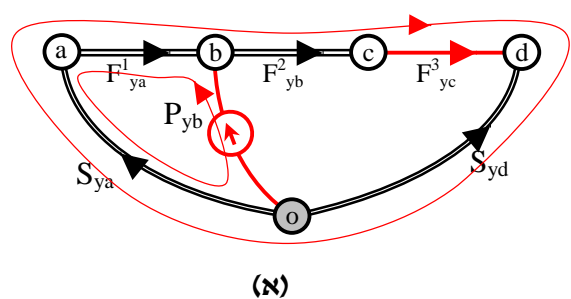
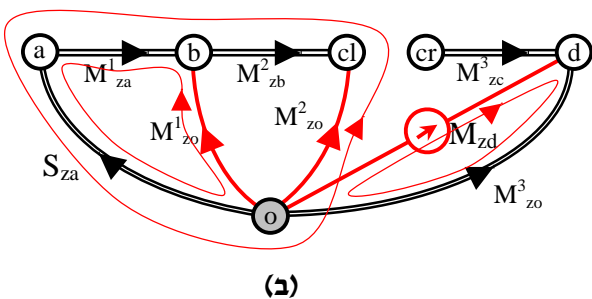
(א) עץ פורש בגרף כוחות הגזירה לא יכול את מקור הזרימה המייצג את העומס החיצוני. הסיבה לכך היא, כזכור מפרק 1, שזרימה בגרף מתקבלת מזרימות הקישורים. לפיכך חשוב לבחור כקישורים את הקשתות בהם הזרימה ידועה. מאותה סיבה נבחרה גם הקשת המייצגת את אלמנט 3 כקישור, כי למרות שהזרימה בה אינה ידועה, היא הקרובה ביותר לידיעה מבין הקשתות בגרף, וזה יובן בהמשך, כשינתחו מעגלי הזרימה בגרף המומנטים. (ב) עץ פורש בגרף המומנטים לא יכול גם הוא מקור זרימה. מבין יתר הקשתות תיבחרנה כקישורים שתי קשתות הקיזוז של אלמנטים 1 ו-2, כיוון שהזרימה בהן תלויה בזרימות גרף הכוחות, אותן ניתן יהיה לדעת בשלב מוקדם.

חשוב להדגיש שהבחירה המושכלת של הקישורים, שתוארה לעיל, אינה תנאי הכרחי לפתרון הגרף, אך היא הופכת את תהליך הפתרון ליעיל ביותר.

2.4.4. ניסוח חוק הזרימות באמצעות מטריצת המעגלים

מהתבוננות בעצים הפורשים שנבחרו מתברר, כי מספר הענפים בכל גרף עולה משמעותית על מספר הקישורים. כיוון שלחוק הזרימות ניסוח באמצעות מטריצת החתכים (1.13) וניסוח באמצעות מטריצת המעגלים (1.7), ייבחר כאן הניסוח באמצעות מטריצת המעגלים, כי מיעוט הקישורים מאפשר לבנות אותה בקלות יחסית למטריצת החתכים, אך ניתן היה לבחור גם אחרת.

כדי לבנות את מטריצת המעגלים, יש לסמן את הקישורים בכל אחד מן הגרפים, ולתאר את המעגלים היסודיים שהם מגדירים, כמוראה באיור 2.27. יוזכר, שכל קישור מגדיר מעגל, המורכב, חוץ ממנו, מענפים בלבד, ושכל קישור יש מעגל יחיד כזה. כיוון המעגל הוא ככיוון הקישור המגדיר אותו, ובמטריצת המעגלים, קשת שכיוונה ככיוון המעגל שבו היא משתתפת מגדירה ערך 1 המקום המתאים, ואם כיוונה הפוך לכיוון המעגל היא מגדירה ערך -1.



איור 2.27: ציון מעגלי הזרימה לקישורים הנבחרים לשם בניית מטריצת המעגלים

בכל גרף, הקישור הודגש באדום, והמעגל המתאים לו הותווה, באדום גם כן, עם ציון הכיוון, המתאים לכיוון הקישור המגדיר אותו. (א) גרף זרימת כוחות הגזירה. (ב) גרף זרימת המומנטים.

מטריצת המעגלים לגרף זרימת כוחות הגזירה תהיה:

$$(2.33) \quad \mathbf{B}^y = \begin{matrix} F_{ya}^1 & F_{yb}^2 & F_{ya} & S_{yd} & F_{yc}^3 & P_{yb} \\ F_{yc}^3 \\ P_{yb} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_T^y \mid \mathbf{I}]$$

ומטריצת המעגלים לגרף זרימת המומנטים תהיה :

$$(2.34) \quad \mathbf{B}^z = \begin{matrix} M_{za}^1 & M_{zb}^2 & M_{zc}^3 & M_{zo}^3 & S_{za} & M_{zo}^1 & M_{zo}^2 & M_{zd} \\ M_{zo}^1 \\ M_{zo}^2 \\ M_{zd} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_T^z \mid \mathbf{I}]$$

חוק הזרימות מתקיים דרך היחס בין הזרימות בקישורים לזרימות בענפים :

$$(1.6) \quad \mathbf{F}_T = \mathbf{B}_T^t \cdot \mathbf{F}_C$$

ולפיכך, מ- (2.33) ומ- (1.6) יתקבל חוק הזרימות לגרף כוחות הגזירה :

$$(2.35) \quad \begin{bmatrix} F_{ya}^1 \\ F_{yb}^2 \\ S_{ya} \\ S_{yd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{yc}^3 \\ P_{yb} \end{bmatrix}$$

ומ- (2.34) ומ- (1.6) יתקבל חוק הזרימות לגרף זרימת המומנטים :

$$(2.36) \quad \begin{bmatrix} M_{za}^1 \\ M_{zb}^2 \\ M_{zc}^3 \\ M_{zo}^3 \\ S_{za} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{zo}^1 \\ M_{zo}^2 \\ M_{zd} \end{bmatrix}$$

2.4.5 פתרון הבעיה

מהשורה הרביעית של (2.36) :

$$(2.37) \quad M_{zo}^3 = -M_{zd}$$

ולפי השורה השלישית של (2.31) :

$$(2.38) \quad M_{zo}^3 = -L_3 \cdot F_{yc}^3$$

משתי המשוואות האחרונות ומהנתונים (2.32) מתקבל :

$$(2.39) \quad F_{yc}^3 = \frac{M_{zd}}{L_3} = \frac{50 \text{ k} \cdot \text{ft}}{12 \text{ ft}} = 4.17 \text{ k}$$

הצבת התוצאה האחרונה ב- (2.35) פותרת את הזרימות בגרף כוחות הגזירה :

$$(2.40) \quad \begin{bmatrix} F_{ya}^1 \\ F_{yb}^2 \\ S_{ya} \\ S_{yd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.17 \text{ k} \\ 40 \text{ k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.83 \text{ k} \\ 4.17 \text{ k} \\ -35.83 \text{ k} \\ -4.17 \text{ k} \end{bmatrix}$$

על ידי הזרימות שהתקבלו, ניתן לדעת את זרימות המומנטים בקשתות הקיזוז שעוד לא ידועות. הצבת (2.40) בשתי השורות הראשונות של (2.31) תיתן :

$$(2.41) \quad \begin{bmatrix} M_{zo}^1 \\ M_{zo}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \text{ ft} & \\ & -8 \text{ ft} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -35.83 \text{ k} \\ 4.17 \text{ k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 179.17 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ -33.33 \text{ k} \cdot \text{ft} \end{bmatrix}$$

וכל שנותר הוא להציב את הידוע ב- (2.36), ולקבל את הזרימות הנותרות בגרף המומנטים :

$$(2.42) \quad \begin{bmatrix} M_{za}^1 \\ M_{zb}^2 \\ M_{zc}^3 \\ M_{zo}^3 \\ S_{za} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 179.17 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ -33.33 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ 50 \text{ k} \cdot \text{ft} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -145.83 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ 33.33 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ 0 \\ -50 \text{ k} \cdot \text{ft} \\ -145.83 \text{ k} \cdot \text{ft} \end{bmatrix}$$

והפתרון הוא לפיכך :

$$(2.43) \quad \underline{F_{yb}^2 = 4.17 \text{ k}} \quad ; \quad \underline{M_{zb}^2 = 33.33 \text{ k} \cdot \text{ft}}$$

2.5 סיכום ומסקנות לגבי הייצוג על ידי גרף זרימות

בפרק זה פותח ייצוג איזומורפי לכוחות באלמנטי כפיפה ובקורות הבנויות מאלמנטים כאלה. בשונה מהדרך האנליטית לניתוח מבנה על ידי מטריצת הפגישות, בייצוג האיזומורפי ניתן 'לראות' את המצב של כל נקודה במבנה, ואת הממשק שלה עם סביבתה. ייצוג כזה, עם שהוא מכסה רק את שיקולי הכוחות, מכיל בתוכו, ללא צורך בכלים נוספים, את כל היבטי הידע הקשורים לכוחות במבנה, ודיאגרמות הכוחות והמומנטים הם רק דוגמה לכך. בפרק הבא יורחב הייצוג לכלל אלמנטי המבנה האורכיים הקיימים, ויושלם לכדי ייצוג התזוזות גם כן.

3. ייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות

התמודדות עם הייחודיות של אלמנטי כפיפה, והרחבת גרף הזרימות, שפותח בפרק הקודם, לכדי גרף המייצג גם את תזוזות המבנה, מחייבות הבנה יסודית של יחסי הכוחות והתזוזות באלמנט המבנה. הבנה כזו תאפשר לפרק את היחסים במבנה למרכיבים ברורים יותר, שבעזרתם ייבנה הייצוג הגרפי. לפיכך מתחיל פרק זה בבחינת הקשרים בין הכוחות והתזוזות באלמנט מבנה מישורי, לפי הידוע מן הספרות. לפי קשרים אלה, ייבנה בהמשך ייצוג גרפי לאלמנט בודד, שאחר כך יותאם לאלמנטי מבנה נפוצים, ולבסוף יורכב גרף שמייצג מבנה הכולל אלמנטים מסוגים שונים, סמכים למיניהם, והעמסה חיצונית. במהלך הפרק, ייבחנו תכונות מיוחדות, טופולוגיות ואחרות, של הייצוג, ותינתן התייחסות לייצוגים של אלמנטים ומתברים מיוחדים במבנה. הדרך לנתח ולפתור ייצוג גרפי מורכב, כזה שיתקבל כאן, תפותח בפרק הבא.

3.1. כוחות ותזוזות באלמנט מבנה מישורי

חלק זה של הפרק דן בדברים ידועים היטב, שהספרות עוסקת בהם בהרחבה מזה למעלה ממאה שנה. בכל זאת, יוצגו כאן שוב ההיבטים הדינמיים והקינמטיים בניתוח אלמנט מבנה מישורי, גם למען רצף הקריאה והבהרת הסימונים, אך בעיקר כדי להאיר את העניין באור מרענן, ולמזג גישות שונות להרכב מחדש של מערכת היחסים באלמנט. על בסיס השיטות והגישות המוכרות, כפי שיוצגו וייבחנו כאן מחדש, ניתן יהיה בהמשך לייצג את האלמנט על ידי גרף.

יודגש גם כאן, שאת כל הפיתוח שלהלן ניתן להרחיב בקלות לאלמנט מרחבי עם 12 דרגות חופש, אך כיוון שהרעיון ברור גם בעזרת אלמנט מישורי, תיחסך הרחבה זו מן העבודה.

והערה לגבי הסימון: כיוון שבשלב זה מנותח אלמנט מבנה בודד, הושמט בחלק זה של הפרק אינדקס אלמנט המבנה, i , מכל הערכים המיוחסים לאלמנט, כדי להקל על הקריאה.

3.1.1. כוחות קצה - שיווי משקל

כזכור מן הפרק הקודם, הבעיה בפיתוח הייצוג הגרפי החלה בחוסר התאמה בין הכוחות הפועלים בקצה האחד של האלמנט לבין אלו הפועלים, באותם מימדים, בקצהו השני. הכוחות הפועלים בקצותיו של אלמנט מישורי מוראים באיור 3.1, מפורקים לרכיביהם במערכת הכללית.

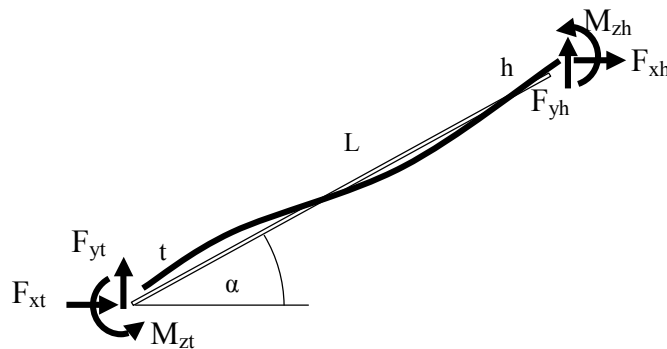
תנאי שיווי המשקל מכתוב את הקשר בין כוחות הראש לכוחות הזנב, כך:

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} F_{xh} \\ F_{yh} \\ M_{zh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -L \sin \alpha & L \cos \alpha & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{xt} \\ F_{yt} \\ M_{zt} \end{bmatrix}$$

וכללית,

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_h = \mathbf{T}_{t \rightarrow h} \cdot \mathbf{F}_t$$

המרה זו – מטרתה להקטין את מספר המשתנים הלוקחים חלק בתהליך. כך ניתן להתייחס לכוחות הזנב בלבד, גם כשיש לטפל בממשק ראש האלמנט עם סביבתו החיצונית.



איור 3.1: כוחות קצה על אלמנט מבנה מישורי

אלמנט חלול – לפני העמסה. אלמנט מלא – מועתק ומעוות אחרי העמסה. α – זווית האלמנט.

3.1.2 תזוזות קצה (Displacements) ועיויים (Deformations) - התאמה

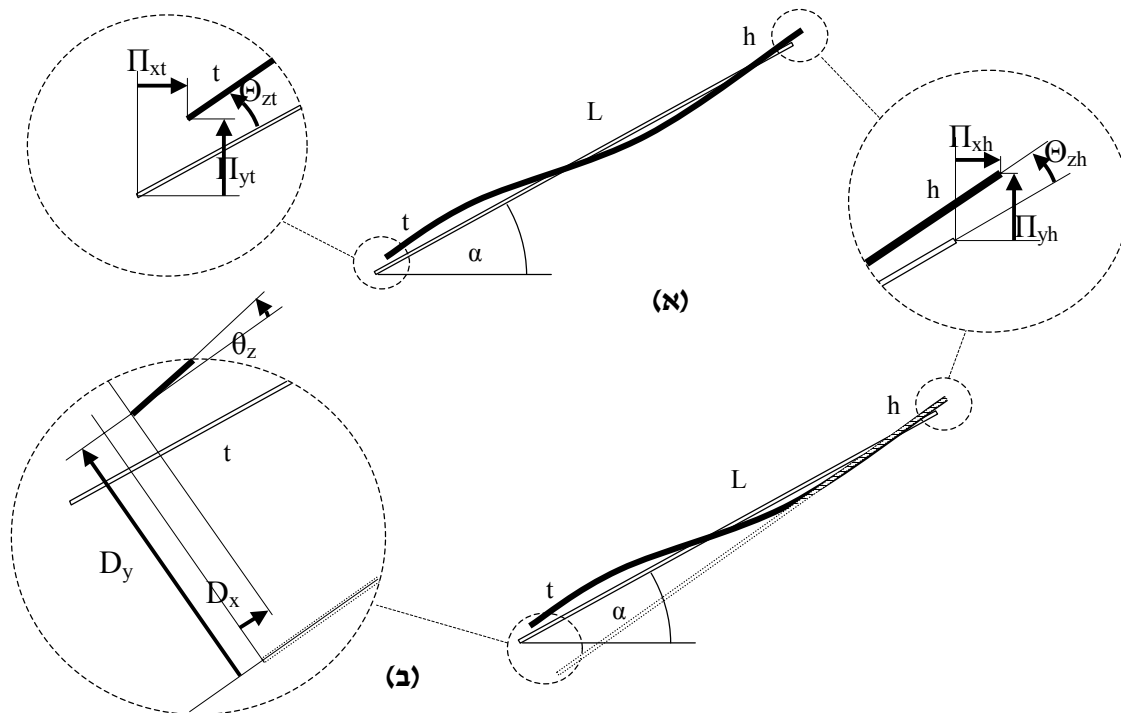
במערכת הצירים הכללית ניתן למדוד את תזוזות קצות האלמנט ממקומם המקורי, ובאלמנט המישורי הנדון יש 6 דרגות חופש לתזוזה – 3 לכל קצה. שלא ככוחות הקצה, תזוזות הקצה הן בלתי תלויות, ולא ניתן לנסח את תזוזות הקצה האחד במונחי תזוזות הקצה האחר. אך כן אפשר, כידוע, במקום לייחס את כל 6 דרגות החופש למערכת הכללית, לייחס למערכת זו רק 3 מדרגות החופש, ואת 3 הדרגות הנותרות למדוד ביחס ל-3 הדרגות הראשונות. על פי חלוקה זו נקראות שתי הקבוצות בספרות – 'דרגות כלליות' (גם: 'גלובליות' או 'חיצוניות') ודרגות פנימיות (גם: 'מקומיות').

כמובן, שבאלמנט קשיח לחלוטין, תזוזה יחסית פנימית באלמנט אינה אפשרית, וערכה אפס גם אם האלמנט זו ממקומו. אך כשמדובר באלמנט אלסטי, שינוי כזה הוא אפשרי, ומהווה מצב של עיווי (Deformation) באלמנט. על כן, הדרגות הכלליות מגדירות העתק קשיח (Translation) במרחב, ואילו הדרגות הפנימיות מודדות את העיווי.

קיימות מספר שיטות לבצע חלוקה זו (Fleming, 1989), ולכל אחת – יתרונה ושימושה. בטופולוגיה המבוססת על דרכו של Langefors (1961), נקטו לרוב בבחירת הדרגות הכלליות כך שהישר העובר דרך קצות האלמנט המועתק יתלכד עם המיקום החדש של צמתיו, והדרגות הפנימיות מודדות את התארכותו ואת העיווי הזוויתי בקצותיו (Spillers, 1963 ; Wang and Bjørke, 1991). אותה בחירה של דרגות חיצוניות, אך חלוקה אחרת של הדרגות הפנימיות, נקט Fuchs (1992), כדי לבטל את התלות בין הדרגות הפנימיות, ולבנות מטריצת קשיחות פנימית אלכסונית.

לצורך עבודה זו, נבחרה דווקא שיטתם של McGuire and Gallagher (1979), ולפיה במערכת הכללית נמדדות 3 דרגות התזוזה של ראש האלמנט, והדרגות הפנימיות הן תזוזות הזנב ביחס לראש (איור 3.2). שיטה זו מתאימה לתורת הגרפים בגלל ההפרדה הברורה המנוסחת במונחי ראש וזנב, ובגלל הטיפול הזהה בכל רכיבי התזוזה, ללא פיצול או ערבוב.

כפי ש- 6 דרגות התזוזה הנמדדות במערכת הכללית אינן תלויות זו בזו, וניתן לבחור תזוזות זנב ללא תלות בתזוזות הראש, כך גם ניתן לבחור כל מצב עיווי הנמדד במערכת המקומית, ללא תלות במיקום ראש האלמנט. דומה הדבר לעיווי האלמנט תחילה, ואז העברתו למקומו הסופי במערכת הכללית לפי מיקום צומת הראש וכיוונו.



איור 3.2: תזוזות הקצה של אלמנט מבנה מישורי

אלמנט חלול – לפני העמסה. אלמנט מלא – מועתק ומועוות אחרי העמסה. אלמנט חלול מרוסק – מועתק ללא עיווי לפי צומת הראש. (א) תזוזות כל קצה נמדדות במערכת הכללית. (ב) תזוזות הזנב נמדדות ביחס למערכת פנימית הצמודה לזנב לאחר שהאלמנט המקורי הבלתי מועמס הועתק לפי צומת הראש. במערכת הפנימית, תזוזות הזנב מגדירות את עיווי האלמנט.

הקשר בין העיווי, היינו תזוזות הזנב הנמדדות במערכת הפנימית, לבין התזוזות, הנמדדות במערכת הכללית, הוא:

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Pi_{xt} \\ \Pi_{yt} \\ \Theta_{zt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Pi_{xh} \\ \Pi_{yh} \\ \Theta_{zh} \end{bmatrix}$$

יצויין כבר כאן, שקשר זה יהיה בהמשך מוקד לטיפול בהקשר לייצוג הגרפי, שכן תזוזת קצה, או בשמו הגרפי – צומת, במערכת הכללית, הוא שינוי פוטנציאל, ואילו התזוזה היחסית בין הקצוות, או בין הצמתים, היא הפרש פוטנציאלים. ועם זאת, מהביטוי (3.3) נראה שהתזוזה היחסית, קרי – העיווי, אינה יכולה להתבטא באמצעות הפרש בין תזוזות הקצוות כגורם יחיד.

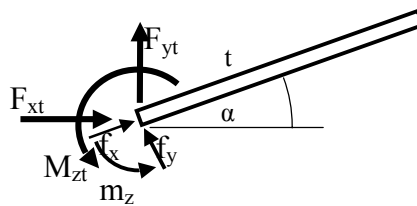
את משוואה (3.3) ניתן לנסח באופן כללי יותר, בהתאם ל- (McGuire and Gallagher, 1979), כך:

$$(3.4) \quad \mathbf{D} = \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{\Pi}_t + \mathbf{T}_h \cdot \mathbf{\Pi}_h$$

3.1.3. כוחות פנימיים

כפי שתזוזה הזנב נמדדת במערכת מקומית, כך ניתן למדוד גם את הכוחות הפועלים על הקצוות במערכת מקומית. בפרט, ניתן למדוד את הכוחות הפועלים על הזנב במערכת המקומית המשמשת למדידת העיווי. כיוון שכך, ניתן להמיר את כוחות הקצה הפועלים על הזנב מרכיביהם במערכת הכללית לרכיבי כוח במערכת המקומית, וחזרה. כמובן, שמספר הרכיבים הבלתי-תלויים נותר קבוע גם לאחר ההמרה.

מעניין לציין בהקשר זה, כי במוט מסבך יש לכאורה שני רכיבי כוח כלליים בכל צומת (x ו- y), ולעומת זאת, במערכת המקומית יש רכיב כוח אחד – הכוח הצירי במוט. ההסבר לכך הוא שלמעשה, גם במערכת הכללית, יש רק רכיב כוח בלתי-תלוי אחד, והחלוקה לשני רכיבים במערכת הכללית - אין בה כדי לקבוע אי-תלות בין הרכיבים; השקול חייב להישאר כל העת בכיוון המוט, כדי שלא ייווצרו מומנטים.



איור 3.3: המרת הכוח על זנב האלמנט מרכיבים במערכת הכללית לרכיבים פנימיים

אותיות גדולות וחצים מודגשים מסמנים את רכיבי הכוח על הזנב במערכת הכללית, ואילו הרכיבים הפנימיים מסומנים באותיות קטנות וחצים דקים.

רכיבי הכוחות הפנימיים הבלתי-תלויים מותאמים למערכת המקומית שבה נמדד העיווי – רכיב כוח פנימי לכל דרגת חופש פנימית. את הכוחות הפנימיים, בהתאם לאיור 3.3, ניתן להביע על ידי כוחות הזנב הכלליים, בעזרת ההמרה הגיאומטרית הבאה:

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{xt} \\ F_{yt} \\ M_{zt} \end{bmatrix}$$

או, באופן כללי:

$$(3.6) \quad \mathbf{f} = \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{F}_t$$

3.1.4. היחס בין הכוח הפנימי לעיווי

יחס זה, המוכר כחוק Hooke, מקבל את הצורה הבאה במערכת המקומית שהוגדרה כאן:

$$(3.7) \quad \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

שהיא יחס הקשיחות (Stiffness). ובאופן כללי:

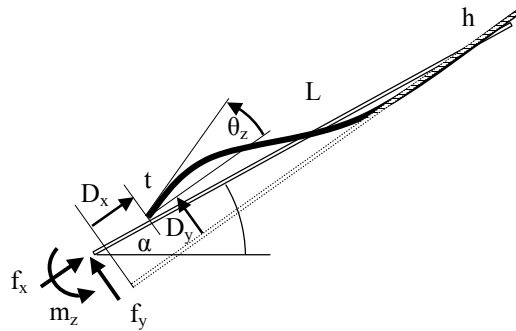
$$(3.8) \quad \mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{D}$$

באופן דומה ינוסח היחס ההפוך, יחס הגמישות (flexibility):

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

ובאופן כללי:

$$(3.10) \quad \mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}$$



איור 3.4: רכיבי כוח ועיווי פנימיים באלמנט מבנה מישורי

אלמנט חלול – לפני העמסה. אלמנט מלא – מועתק ומועוות אחרי העמסה. אלמנט חלול מרוסק – מועתק ללא עיווי לפי צומת הראש.

3.2 ייצוג גרפי של אלמנט מבנה מישורי

בעזרת הניסוחים שלמעלה, ייבנה כעת ייצוג גרפי לאלמנט הנדון. גם בחלק זה, הושמט בדרך כלל האינדקס i מן הערכים המיוחסים לאלמנט, כדי להקל על הקריאה.

3.2.1 ייצוג התזוזות כפוטנציאל בגרף

צמתי המבנה ממוקמים בחלל התלת-מימדי, ובמבנה מישורי – במישור. מיקום הצמתים במישור המבנה הוא מידע פונקציונאלי בזכות עצמו, אך גם הכרחי לניתוח הדינמי במבנה. בפועל, מעניינות רק התזוזות של הצמתים ממקומם ההתחלתי בעקבות העמסה, ולא מיקומם המוחלט. לפיכך, אם הצמתים במבנה מיוצגים על ידי צמתים של גרף, הרי שהתזוזה של צמתי המבנה במערכת הכללית שקולה לפוטנציאל הצמתים בגרף.

בהתאם להגדרה זו, הפרש הפוטנציאלים בין צמתים הוא התזוזה היחסית ביניהם לפי המערכת הכללית. כך גם מוגדר הפרש הפוטנציאלים בין שני קצותיו של אלמנט מבנה – לפי התזוזה היחסית במערכת הכללית. התזוזה היחסית במערכת המקומית של האלמנט, קרי – העיווי לבדו, אינה מגדירה כראוי את הפרש הפוטנציאלים. מה עוד, שתיתכן תזוזה במבנה, כך שאלמנט מסוים יסובב ממקומו כגוף קשיח. אז בוודאי יהיה העיווי – אפס, בעוד הפרש פוטנציאלים בין קצות האלמנט אכן קיים.

לפיכך, בשלב ראשון יימצא הפרש הפוטנציאלים במערכת הכללית בין קצות האלמנט.

משוואה (3.3) מייחסת את פוטנציאלי הקצוות של אלמנט זה לזה באמצעות העיווי. הגדרת הפרש הפוטנציאלים על פני האלמנט, לפי (1.1), היא:

$$(3.11) \quad \Delta_{t \rightarrow h} = \Pi_t - \Pi_h$$

ולפיה ניתן לנסח את (3.3) במונחים של הפרש פוטנציאלים, כך:

$$(3.12) \quad \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Pi_{xh} \\ \Pi_{yh} \\ \Theta_{zh} \end{bmatrix}$$

ניתן לחלץ את ה.פ. (ה.פ. - הפרש פוטנציאלים) מהמשוואה האחרונה, ולקבל:

$$(3.13) \quad \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L \sin \alpha \\ 0 & 0 & L \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Pi_{xh} \\ \Pi_{yh} \\ \Theta_{zh} \end{bmatrix}$$

או, בניסוח כללי:

$$(3.14) \quad \Delta_{t \rightarrow h} = \mathbf{T}_t^t \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H}^\Delta \cdot \Pi_h$$

כשלאלמנט מישורי:

$$(3.15) \quad \mathbf{H}^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L \sin \alpha \\ 0 & 0 & L \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הסימון \mathbf{H} שאול מתורת החשמל (Chua, 1987), שם הוא מציין קשרים מעורבים בהתקנים היברידיים, כמו שנאים וכד' ($\mathbf{H} - \text{Hybrid}$). כיוון שכאן הוא משמש לציון קשר מעורב של ה.פ. - בין ה.פ. על האלמנט לבין הפוטנציאל בראשו, ניתן לו גם הציון העליון Δ .

בניסוח הכללי (3.14), נעשה שימוש בעובדה שמטריצת הטרנספורמציה \mathbf{T}_t היא מטריצה אורתוגונלית, ועל כן היא מקיימת:

$$(3.16) \quad \mathbf{T}_t^{-1} = \mathbf{T}_t^t$$

כאן, ובהמשך, יש להיזהר מבלבול בין t כשהוא למעלה, המציין פעולת שיחלוף אלגברית (Transpose), לבין t כשהוא למטה, המציין 'זנב'.

בביטוי (3.14) יש שני סוגי ערכים שאינם נוחים לשימוש בכלים המקובלים של תורת הגרפים כפי שהוצגו בפרק 1: האחד הוא העיווי, \mathbf{D} , שאין לו משמעות בתורת הגרפים לפי המוסבר למעלה, והשני הוא Π_h , שלמרות שיש לו משמעות של פוטנציאל בייצוג, נוח יותר לטפל בהפרשי פוטנציאלים ולא בפוטנציאלים עצמם.

הטיפול ב- Π_h יידחה לשלב מאוחר יותר, אך את הערך D ניתן כבר בשלב זה להחליף בקלות. הצבת (3.6) ב- (3.10) תיתן:

$$(3.17) \quad \mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{F}_t$$

והצבת הביטוי האחרון ב- (3.14) תניב:

$$(3.18) \quad \Delta_{t \rightarrow h} = \mathbf{T}_t^T \mathbf{R} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{F}_t - \mathbf{H}^\Delta \cdot \Pi_h$$

ו- \mathbf{F}_t , שהוא הכוח הפועל על זנב האלמנט, ומשמעותו בייצוג – זרימה הנכנסת לתוך הקשת, הוא ערך מרכזי במשוואות המקובלות של הייצוג הגרפי.

מהתוצאה האחרונה (3.18) נמצא, שהפרש הפוטנציאלים בין שני קצותיו של האלמנט מורכב משניים:

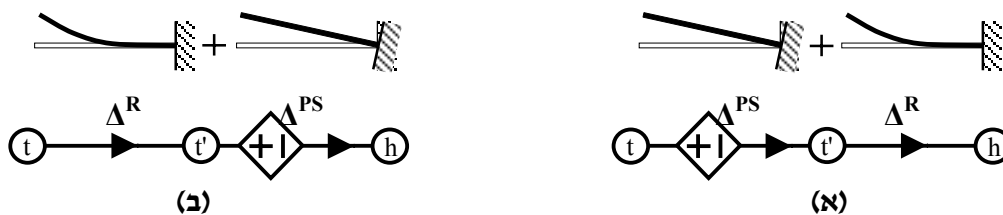
1. Δ^R – ה.פ. הנגרם מן העיווי, ותלוי ליניארית בכוחות הקצה הפועלים על הזנב. כזכור, קשר ליניארי בין ה.פ. על קשת לבין הזרימה הנכנסת לקשת דרך הזנב הוא קשר התנגדות. לפיכך ייקרא מרכיב זה: 'מרכיב ההתנגדות', ומכאן הסימון ^{R-Resistance}. הוא מייצג את חלק הגידול בפוטנציאל הנגרם מן העיווי האלסטי באלמנט:

$$(3.19) \quad \Delta^R = \mathbf{T}_t^T \mathbf{R} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{F}_t$$

2. Δ^{PS} – ה.פ. שהוא תוספת גיאומטרית לפוטנציאל הליניארי (מימדי x ו- y), שנובעת מסיבוב האלמנט סביב ראשו. סיבוב זה גורם לתזוזת הזנב בשיעור L ביחס לזווית הסיבוב. כיוון שיש כאן תוספת ה.פ. התלויה בפוטנציאל הראש, יכונה גורם זה 'מקור ה.פ. תלוי', ומכאן הסימון ^{PS – Potential Source}:

$$(3.20) \quad \Delta^{PS} = -\mathbf{H}^\Delta \cdot \Pi_h$$

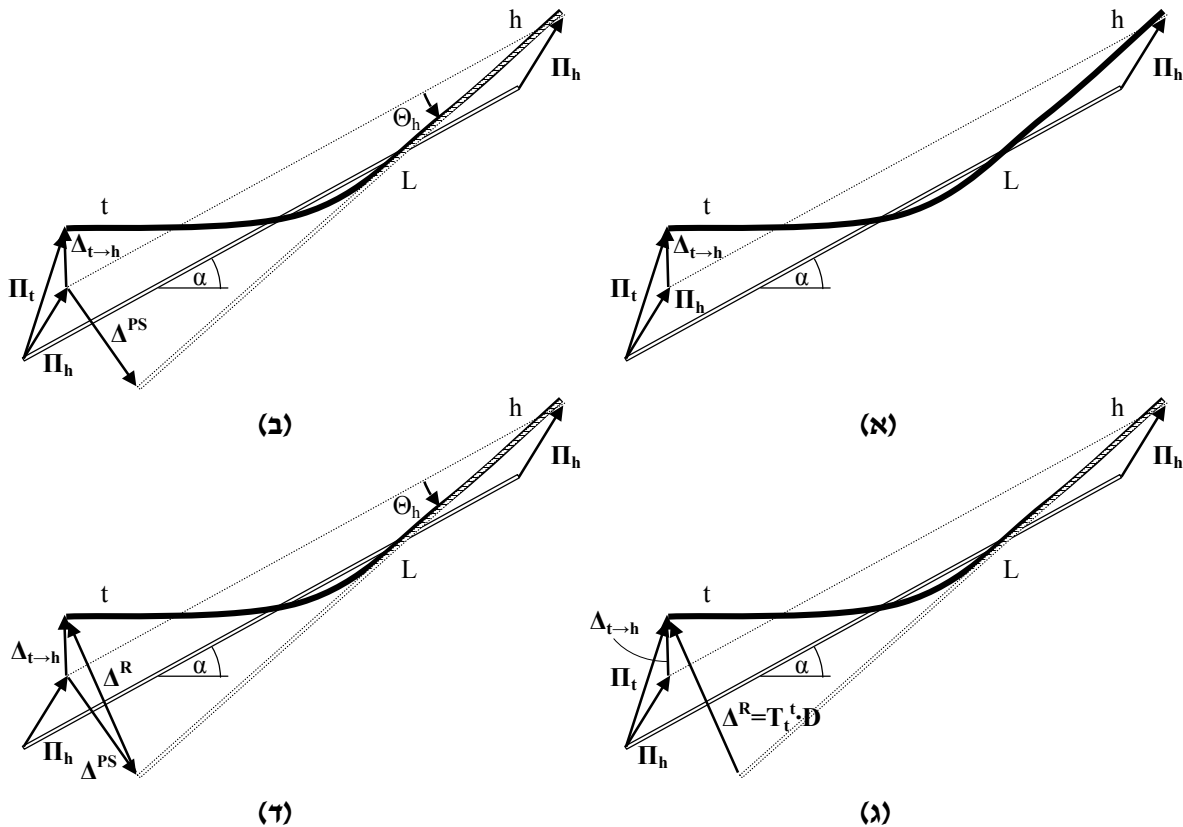
לפי האמור עד כה, ניתן לייצג את תזוזות האלמנט בעזרת גרף פוטנציאלים המכיל שתי קשתות בטור, בשתי אפשרויות שקולות, כבאיור 3.5:



איור 3.5: ייצוג אלמנט מבנה מישורי על ידי גרף פוטנציאלים

באלמנט יש שני מרכיבי תזוזה יחסית - עיווי וסיבוב, ולפיכך יוצג על ידי שתי קשתות - אחת לכל מרכיב - קשת התנגדות וקשת מקור תלוי. כאן אומץ מתורת החשמל הסימון המקובל ה'מעויין' למקור תלוי, להבדיל ממקור 'עגול' שאינו תלוי. כיוון שכל מערכת הכוחות באלמנט מתייחסת לפי הכוחות הפועלים על הזנב, הרי שהייצוג לכך הוא כניסת זרימה לצומת הזנב. המשך טבעי הוא זרימה מצומת הזנב לצומת הראש, ולכן נבחר כיוון הזרימה כמתואר. שתי האפשרויות (א) ו- (ב) שקולות מבחינה גרפית: זרימה הנכנסת לצומת t תזרום דרך שתי הקשתות ללא שינוי בערכה, וסך הפרש הפוטנציאלים בין t ל- h זהה בשתי האפשרויות, בגלל חוק החילוף.

באיור 3.6 מוראה הפרש הפוטנציאלים בין קצות האלמנט, כשהוא מופרד לשני מרכיביו.



איור 3.6: רכיבי כוח ועיווי פנימיים באלמנט מבנה מישורי

(א) על ידי העתקת האלמנט בשיעור פוטנציאל הראש הקווי (קו מרוסק), מקוזה פוטנציאל הראש הקווי מפוטנציאל הזנב הקווי, ומתקבל הפרש הפוטנציאלים קווי, כמוראה באיור. (ב) כדי לקבל גם ה.פ. במימד הזוויתי, יש לקזז את הפוטנציאל הזוויתי של הראש מזה של הזנב, אך על ידי העתקה זוויתית לפי פוטנציאל הראש (אלמנט חלול מרוסק) אמנם מתקזזת הזווית, אך נוצר פער קווי בה.פ. בשיעור המרכיב Δ^{PS} . (ג) לאחר קיזוז הפוטנציאל הזוויתי של הראש, מחושבת התזוזה היחסית, הלא היא העיווי כשהוא מומר למערכת הכללית. זהו המרכיב Δ^R . (ד) ה.פ. בין הקצוות הוא לפיכך המרכיב Δ^R , בתוספת הפער שהוחסר כשקוזה הזווית Δ^{PS} .

3.2.2 ייצוג הכוחות כזרימה בגרף

על בסיס הייצוג הגרפי שבאיור 3.5, יש לייצג גם את הזרימה בגרף, היינו, את הכוחות הפועלים על האלמנט. בעניין זה, כמו לגבי הפוטנציאלים, חשוב שהזרימה תבטא את הכוחות הפועלים על האלמנט במערכת הכללית, כי במבנה מורכב אלה הכוחות המיוחסים לסביבתו של כל חלק במערכת, והם המהווים 'שפה משותפת' לממשק בין כל אלמנט ואלמנט. זאת ועוד, תגובות סמכים והעמסות חיצוניות נמדדות במערכת הכללית, וממילא כל צומת צריך להיות מיוצג כך שידע לקלוט רכיבי זרימה כלליים.

פיתוח יחסי הכוחות באלמנט הונחה כאן על ידי רכיבי הכוח הכלליים הפועלים על הזנב, כיוון שבייצוג הגרפי הזרימה נכנסת אל הקשת בזנבה. מכאן, שכוחות אלה הם שירכיבו את הזרימה הרב-מימדית הנכנסת מן הסביבה החיצונית של האלמנט אל צומת הזנב שלו. מצומת הזנב תמשיך הזרימה לאורך שתי הקשתות הטוריות המייצגות את האלמנט, ולפיכך ניתן לקבוע עד כה, כי הזרימה מצומת הזנב לצומת הראש, לאורך שתי הקשתות שבייצוג שבאיור 3.5, היא רכיבי הכוח הכלליים הפועלים על הזנב:

$$(3.21) \quad \mathbf{F}_{t \rightarrow h} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{xt} \\ \mathbf{F}_{yt} \\ \mathbf{M}_{zt} \end{bmatrix}$$

לאחר המעבר בקשתות, תצא זרימה זו מצומת הראש. המשמעות היא שזה הכוח שיופעל על ידי צומת הראש על הסביבה החיצונית. לפי החוק השלישי של ניוטון, הסביבה החיצונית תפעיל על צומת הראש כוח שווה בערכו ומנוגד בכיוונו, ובמילים אחרות, לפי הייצוג הגרפי עד כה, רכיבי הכוח החיצוניים הפועלים על הראש שווים בערכם לרכיבים הפועלים על הזנב, ורק מנוגדים בערכם! זה אינו מתיישב עם המציאות הפיסיקלית המנוסחת ב-(3.1)!

לפי (3.1), אפשר לראות שהכוחות הפועלים על הראש מכילים, מלבד היפוך הכוחות הפועלים על הזנב, מרכיב נוסף, כך:

$$(3.22) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{xh} \\ \mathbf{F}_{yh} \\ \mathbf{M}_{zh} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{xt} \\ \mathbf{F}_{yt} \\ \mathbf{M}_{zt} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ L \sin \alpha & -L \cos \alpha & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{xt} \\ \mathbf{F}_{yt} \\ \mathbf{M}_{zt} \end{bmatrix}$$

ואם אלה הכוחות הפועלים על הראש, הרי שהיפוכם הוא הכוחות המופעלים החוצה על ידי צומת הראש. לפיכך, הזרימה שצריכה לצאת מצומת הראש בייצוג הגרפי היא, לפי (3.22), והפעם בניסוח כולל:

$$(3.23) \quad \mathbf{F}_{h \rightarrow} = \mathbf{F}_{t \rightarrow h} + \mathbf{H}^F \cdot \mathbf{F}_{t \rightarrow h}$$

כשלאלמנט מישורי:

$$(3.24) \quad \mathbf{H}^F = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ L \sin \alpha & -L \cos \alpha & \circ \end{bmatrix}$$

כאן הקשר המעורב המבוטא על ידי \mathbf{H} הוא קשר בין זרימות, ועל כן הציון F . המבנה של \mathbf{H}^F (הכולל כניסות רק בשורה השלישית) קובע כי הגורם הנוסף יכיל זרימה רק במימד השלישי – מימד המומנט.

זה מזכיר במקצת את מרכיבי הביטוי להפרש פוטנציאלים באלמנט (3.18): שם היה צורך להוסיף מקור הפרש פוטנציאלים כדי לבטא תוספות למימדים הליניאריים בזנב, שנובעות מהשפעה זוויתית בראש. כאן צריך להוסיף לזרימה תוספת זוויתית (מומנט) בראש, שנובעת מהשפעות המימדים הליניאריים (כוחות קוויים) בזנב.

בהתאם לחלוקה לפי (3.23), ניתן לבטא את הזרימה הנכנסת לצומת הראש ויוצאת ממנה, כך:

$$(3.25) \quad \mathbf{F}_{h \rightarrow} = \mathbf{F}_{t \rightarrow h} + \mathbf{F}^{FS}$$

עם המרכיבים הבאים:

1. $\mathbf{F}_{t \rightarrow h}$ - זרימה הנכנסת לצומת הזנב, ומייצגת את הכוחות הפועלים על צומת זה:

$$(3.26) \quad \mathbf{F}_{t \rightarrow h} = \mathbf{F}_t$$

לפי הייצוג, זרימה זו עוברת לכל אורך האלמנט, ומגיעה לצומת הראש, כלומר פועלת עליה, למרות שבמצאות, הזרימה, ובפרט במימד המומנט, הולכת וגדלה לאורך האלמנט. (התיקון לכך נעשה על ידי המרכיב השני).

2. F^{FS} - מקור זרימה (של מומנט), שתלוי בזרימה שבקשתות האלמנט (והסימון – FS-Flow Source).

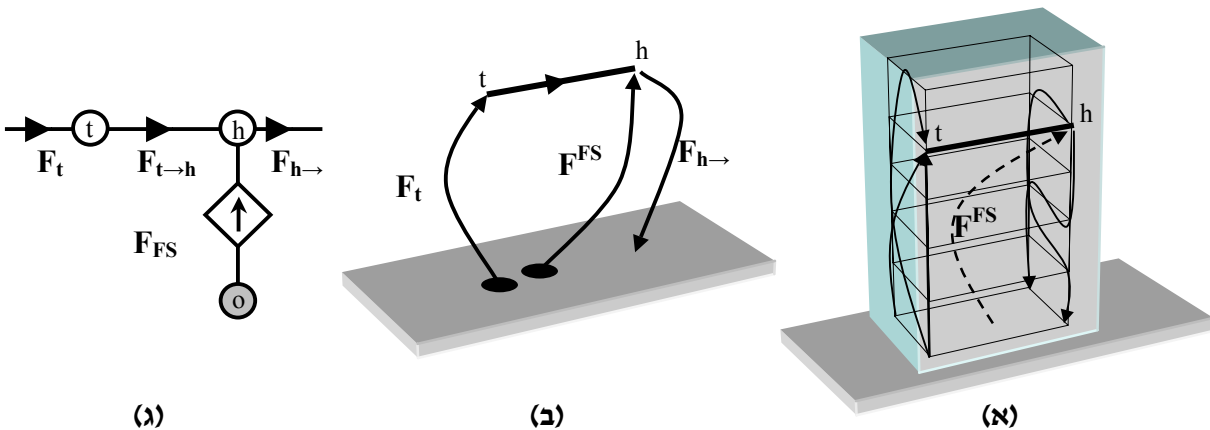
המקור זורם אל צומת הראש, כדי להשלים את ערך הזרימה שצריך לצאת ממנו אל הסביבה לפי תנאי השיווי-משקל:

$$(3.27) \quad F^{FS} = H^F \cdot F_{t \rightarrow h}$$

תוספת הזרימה על ידי המקור התלוי מגיעה לצומת הראש של הגרף המייצג. היינו, צומת הראש של המקור היא גם צומת הראש של האלמנט. כעת יש לברר מהי צומת הזנב של המקור. כלומר, מהיכן נובע מקור הזרימה. כאן המקום להזכיר את הייצוג למבנה על ידי גרף הזרימות שפותח בפרק הקודם.

היסוד העיקרי לגרף הזרימות היה, שכל רכיב במבנה מאוזן ביחס לאדמה, ובהתאם – כל חתך בגרף מקיים את חוק הזרימות. האלמנט הנדון – גם הוא רכיב כזה. האלמנט מבודד מסביבתו, למעט שני צמתי הקצה שדרכם נוצר הקשר עם הסביבה, ובפרט עם האדמה. אם האלמנט מאוזן, אזי, כל הכוחות המגיעים לזנב, וכל הכוחות המגיעים לראש – כולם מגיעים בסופו של דבר מהאדמה, גם אם הם צריכים לעבור דרך המבנה כדי להגיע לקצוות אלה.

הכוחות הנכנסים לצומת הזנב, והכוחות שיוצאים מצומת הראש על שני מרכיביהם אכן עוברים בפועל דרך המבנה, אך התוספת – היא יכולה להגיע ישירות מן האדמה, כמוראה באיור (3.7א).



איור 3.7: ייצוג זרימה באלמנט מבנה על ידי גרף זרימות

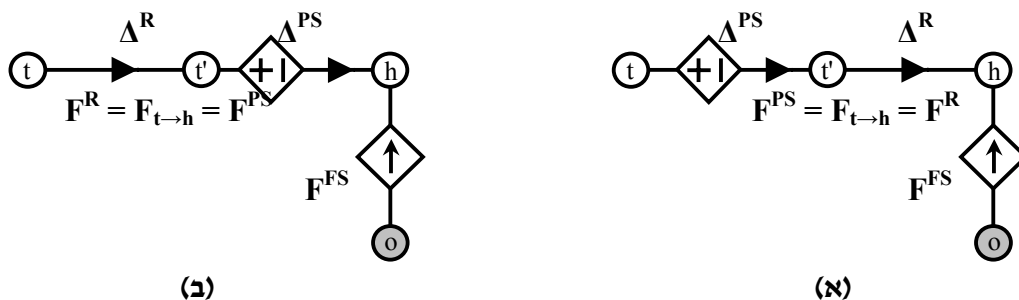
(א) כל אלמנט במבנה הוא תווך לזרימת כוחות המתחילה בקרקע, עוברת דרך המבנה לזנב האלמנט, t , ויוצאת מראשו, h , דרך המבנה חזרה לקרקע, וחוזר חלילה. הזרימה אל הזנב והזרימה מהראש מקיימות שיווי משקל באלמנט, אך אינן מקיימות את חוק הזרימות. מנגד, גם הקרקע נמצאת במצב דומה, לפי החוק השלישי של ניוטון. כדי לתקן מצב זה, יש להוסיף מן הקרקע לאלמנט עוד מרכיב זרימה, F^{FS} , המשלים את הזרימה הנכנסת לזנב לכדי ערכה היוצא מהראש, ובזאת יוחל חוק הזרימות על האלמנט ועל הקרקע כאחד. התוספת אינה מוחשית, וכדי להדגיש שאינה עוברת ממש במבנה, היא סומנה במקווקו. (ב) האלמנט מוצג בנפרד, משטר הזרימות מתואר שוב, והפעם בפשטות. זרימה, F_t , מגיעה לזנב, זורם באלמנט לצומת הראש, ויוצא ממנו, לאחר תוספת זרימה לצומת הראש, F^{FS} . (ג) ייצוג משטר הזרימה באלמנט על ידי גרף זרימות. הפעם, תוספת הזרימה מסומנת כמקור זרימה תלוי, ובכך מיוצג הקשר בין תוספת זו לבין הזרימה הנכנסת לצומת הזנב. האדמה מיוצגת על ידי הצומת o שהוא צומת ייחוס ולפיכך צבוע אפור.

לפי משטר זרימות זה, ניתן לייצג את הכוחות הפועלים על האלמנט בעזרת גרף זרימות, כמראה באיור (3.7). האדמה תיוצג על ידי צומת ייחוס, ומצומת זה ייצא מקור הזרימה התלוי, וייכנס לצומת הראש של האלמנט.

3.2.3 איחוד גרף הזרימות וגרף הפוטנציאלים לגרף התנגדות

את שני הגרפים שפותחו עד כה, גרף הפוטנציאלים שבאיור 3.5 וגרף הזרימות שבאיור 3.7, ניתן לאחד לגרף אחד, שבו מיוצגים גם הפוטנציאלים וגם הזרימות. איחוד כזה נעשה כבר בייצוג מסבך על ידי גרף התנגדות, שמכיל גם את משטר הזרימות וגם את משטר הכוחות, כשבכל קשת המייצגת מוט יש קשר התנגדות בין ה.פ. והזרימה בקשת. כאן, באלמנט מבנה כללי, לא בכל קשת יש קשר התנגדות, כפי שיתברר בהמשך, לכן הגרף המאוחד אינו 'גרף התנגדות' לפי המובן הרשמי. למרות זאת ייקרא גם זה גרף התנגדות, כדי להבהיר שיש קשר בין ערכי ה.פ. בגרף לבין ערכי הזרימה בו – כל קשת והקשר המתאים לה.

בהתאם לאמור, יראה גרף ההתנגדות המייצג את האלמנט כבאיור 3.8, שבו שוב מוצעות שתי אפשרויות, בהתאם לסדר הקשתות הטוריות.



איור 3.8: ייצוג אלמנט מבנה מישורי על ידי גרף התנגדות

לכל קשת בייצוג מיוחס ערך ה.פ. וערך זרימה. למרות שלא בכל קשת יש קשר התנגדות (למעשה רק באחת יש קשר כזה) נקרא הגרף בכלליות 'גרף התנגדות'. הזרימה מצומת t לצומת h צריכה לעבור דרך שתי הקשתות המייצגות את האלמנט – קשת ההתנגדות וקשת מקור ה.פ. התלוי. האדמה מיוצגת על ידי צומת ייחוס 0, וממנה יוצא מקור הזרימה התלוי ישירות לצומת h. (א) גרף התנגדות המתאים לאפשרות א' של גרף הפוטנציאלים שבאיור 3.5. (ב) הגרף המתאים לאפשרות ב' שם.

על הערכים בקשתות הגרף לקיים את הקשרים (3.19), (3.20) ו-(3.27), המהווים, בהתאמה, קשר התנגדות בקשת R, שהיא היחידה מבין שלוש קשתות הייצוג של האלמנט המקיימת קשר התנגדות של ממש, קשר תלות של ה.פ. שבקשת PS, וקשר תלות של הזרימה שבקשת FS.

הגרף שבאיור 3.8, בשתי האפשרויות השקולות, מייצג הן את התזוזות באלמנט על ידי פוטנציאלים המקיימים את חוק הפוטנציאלים, והן את הכוחות על ידי זרימות המקיימות את חוק הזרימות, ומהווה לפיכך ייצוג גרפי מלא לפי אמות המידה של תורת הגרפים. ייצוג זה פותח, לראשונה באופן מלא, את הדלת לכניסתה של תורת הגרפים, על כל שיטותיה ותועלותיה, אל עולם המבנים.

בטרם ניתן יהיה להפעיל בנוחות כלים מתורת הגרפים, יש עוד 'ללטש' את הייצוג, וללבן את הקשרים הפנימיים בו, וכן להרחיב אותו למבנה כולו. זאת ייעשה בהמשך פרק זה.

3.2.4 הידוק הקשרים בין המקורות התלויים

כזכור, מקור הפרש הפוטנציאלים, Δ^{PS} , תלוי, לפי (3.20), בפוטנציאל הראש, Π_h :

$$(3.20) \quad \Delta^{PS} = -\mathbf{H}^\Delta \cdot \Pi_h$$

ויש בעייתיות בכך, שכן המשוואות הרווחות בתורת הגרפים מבטאות במונחים של הפרש פוטנציאלים, ולא דווקא במונחי הפוטנציאלים עצמם. כדי להתאים את הייצוג לטיפול נוח על ידי תורת הגרפים, עדיף להמיר את הפוטנציאל Π_h בערך הפרש פוטנציאלים כלשהו.

תוך שימוש בקשת מקור הזרימה התלוי, שנוספה מצומת הייחוס לצומת הראש, ניתן לנסח כך :

$$(3.28) \quad \Delta_{o \rightarrow h} (= \Delta^{FS}) = \Pi_o - \Pi_h$$

פוטנציאל צומת הייחוס נקבע שרירותית, וכיוון שצומת הייחוס מייצג את האדמה, אך טבעי הוא לקבוע את הפוטנציאל שלו – אפס. הצבת ערך זה ב- (3.27) והעברת אגפים יניבו :

$$(3.29) \quad \Pi_h = -\Delta^{FS}$$

בעזרת התוצאה האחרונה, (3.20) תיראה עכשיו כך :

$$(3.30) \quad \Delta^{PS} = \mathbf{H}^\Delta \cdot \Delta^{FS}$$

וזה ביטוי המכיל הפרשי פוטנציאלים על קשתות, ועל כן מתאים לשימוש בייצוג הגרפי.

אפשר כעת לחזור ולשפר את הביטוי (3.27) למקור הזרימה התלוי. הזרימה במקור זה תלויה בזו הנכנסת לאלמנט בצומת הזנב. כיוון שהזרימה הנכנסת לצומת הזנב עוברת בקשת ההתנגדות וממשיכה, באותו ערך, בקשת מקור ה.פ. התלוי, הרי שאת הביטוי הכללי של הזרימה מהזנב לראש, ניתן להמיר בזרימה בקשת ההתנגדות או בזרימה במקור הפרש הפוטנציאלים התלוי :

$$(3.31) \quad \mathbf{F}_{t \rightarrow h} = \mathbf{F}^R = \mathbf{F}^{PS}$$

לנוכח ההקבלה החזקה הקיימת בין שני המקורות התלויים, יהיה זה אך טבעי להשלים אותה, ולתלות את מקור הזרימה בזרימה של מקור הפוטנציאל, כפי שמקור הפוטנציאל תלוי בהפרש הפוטנציאל שבמקור הזרימה. לפיכך, שילוב של (3.31) ב- (3.27) יניב :

$$(3.32) \quad \mathbf{F}^{FS} = \mathbf{H}^F \cdot \mathbf{F}^{PS}$$

שהוא יחס זרימות המתאים להפליא ליחס הפוטנציאלים (3.30). וכאילו לא די, הרי שמקדמי התלות של שני המקורות קשורים זה בזה ביחס הדוק :

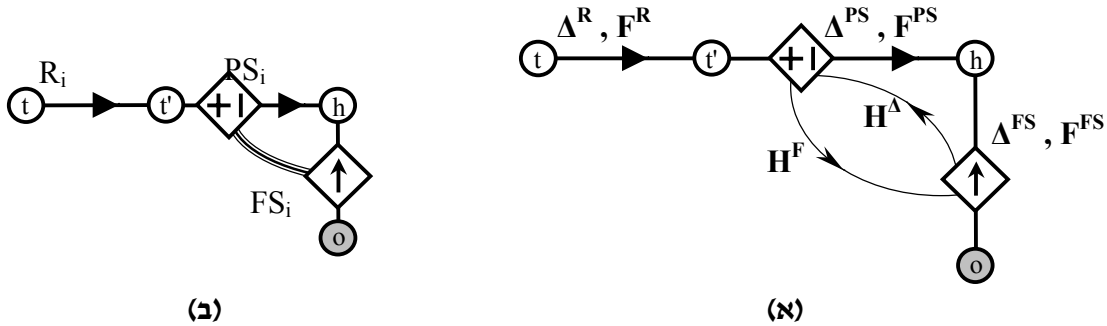
$$(3.33) \quad \mathbf{H}^\Delta = -(\mathbf{H}^F)^Y$$

בפרק 5 (סעיף 5.3.2) תתחוויר תכונה מעניינת עוד יותר של זוג המקורות התלויים האלה.

3.2.5 הייצוג הגרפי הסופי לאלמנט מבנה מישורי

את תוספות הדיוק בקשרים בין המרכיבים השונים ניתן להוסיף לייצוג, ולהביאו למצב הסופי. מתוך שתי האפשרויות המקבילות שהוצגו עד כה בכל שלב, תיבחר האפשרות המועדפת מבחינת הנוחות התיאורית, ומבחינת ההדגשה החזותית לקשר בין המקורות התלויים, והיא האפשרות בה המקור ה.פ. סמוך יותר למקור הזרימה (אפשרות ב באיור 3.8). הייצוג הסופי – באיור 3.9.

לצורך עבודה עם גרפים מורכבים יותר, המייצגים מבנים בעלי אלמנטים רבים, יש צורך לקצר את הייצוג ולצמצמו, כך שיהיה נוח וחסכוני במקום. לצורך עבודה זו, שבה הדוגמאות אינן מורכבות כל כך, יספיק הצמצום המופיע באיור 3.9ב, אם כי ניתן לקצרו עוד יותר.



איור 3.9: הייצוג הסופי לאלמנט מבנה מישורי על ידי גרף התנגדות

(א) גרף התנגדות המייצג אלמנט מבנה מישורי, עם ציון הקשרים: הקשת R היא קשת התנגדות לפי סימונה. התלות במקורות מסומנת בחץ מקשת הבקרה למקור התלוי, וכך ה.פ. בקשת FS מבקר את ה.פ. בקשת PS על ידי H^A , ואילו הזרימה בקשת FS תלויה בזרימה שבקשת PS, לפי H^F . (ב) סימון מקוצר ושימושי יותר לייצוג הגרפי. הקשתות מסומנות לפי סוגן (R) – קשת התנגדות, PS – מקור ה.פ. תלוי, FS – מקור זרימה תלוי), בציון האלמנט אותו הן מייצגות, i. יחסי התלות הושמטו, וחיצי ההשפעה הוחלפו בקו מיוחד, המציין תלות הדדית.

כיוון שלאחר סידור הקשרים נותרה מטריצת המרה אחת המשמשת בייצוג, T_t , הרי שמבלי לגרום לבלבול עם סימונים אחרים (גם לא עם T , המציין את קבוצת קשתות העץ הפורש, והוא מוטה ואינו מודגש), ניתן לסמן את מטריצת ההמרה הזו בפשטות – T . שינוי נוסף שהוכנס הוא ציון מספרו הסידורי של האלמנט במבנה, i, שבעזרתו ניתן לשייך את כל הערכים והקשרים המתאימים לכל אלמנט. הקשרים בין ערכי הזרימה וה.פ. של הקשתות בייצוג האלמנט עודכנו בהתאם, ונערכו במרוכז להלן.

קשת ההתנגדות:

$$(3.34) \quad \Delta_i^R = R_i^R F_i^R$$

$$(3.35) \quad R_i^R = T_i^T R_i T_i$$

$$(3.36) \quad T_i = \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad \begin{cases} c_\alpha = \cos(\alpha) \\ s_\alpha = \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$(3.37) \quad \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}_i$$

$$(3.38) \quad \mathbf{R}_i^R = \mathbf{T}_i^t \mathbf{R}_i \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} c_\alpha^2 + \frac{L^3}{3EI} s_\alpha^2 & & \text{sym.} \\ \left(\frac{L}{AE} - \frac{L^3}{3EI}\right) s_\alpha c_\alpha & \frac{L}{AE} s_\alpha^2 + \frac{L^3}{3EI} c_\alpha^2 & \\ \frac{L^2}{2EI} s_\alpha & -\frac{L^2}{2EI} c_\alpha & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}_i$$

$$(3.39) \quad \mathbf{F}_i^R = \mathbf{K}_i^R \Delta_i^R$$

$$(3.40) \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_i$$

$$(3.41) \quad \mathbf{K}_i^R = \mathbf{T}_i^t \mathbf{K}_i \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} c_\alpha^2 + \frac{12EI}{L^3} s_\alpha^2 & & \text{sym.} \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) c_\alpha s_\alpha & \frac{EA}{L} s_\alpha^2 + \frac{12EI}{L^3} c_\alpha^2 & \\ -\frac{6EI}{L^2} s_\alpha & \frac{6EI}{L^2} c_\alpha & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}_i$$

המקורות התלויים:

$$(3.42) \quad \mathbf{F}_i^{PS} = \mathbf{F}_i^R$$

$$(3.43) \quad \Delta_i^{PS} = \mathbf{H}_i^\Delta \cdot \Delta_i^{FS}$$

$$(3.44) \quad \mathbf{F}_i^{FS} = \mathbf{H}_i^F \cdot \mathbf{F}_i^{PS}$$

$$(3.45) \quad \mathbf{H}_i^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L \cdot s_\alpha \\ 0 & 0 & L \cdot c_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i$$

$$(3.46) \quad \mathbf{H}_i^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L \cdot s_\alpha & -L \cdot c_\alpha & 0 \end{bmatrix}_i$$

קביעת זווית האלמנט, α 3.2.6

הקשרים באלמנט, $\mathbf{R}^R, \mathbf{K}^R, \mathbf{H}^\Delta$ ו- \mathbf{H}^F , תלויים בזווית האלמנט, α , כפי שהיא מופיעה באיורים שבחלק 3.1 של הפרק. איורים אלה שימשו למציאת קשרי הכוחות והתזוזות באלמנט המבנה, אך אינם משמשים עוד בייצוג הגרפי. לכן יש להגדיר את הזווית α באופן ברור, גם לגבי הייצוג הגרפי.

α נקבעה לפי הרדיוס-וקטור היוצא מצומת הזנב אל צומת הראש. ביחס לכיוון זה הוגדרו, בייצוג הגרפי, הזנב, שלתוכו נכנסת זרימת קצה זנב האלמנט, והראש, שאליו מגיע מקור הזרימה התלוי מצומת הייחוס. לפיכך, בייצוג אלמנט על ידי שלוש הקשתות כבאיור 3.9, הזווית α תיקבע לפי הרדיוס-וקטור המכוון באלמנט אל צומת הקצה שאליו מגיע מקור הזרימה התלוי.

קביעה זו של הזווית אינה מותנית לפיכך בכיוון הקשתות בייצוג הגרפי, וגם אם יכוונו הקשתות מצומת הראש, שאליה מגיע מקור הזרימה התלוי, אל צומת הזנב, עדיין α תישאר זווית הרדיוס-וקטור המכוון מצומת הזנב אל צומת הראש. כדי למנוע בלבול בין מושג צומת הראש בתורת הגרפים, המוגדר חד-משמעית כצומת שאליו מכוונת הקשת, לבין הפרשנות לצומת הראש כאן, כצומת שאליו זורם מקור הזרם התלוי של האלמנט, ייקראו השניים, במקרה ונדרשת אבחנה כזו, 'צומת ראש הקשת' ו'צומת ראש האלמנט', בהתאמה. באופן דומה יובחן בין 'צומת זנב הקשת' לבין 'צומת זנב האלמנט'.

אמור מעתה, כי בייצוג הגרפי מקור הזרימה התלוי זורם תמיד לצומת ראש האלמנט, בין אם קשת ההתנגדות של האלמנט מכוונת, כבאיור 3.9, אל צומת ראש האלמנט, ובין אם קשת ההתנגדות הוא צומת הזנב של האלמנט. באותו אופן, ניתן להחליף את כיוון מקור ה.פ. התלוי, כך שצומת זנבו יתלכד עם צומת האלמנט.

לסיכום קטע זה, זווית האלמנט, α , מוגדרת כזווית הרדיוס-וקטור המכוון מצומת זנב האלמנט אל צומת ראש האלמנט, ואינה מותנית בבחירת כיווני הקשתות של הייצוג. על ההשפעות שיש לשינוי כיווני הקשתות על הייצוג – בקטע הבא.

3.2.7. השפעות שינויי כיוונים בייצוג

אחד מן היתרונות של הייצוג הקומבינטורי, ובכלל זה הייצוג על ידי גרף התנגדות, הוא שלאחר המרת הבעיה ההנדסית לייצוג שלה, כל התכונות המאפיינות ייצוג זה – תקפות בו. גם כאן, מרגע שהייצוג הגרפי של המבנה קיים, ניתן לעשות בו כבכל הגרפים, ובכלל זה – לשנות את כיווני הקשתות, להחליף את סדרן של הקשתות הטוריות – קשת ההתנגדות ומקור הפוטנציאל התלוי, ועוד כהנה וכהנה. עם זאת, יש להיזהר בכך כשהגרף כולל קשרים בין ערכים שונים בו, ובמיוחד לגבי קשרים בין קשתות שונות, כמו הקשר ההדדי בין שני המקורות התלויים בייצוג האלמנט. בטבלה 3.1 נרשמו האפשרויות לשינויים בכיווני הקשתות, עם השפעת כל שינוי על הקשרים בייצוג. כמובן, שכל שינוי בטופולוגיה מייצג שינוי במשמעות ההנדסית המוקנית לערכי הזרימות והפרשי הפוטנציאלים בקשתות.

שינוי כיוון ב:	מיוצג כך*:	משפיע על:	השינוי הנדרש בקשרים:
א. קשת ההתנגדות		קשת ההתנגדות עצמה, כי אינה מיוחסת לקשתות האחרות.	לא נדרש שינוי. קשר התנגדות או מוליכות נשמר בהיפוך כיוון.
ב. מקור ה.פ. התלוי		הקשר ההדדי עם מקור הזרימה התלוי.	סימן של שתי מטריצות הקשר H^A ו- H^F מתהפך כדי לשמור על (3.42) ו- (3.43).
ג. מקור הזרימה התלוי		הקשר ההדדי עם מקור ה.פ. התלוי.	סימן של שתי מטריצות הקשר H^A ו- H^F מתהפך כדי לשמור על (3.42) ו- (3.43).
ד. שני המקורות התלויים		הקשר ההדדי בין המקורות התלויים.	אין שינוי. היפוך שני המקורות הוא חיבור שני היפוכים נפרדים, שהשפעתם מתקזזת.
ה. כל הקשתות בייצוג האלמנט		כל הקשרים בשלוש הקשתות.	אין שינוי, לפי חיבור האפשרויות א' ו- ד'.

טבלה 3.1: השפעת שינוי כיוון בקשתות על הקשרים בייצוג הגרפי

* השינויים סומנו באדום. הערכים המיוחסים לקשתות לאחר היפוך הכיוון נרשמו כאן במונחי הערכים המקוריים שלפני היפוך הכיוון, כשההבדל בין השניים הוא, כמובן, רק בסימן.

למרות שהשינויים שתוארו בטבלה 3.1 הם חוקיים לחלוטין, לא ידובר בהם עוד בהמשך, כדי לשמור על אחידות לכל אורך העבודה, וגם כדי לשמור על הפרשנות שניתנת לערכים בגרף לפי הצורה המקורית שבה הוא פותח. רק זאת כדאי להעיר, שאפשרות ה' בטבלה היא שימושית באותה מידה, הן בגלל אי-השפעתה על הקשרים בגרף, והן בגלל כיוון הזרימה, המעניין מבחינה דידיקטית, ואולי אף נכון יותר מבחינת השתלבות זרימת האלמנט בזרימה הכללית במבנה, כפי שהיא משתקפת בייצוג.

הייצוג הכללי, שנכתב כאן לאלמנט מישורי, יכול להתרחב באותה גישה גם למבנים תלת-מימדיים. הוא גם יכול להצטמצם לאלמנטים מישוריים פשוטים יותר, כפי שמוסבר בחלק הבא.

3.3 ייצוגים לאלמנטים יסודיים

הייצוג שפותח לעיל הוא הבסיס לתבניות הבאות לשלושה סוגי אלמנטים יסודיים במכניקת מבנים – מוט מסבך, קורה אופקית ואלמנט מסגרת. כל מצב שאינו נכלל במקרים פרטיים אלו, ובוודאי אלמנט מסוג אחר, מחייבים חזרה לניסוח הכללי שפותח קודם.

3.3.1 ייצוג מוט מסבך

מוט מסבך הוא אלמנט המשמש בקשיחות צירית בלבד. לא ניתן להטריחו במומנטים בגלל החיבורים המפרקים בקצותיו, וגם אין מטריחים אותו אלא בקצותיו. כתוצאה מכך, רק רכיבי הכוח הליניאריים שייכים למוט, ואילו רכיבי הכוח הזוויתי, המומנט, אינו קשור כאן. דרגת החופש הזוויתית גם

היא אינה קשורה לתזוזות המוט, כיוון שהנחה יסודית לגבי המסבך קובעת שהמוטות במבנה אינם משנים את כיוונם כתוצאה מן העומס. לכן רק דרגות החופש של תזוזות קוויות שייכות כאן.

עם זאת, לא ניתן לקבל את התוצאות הסופיות של הניסוח הכללי כפשוטן ולהסתפק בהרחקת המימדים הזוויתיים מהמטריצות ומהווקטורים. הסיבה לכך נעוצה באותה הנחת 'אי-שינוי הזווית' שהוזכרה. בעוד הקשרים (3.1), (3.3), (3.5) ו- (3.9) תקפים לגבי המוט אם מרחיקים את המימדים שאינם קשורים (היינו $\theta_z, m_z, f_y, M_{zh}, M_{zt}$), הרי שאין זה המצב לגבי (3.7). כפי שניתן לראות באיור 3.10, למרות שתזוזה יחסית צידית, D_y , אכן קיימת בין שני קצות המוט, תזוזה זו אינה תלויה בכוחות הפועלים על המוט, ולפיכך אינה יכולה להיות מבוטאת באמצעותם ואף תיחשב ל-0 לפי (3.7), מחד, ומאידך, לא ניתן להתעלם מתזוזה זו, שכן היא מרכיב של הפרש הפוטנציאלים $\Delta_{t \rightarrow h}$, כפי שהוא מבוטא ב- (3.13).

גלגל בעייתיות זו, מוט מסבך יופיע בייצוג גרפי רק על בסיס קשרי קשיחות, או מוליכות, ולעולם לא על בסיס קשרי גמישות, או התנגדות (למעט מסבך חד מימדי, שם $D_y=0$ מעצם הגדרת המבנה). לפי כל הנאמר קודם, מוט מסבך ייוצג בגרף על ידי קשת התנגדות יחידה בלבד, והקשרים השייכים לה יהיו:

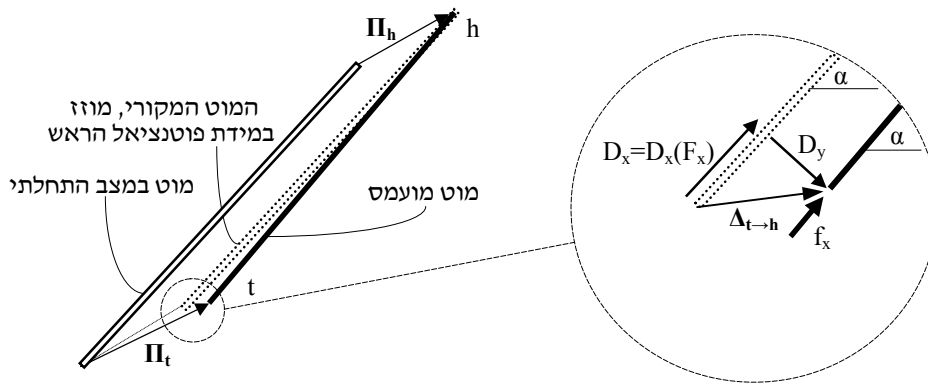
$$(3.47) \quad \mathbf{T}_i = [c_\alpha \quad s_\alpha]_i$$

$$(3.48) \quad \mathbf{K}_i = \frac{EA}{L}_i$$

$$(3.49) \quad \mathbf{K}_i^R = \mathbf{T}_i^t \mathbf{K}_i \mathbf{T}_i = \frac{EA}{L}_i \cdot \begin{bmatrix} c_\alpha^2 & c_\alpha s_\alpha \\ c_\alpha s_\alpha & s_\alpha^2 \end{bmatrix}_i$$

מטריצת הקשר היחידה המיוחסת לקשת המייצגת מוט מסבך, היא לפיכך מטריצת הקשיחות. בניגוד למטריצת הקשיחות של אלמנט כללי (3.41), מטריצת הקשיחות של מוט נשאר תחנת קבועה תחת החלפת כיוון האלמנט. היינו:

$$(3.50) \quad \mathbf{K}_{truss\ rod}^R(\alpha) = \mathbf{K}_{truss\ rod}^R(\alpha + \pi)$$



איור 3.10: יחסי פוטנציאלים במוט מסבך, והפרכת קשר ההתנגדות

למוט יש דרגה פנימית אחת, והיא הדרגה הצירית. מידיעת הפוטנציאלים בצמתי הקצה ניתן לדעת את ה.פ. על המוט, וממנו גם להסיק את התזוזה הפנימית – העיווי הצירי D_x . לפי עיווי זה ניתן לדעת את הכוח הפנימי f_x , על ידי קשר קשיחות, וממנו להסיק את הכוח הכללי על הזנב. תהליך הפוך אינו אפשרי: ידיעת הכוח הכללי תוביל למציאת f_x ו- D_x , אך לא ניתן להסיק את ה.פ. $\Delta_{t \rightarrow h}$ מ- D_x לבדו, שכן $\Delta_{t \rightarrow h}$ כולל גם רכיב D_y , שאותו לא ניתן לקבוע מידיעת הכוחות. לפיכך, במוט מסבך תקף קשר קשיחות, או מוליכות, K , בלבד, וקשר ההתנגדות אינו מוגדר.

3.3.2 קורה אופקית

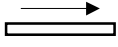

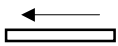

בניתוח קורה אופקית, גורמים והשפעות ציריים מוזנחים, והקורה משוכה בכיוון מסוים יחיד. אם זה גם הכיוון היחיד המעורב במבנה כולו, מערכת הצירים הכללית תוגדר כך שציר x יופנה בכיוון זה. שני המקרים האפשריים אז לייצוג כל אלמנט בקורה, אחד לכל כיוון המוגדר לאלמנט שלאורך הציר, מפורטים בטבלה 3.2.

	T_i	R_i^R	K_i^R	H_i^Δ	H_i^F
$\alpha = 0$ 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha = \pi$ 	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix}$

טבלה 3.2: קשרים לכיוונים ראשיים של אלמנט קורה

3.3.3 אלמנט מסגרת אופקי או אנכי

המצב הכללי לאלמנט מבנה מישורי פותח לעיל. כאן יובאו בקיצור הקשרים לאלמנט אופקי ולאלמנט האנכי, בשני הכיוונים האפשריים לכל אחד, סך הכול 4 מצבים עיקריים:

	T_i	R_i^R	K_i^R	H_i^Δ	H_i^F
$\alpha = 0$ 	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{AE} & 0 \\ \frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha = \pi$ 	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha = -\frac{1}{2}\pi$ 	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{AE} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 \end{bmatrix}$

טבלה 3.3: קשרים לכיוונים ראשיים של אלמנט מסגרת

3.4 דוגמה לייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות

כיוון שהייצוג הגרפי לאלמנט מבנה – מוכן, ניתן להשתמש בו כדי לייצג מבנה מרובה אלמנטים. הדרך הכללית לעשות זאת כבר הותוותה בשיטה לייצוג מסבך על ידי גרף (Shai, 2000c), וכאן היא תאומץ ותורחב גם לייצוג מבנה המכיל אלמנטי כפיפה, כפי שיודגם להלן.

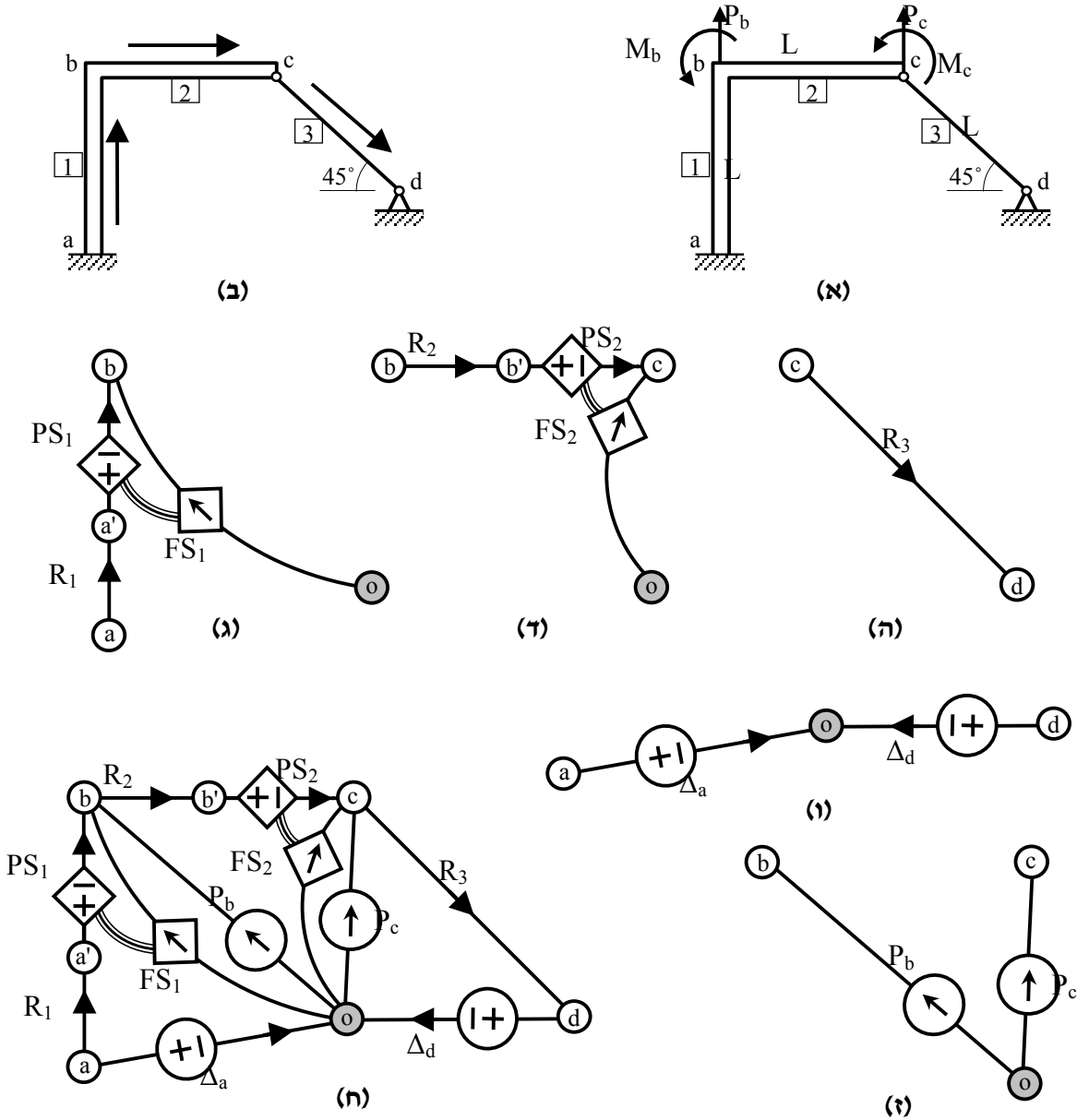
3.4.1 הכנה לייצוג המבנה – בחירת צמתים, אלמנטים וכיוונים

המבנה שבאיור 3.11 מורכב משני אלמנטי מסגרת וממוט מסבך. המבנה מקובע בצומת a קיבוע מלא, וסמוך בצומת d בסמך מפרקי קבוע. על שני הצמתים החופשיים, b ו-c, מופעלים כוחות חיזוניים, בכל צומת – כוח בציר y ומומנט בציר z.

מכיוון שהצמתים האמורים הם הנקודות היחידות במבנה המאופיינות בממשק בין מרכיבים שונים, ייבחרו צמתים אלה להיות מיוצגים על ידי צמתי הגרף. בנוסף לצמתים אלה יוגדר בגרף צומת ייחוס, o, לייצוג האדמה.

הקשר בין הצמתים במבנה מיוצג על ידי קשתות הגרף. קשרים אלה כוללים את האלמנטים עצמם, את הסמכים ואת העומסים. לצורך ייצוג האלמנטים, יש להגדיר את הזווית α לכל אלמנט, וזאת על ידי קביעת כיוון באלמנטים. באיור 3.11 מוראית בחירה אפשרית של כיוונים בשלושת האלמנטים. בפרק הבא, העוסק בניתוח הייצוג הגרפי, יוספו הנחיות לבחירת כיוונים כזו שתקל על ניתוח הגרף. הבחירה שבאיור היא לפי ההנחיות, אך הסבר לכך ידחה להמשך.

ייצוג האלמנטים נעשה לפי ההגדרות שפותחו עד כה, כשלמען הנוחות שורטט כל ייצוג בכיוון האלמנט המיוצג על פיו. אלמנטי המסגרת 1 ו-2 מיוצגים באיור 3.11, בהתאמה. הייצוג של המוט 3, מוראה באיור 3.11.



איור 3.11: דוגמה לייצוג מבנה על ידי גרף

(א) מבנה מישורי יתר-סטטי, המורכב משני אלמנטי מסגרת וממוט מסבך. (ב) קביעת כיוונים לאלמנטים השונים. כיוון האלמנט קובע את זווית האלמנט, α , ואת הצומת שאליו יוזרם מקור הזרימה התלוי של האלמנט. (ג) ייצוג גרפי של אלמנט 1. (ד) ייצוג אלמנט 2. (ה) ייצוג המוט 3. ייצוג זה אינו כולל כמובן מקורות תלויים. (ו) ייצוג הסמכים על ידי מקורות ה.פ. פוטנציאלים שערכם 0. (ז) ייצוג העומס על הצמתים החופשיים על ידי מקורות זרימה שערכם, בכל מימד, כגודל הכוח החיצוני באותו מימד. (ח) איחוד כל התתי-גרפים יוצר את הייצוג הגרפי המלא למבנה.

הסמכים, כמוראה באיור 3.11, מיוצגים על ידי מקורות ה.פ. שערכם 0. ייצוג זה מועדף כאן על השיטה שלפיה הסמך הוא כוח תגובה המיוצג על ידי קשת התנגדות בעלת קשיחות אינסופית (Shai,

2000c). תכליתו ההנדסית של הסמך היא מניעת תזוזה, או קביעת תזוזה אפס בנקודת הסמך, וייצוג ישיר של קביעה זו היא הגדרת פוטנציאל 0 ביחס לצומת הייחוס בצומת המייצגת את הסמך, היינו מקור ה.פ. 0 בין צומת הסמך לצומת הייחוס. ייצוג זה גם מתאים מניה וביה למקרים של תזוזת סמך בשיעור ידוע – אז ערך מקור ה.פ. יהיה באותו שיעור תזוזה.

ייצוג העומסים גם הוא ידוע וברור – מקורות זרימה היוצאים מצומת הייחוס אל הצמתים המייצגים את נקודות ההעמסה. ייצוג העומסים מוראה באיור 3.11ז.

כיוון שנבחרו הצמתים, ויוצגו כל האלמנטים המקשרים את הצמתים, ניתן לאחד את כל הייצוגים לכלל ייצוג אחד למבנה כולו, כמוראה באיור 3.11ח.

יצוין כאן, שאת מקורות ה.פ. המייצגים את הסמכים ניתן לכווץ, ולאחד את הצמתים a ו-d עם צומת הייחוס o, שהרי ה.פ. בקשתות אלה הוא 0 בכל מימדיהן, וכיווצן לא פוגע בתוקפו של חוק הפוטנציאלים בגרף. חוק הזרימות ממילא נשמר תחת כיווץ, ואת הזרימות בקשתות אלה, המייצגות את תגובות הסמכים, ניתן להסיק ישירות מזרימות קשתות האלמנטים המחוברים לצמתי הסמכים. למרות כל זאת, בשלב זה בעבודה, הייצוג יכלול את מקורות ה.פ. המייצגים סמכים משני טעמים עיקריים: הטעם האחד הוא דידקטי – כיווץ הקשתות, גם אם לא יחסיר מידע מן הייצוג, יפגום בהבנת המעבר בין הייצוג הסכימטי המוכר של המערכת לבין הייצוג הקומבינטורי הגרפי, ובשלב כה מוקדם של ייסוד הייצוג חשוב לשמור על שיקוף כל פירטי המעבר בין הייצוגים. הטעם השני הוא הנדסי – פעמים שהסמך אינו מגדיר תזוזה 0 בכל המימדים. יש והסמך מאלץ רק חלק מדרגות החופש, ואז מקור ה.פ. מיוחס רק למימדים המאולצים, ואילו במימדים החופשיים יש נתק, וחיבור לצומת הייחוס לא ייצג נכונה את הסמך. גם יש, כאמור לעיל, סמכים שניתן להזיזם ממקומם, ואז מקור ה.פ. – ערכו שונה מ-0, ואין אפשרות אז לכווץ את הקשת. בשלבים מתקדמים בעבודה יבוצעו צעדי כיווץ למקורות כאלה, אך בשלב זה יותר הייצוג כפי שהוא.

3.4.3 פירוש כללי לערכים השונים בייצוג

כל הערכים בקשתות מבוטאים במערכת הכללית. ערכי הזרימה בכל קשת מייצגים את הכוח הפועל על זנב הקשת, שהוא זה המופעל על ידי ראש הקשת על צומת ראש הקשת. ערכי ה.פ. בכל קשת מייצגים את התזוזה של זנב הקשת ביחס לראשה.

בהתאם לכך ניתן למצוא בגרף שבאיור 3.11ח את הייצוג לערכים חשובים במבנה שבדוגמה. תזוזות הצמתים החופשיים b ו-c מיוצגות על ידי פוטנציאל הצמתים האלה בגרף, או, במונחי ה.פ. של קשת, על ידי ה.פ. הקשתות המחוברות בין הצמתים לבין צומת הייחוס. בדוגמה יש שתי קשתות כאלה לכל צומת – מקור זרימה תלוי ומקור זרימה ידוע, וניתן לבחור אחת מהן. יש רק לזכור, שכיוון הקשתות הוא כזה שערך ה.פ. בהן הוא בסימן הפוך לזה של פוטנציאל הצמתים החופשיים, ולכן גם לזה של התזוזות המבוקשות.

כאן אפשר לחזור לרגע לבחירת כיווני האלמנטים באיור 3.11ב, ולהסביר באופן מצומצם מדוע בחירה זו טובה. הצמתים החופשיים במבנה כלשהו – לא בהכרח כולם מועמסים. אם נדרשת תזוזת הצומת b שבדוגמה, כשאין עומס על צומת זה, הקשת היחידה הנותרת להבעת התזוזה במונחי ה.פ. היא זו

של מקור הזרימה התלוי של אלמנט 1. אם כיוון אלמנט זה היה נבחר הפוך, מקור הזרימה התלוי היה זורם לצומת a ולא היה ניתן עוד להסיק מיידיית את תזוזת b, אלא דרך צירוף ה.פ. של כמה קשתות.

התגובות בסמכים הם, כאמור, הזרימות במקורות ה.פ. המחברים את צמתי הסמכים לצומת הייחוס, כשגם כאן, לגבי הדוגמה, יש להפוך את סימן הזרימה כדי לקבל את התגובות בכיוונים החיוביים של המערכת הכללית, כי כיוון הזרימה מגדיר את הכוחות כאלה שפועלים על הסמכים, ולא שהסמכים מפעילים על המבנה.

3.4.4. התייחסות לחיבור מפרקי בין אלמנטים

הצומת c ראוי להתייחסות מיוחדת, כי הוא נקודת נתק של הזרימה במימד השלישי – מימד המומנט. כיוון שבנקודה c יש מפרק, הרי שאין מעבר מומנט מצד אחד של המפרק – קצה אלמנט 2 – לצידו השני – קצה אלמנט 3. המומנט החיצוני המופעל בצומת זה – מופעל על קצה אלמנט 2, ובאלמנט 3 לא זורם כלל מומנט. (למעשה, הסיבה שבמוטות מסבך אין מומנטים אינה המוטות עצמם, אלא אופן החיבור ביניהם – המפרקים, הפועלים כ'אביזר' לניתוק זרימת מומנט).

בייצוג הגרפי שבאיור 3.11 ח אין ניתוק זה מבוטא, כפי שלא מבוטא בו ניתוק דומה בסמך המפרקי d. כל עוד זוכרים שמדובר במוט (וחסרונם של מקורות תלויים הקשורים לאלמנט זה יכול בהחלט להזכיר זאת), ניתן להתמודד עם עניין זה בדרך הפשוטה ביותר – לא להתמודד. כיוון שלמוט מיוחס קשר קשיחות בלבד, ובהתאם – לקשת המייצגת את המוט מיוחס קשר מוליכות בלבד, הרי שהנתק בזרימה נוצר על ידי מטריצת המוליכות עצמה! במבנה שלושה מימדים, ומן הראוי להרחיב את מטריצת הקשיחות K^R (3.49) למטריצה 3×3 . הרחבה זו תהיה כך:

$$(3.51) \quad \mathbf{K}_{truss\ rod}^R = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} c_\alpha^2 & c_\alpha s_\alpha & 0 \\ c_\alpha s_\alpha & s_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i$$

ואז קשר הקשיחות (3.39) יניב זרימה שערכה 0 במימד השלישי – מימד המומנט. תוצאה זו מנתקת את הקשתות R_3 ו- Δ_d מרצף זרימת המומנט בגרף.

אפשרות נוספת להתמודד עם העניין, עדיין כשזכור שמדובר במוט, היא להשתמש במטריצת הקשיחות הכללית (3.41) גם למוט, אך, בבסיס המידע של הייצוג, להקנות את הערך 0 למומנט ההתמד של חתך המוט, I. באופן זה, מצטמצמת אוטומטית המטריצה הכללית (3.41) למטריצה (3.51).

האפשרות הנכונה ביותר, המייצגת באופן איזומורפי את החיבור המפרקי, היא ליצור נתק ממשי במימד המומנט, או להפריד את הייצוג הגרפי למימדיו, כפי שנעשה בפרק 2 לגבי הקורה שבאיור 2.24. במידה והמפרק מחבר אלמנטי מסגרת, זו האפשרות היחידה, שכן האפשרויות שלעיל אינן מתאימות. כיוון שטיפול בנתק כזה חשוב בעיקר לניתוח ופתרון הגרף, הוא יושאר לפרק הבא, העוסק בנושאים אלה.

3.5. סיכום ומסקנות לגבי הייצוג על ידי גרף התנגדות

בפרק זה פותח ייצוג איזומורפי מלא למבנה הכולל אלמנטי מסבך, קורה ומסגרת. הייצוג פותח על יסודותיה של תורת המבנים המוכרת היטב מן הספרות, לאחר פירוק הקשרים הידועים, והרכבתם מחדש לתוך טופולוגיה חדשה של גרף התנגדות. ההמרה האיזומורפית הטביעה בייצוג שפותח את כל הידע הגלום במבנה, וכיוון שהייצוג מבוסס על תורת הגרפים, ניתן לחלץ את כל הידע הזה מן הייצוג בעזרת כלים קומבינטוריים המוכרים בתורת הגרפים.

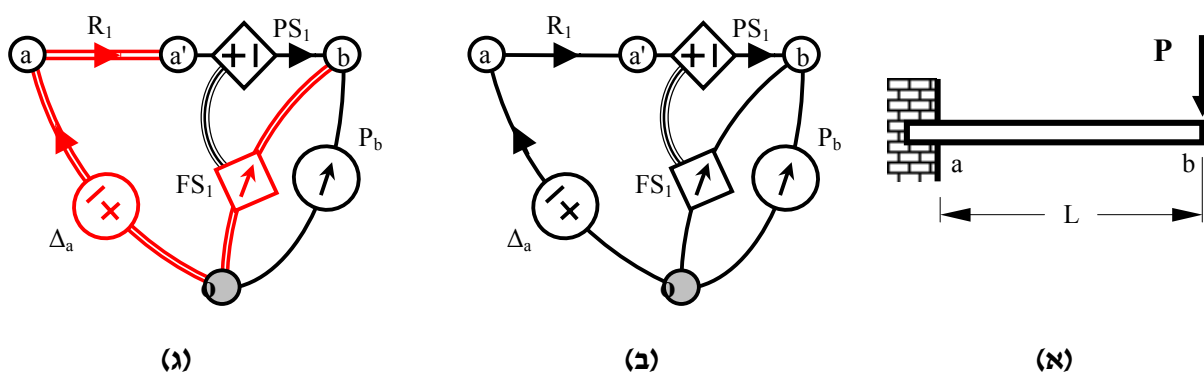
פרק זה מסתיים כאן, למרות שיש עוד מקום לפתח את הייצוג, וזאת משני טעמים: הטעם האחד – משפותח הייצוג העיקרי למבנה, מן הראוי להציג את אופן השימוש בו ולפתח שיטה לנתח אותו, כדי להבין את הייצוג לעומקו בטרם יפותח ויורחב עוד יותר. הטעם השני – הייצוג בפרק זה הוא הייצוג העיקרי בעבודה, ועל כן יש לתת לו את מקומו, ולהשאיר את הפיתוחים הנוספים וההרחבות לפרק אחר.

מן הטעם הראשון, יוקדש הפרק הבא, פרק 4, לניתוח הייצוג באמצעות שימוש בכלים קומבינטוריים ידועים. מן הטעם השני, יידחו היבטים נוספים והרחבות של הייצוג לפרק 5, ושם ישולבו ביישומים מיוחדים של הייצוג.

4. ניתוח הייצוג הגרפי

הייצוג הגרפי, שפותח בפרק הקודם, סולל דרך אל עולם מקביל של ידע, ומאפשר לראות את המבנה, ואת הבעיה ההנדסית הגלומה בו, באור אחר, המאיר צדדים חדשים. אך בשלב הזה, כל שהוצע הוא ייצוג אחר למערכת ההנדסית. לא תהיה כל תועלת בייצוג לבדו באין כלים מתאימים לנתח אותו, כפי שלא תהיה כל תועלת בתרגום משפט זה לשפה שאין איש מבין.

הכזעה ראשונית, ייעשה ניסיון לפתור בכלים הבסיסיים של תורת הגרפים בעיה פשוטה המיוצגת על ידי גרף. הבעיה וייצוגה מוראים באיור 4.1.



איור 4.1: ייצוג גרפי לקורה רתומה בעלת אלמנט אחד

(א) קורה רתומה מועמסת בקצה, כמוראה. יש למצוא את תזוזת הקצה b (שקיעה וזווית), וכן את תגובת הריתום a (גזירה ומומנט). (ב) ייצוג גרפי לקורה המועמסת. הזרימה במקור P_b היא וקטור העמיסה P . הפרש הפוטנציאלים במקור Δ_a הוא כמובן 0. (ג) בחירת עץ פורש לגרף. מקור ה.פ. כלול בעץ, כי מכיל ידע של הפרש פוטנציאלים. מקור הזרימה הוא קישור, כי מכיל ידע של זרימה. מתוך שתי הקשתות שנותרו לחיבור הצומת b לעץ, שהן שני המקורות התלויים, ידיעת הזרימה ב- PS_1 תועיל לידיעת הזרימה ב- FS_1 , ולכן קשת PS_1 נבחרה כקישור, ובאותו אופן, ידיעת ה.פ. ב- FS_1 יועיל לידיעת ה.פ. ב- PS_1 , ולכן נבחרה קשת FS_1 כענף בעץ. ממילא R_1 חייבת להיבחר גם היא כענף, כדי לקשר את הצומת a' לעץ.

בעץ הפורש של הגרף המייצג את הבעיה נכלל מקור ה.פ. הרגיל, ואילו מקור הזרימה הרגיל אינו נכלל. מתוך שני המקורות התלויים, נבחרה דווקא קשת מקור הזרימה התלוי כענף המחבר את הצומת b לעץ. הסיבה נעוצה בקשרי התלות בין המקורות ובתפקיד היסודי של ענפים וקישורים: ענף מייצג ידע של ה.פ., ואילו קישור – ידע של זרימה. הזרימה במקור הזרימה תלויה בזרימה של מקור ה.פ.. מבחינה זו, מקור הזרימה רחוק יותר מידיעת הזרימה (בניגוד גמור למקור זרימה רגיל שהוא הקרוב ביותר): הוא מכיל את הידע. לכן מן הראוי שדווקא מקור ה.פ. ישמש כקישור, ולא מקור הזרימה. בהקבלה גמורה, ה.פ. במקור ה.פ. תלוי בה.פ. שבמקור הזרימה, ולכן מקור הזרימה קרוב יותר לידיעת ה.פ. מאשר מקור ה.פ. התלוי (בניגוד למקור ה.פ. רגיל, המכיל בעצמו את הידע לגבי ה.פ.). לכן מקור הזרימה התלוי ראוי יותר לשמש כענף. אם כך, תפקידי קשתות המקורות התלויים ברורים לגבי העץ הפורש, וכך נבחרו. ממילא, קשת ההתנגדות חייבת לשמש ענף, כדי לקשר את הצומת a' .

משוואות החתכים והמעגלים שנוסחו בפרק 1 אינן לעזר כאן, כי קשתות המקורות התלויים לא באות לידי ביטוי במשוואות אלה. לא ניתן לייחס להם ערכים ידועים כלמקורות רגילים, ואין להם יחס התנגדות פנימי.

פתרון שיטתי עדיין אין, אם כן, אך ניתן לרשום את המשוואות, ולנסות לחלץ פתרון כלשהו. המשוואות מתייחסות לעץ הפורש המוראה באיור 4.1, שנבחר כך כפי שהוסבר שם. כיוון שהנדרש הוא למצוא את הזזת קצה הקורה, ואת התגובות בריתום, יודגשו הנעלמים הרלוונטיים לכך במלבן. הערכים הנתונים של המקורות הרגילים יסומנו במעגל.

תחילה - הקשר בין הפרשי הפוטנציאלים, בעזרת חוק הפוטנציאלים (1.15):

$$(4.1) \quad \vec{B} \cdot \vec{\Delta} = \begin{matrix} \text{PS}_1 \\ P_b \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta_a & R_1 & \text{FS}_1 & \text{PS}_1 & P_b \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \circ \\ \circ & \circ & -\mathbf{I} & \circ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_1^R \\ \Delta_1^{\text{FS}} \\ \Delta_1^{\text{PS}} \\ \Delta_b^P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

כמייצג להזזות הקצה נבחר כאן ה.פ. במקור הזרימה התלוי, למרות שאותו ה.פ. קיים גם במקור הזרימה הרגיל. בחירה זו נעשתה כדי ליצור הרגל כזה להבא, שכן העמסה חיצונית אינה בהכרח קיימת בכל צומת, ואילו קשת מקור זרימה תלוי מגיעה לכל צומת, לפי כללי בחירת כיווני האלמנטים.

באופן דומה – הקשר בין הזרימות, והפעם, לשם הייעול, לא על ידי חוק הזרימות, אלא בעזרת הצורה היותר ראשונית שלו (1.6), תוך שימוש בחלק השמאלי של מטריצת המעגלים שב- (4.1):

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a^\Delta \\ \mathbf{F}_1^R \\ \mathbf{F}_1^{\text{FS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \circ \\ \mathbf{I} & \circ \\ -\mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{\text{PS}} \\ \mathbf{F}_b^P \end{bmatrix}$$

גם כאן נבחרה, כמייצגת לזרימה דרך צומת הזנב שהיא למעשה תגובת הריתום, דווקא קשת המקור ה.פ. התלוי, ולא קשת ההתנגדות או קשת מקור ה.פ. הרגיל, שאותה זרימה עוברת גם דרכו. אמנם, כל צורת סמך מיוצגת על ידי מקור ה.פ. רגיל ואך טבעי היה לבחור אותו כמייצג, אך כיוון שמקור הזרימה התלוי נבחר לייצג את ה.פ. הכללי של האלמנט, ההקבלה בין המקורות התלויים משכנעת לבחור את מקור ה.פ. התלוי כמייצג את הזרימה הכללית הנכנסת לאלמנט.

כעת מספר קשרים מקומיים. קשר ההתנגדות (3.34) של קשת 1:

$$(4.3) \quad \Delta_1^R = \mathbf{R}_1^R \cdot \mathbf{F}_1^R$$

וכן, קשרי התלות (3.43) ו- (3.44) של המקורות התלויים:

$$(4.4) \quad \Delta_1^{\text{PS}} = \mathbf{H}_1^\Delta \cdot \Delta_1^{\text{FS}}$$

$$(4.5) \quad \mathbf{F}_1^{\text{FS}} = \mathbf{H}_1^F \cdot \mathbf{F}_1^{\text{PS}}$$

עד כאן יש 8 משוואות וקטוריות, ושמונה נעלמים וקטוריים מאותו מימד, לפיכך הפתרון מובטח. כמשוואה התחלתית לה.פ. טובה היא השורה הראשונה במשוואות המעגלים, המכילה גם את ה.פ. הנעלם וגם את ה.פ. הידוע:

$$(4.6) \quad \Delta_a^\Delta + \Delta_1^R - \Delta_1^{FS} + \Delta_1^{PS} = 0$$

שימוש ב- (4.3), בשורה השניה של (4.2), וב- (4.4) יניבו:

$$(4.7) \quad \Delta_a^\Delta + \mathbf{R}_1^R \cdot \mathbf{F}_1^{PS} - \Delta_1^{FS} + \mathbf{H}_1^\Delta \cdot \Delta_1^{FS} = 0$$

משוואה טובה לזרימות היא השורה השלישית של (4.2), המכילה גם את זרימת המקור הידוע וגם את הזרימה הנעלמת:

$$(4.8) \quad \mathbf{F}_1^{FS} = -\mathbf{F}_1^{PS} - \mathbf{F}_b^P$$

הצבת (4.5) תניב:

$$(4.9) \quad \mathbf{H}_1^F \cdot \mathbf{F}_1^{PS} = -\mathbf{F}_1^{PS} - \mathbf{F}_b^P$$

נתקבלו שתי משוואות, (4.7) ו- (4.9), עם שני הנעלמים העיקריים בלבד. ניתן לסדר אותן כך:

$$(4.10) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^R & -\mathbf{I} + \mathbf{H}_1^\Delta \\ \mathbf{I} + \mathbf{H}_1^F & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{PS} \\ \Delta_1^{FS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \circ \\ \circ & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_a^\Delta \\ \mathbf{F}_b^P \end{bmatrix}$$

המשוואה האחרונה היא נוסחת הפתרון לבעיה לפי הייצוג הגרפי. קשה להתעלם מההקבלות הפנימיות שיש במבנה המשוואה, במיוחד לאור הקשר (3.33). קשה גם להתעלם מחוסר השיטתיות שבדרך בניית המשוואה ומהצורך לפתח משוואה כללית שיטתית לפתרון הייצוג הגרפי, גם אם הוא מייצג מבנה מורכב יותר מזה שנפתר כאן.

בפרק זה תוצג שיטת המשתנים המעורבים לפתרון הייצוג הגרפי, שעיקרה מבוסס על השיטה המשמשת לפתרון מעגלי עכבה חשמליים (Swamy and Thulasiraman, 1981), והתאמתה לפתרון הייצוג שבעבודה זו מבוססת על פיתוח השיטה לטיפול בקשרי תלות בין קשתות בייצוגים גרפיים למערכות רב-תחומיות (Shai and Rubin, 2002).

4.1 שיטת המשתנים המעורבים (Mixed-Variable Method) לפתרון גרף התנגדות

פתרון הגרף – משמעותו ידיעת הזרימות וה.פ. בכל קשתות הגרף. בשיטת החתכים, הנעלמים הם ה.פ., ומוקד הידע המרכזי הוא הפרשי הפוטנציאלים במקורות הידועים. בהתאם, בשיטת המעגלים, הזרימות הן הנעלמים, ומוקד הידע המרכזי הוא הזרימות הידועות. במצב בו יש זרימות ידועות וה.פ. ידועים, כל אחת מן השיטות תשתמש בחלק הידע המתאים לה יותר, תוך ניסיון לנצל את אותו החלק, גם כשניסיון זה כרוך במאמץ ניכר, ואילו בחלק הידע 'האחר' תשתמש השיטה בלית-ברירה.

שיטת המשתנים המעורבים משכילה לנצל במידה שווה את שני מוקדי הידע, ולהשתמש בכל אחד מהם להשגת הנעלמים הקרובים אליו יותר. תהליך מסוג זה נעשה בהרכבת הפתרון (4.10), שם שימשו

בצורה מאוזנת שני החוקים הבסיסיים : המשוואה האחת (4.6) הסתמכה על חוק הפוטנציאלים, והשניה (4.8) – על חוק הזרימות.

השגת המיטב באמצעות שיטת המשתנים המעורבים מותנית בשלושה :

1. חלוקה נכונה של הידע בגרף לשני חלקיו – הפרשי פוטנציאלים וזרימות ;

2. הפעלת שני החוקים – חוק הפוטנציאלים וחוק הזרימות – בנפרד, כל אחד על החלק הקשור אליו, כדי להפיק את מירב הידע מכל חלק ;

3. מיזוג נכון של החוקים להפקת הידע הדורש את הפעלתם במשולב.

זו רוח השיטה. הדרך ליישומה בפועל, על כל שלביה, מתוארת להלן, עם הדגמה על הבעיה בה נפתח

הפרק :

4.1.1 שלב א: מיון

כל קשתות הגרף ממוינות לשתי קבוצות משלימות, כמוראה באיור 4.2 :

E^F – קבוצה מאופיינת זרימה, היינו, כוללת קשתות שנוח יותר למצוא את הזרימה בהן. קבוצה זו כוללת כמובן קשתות שהזרימה בהן ידועה (מקורות זרימה).

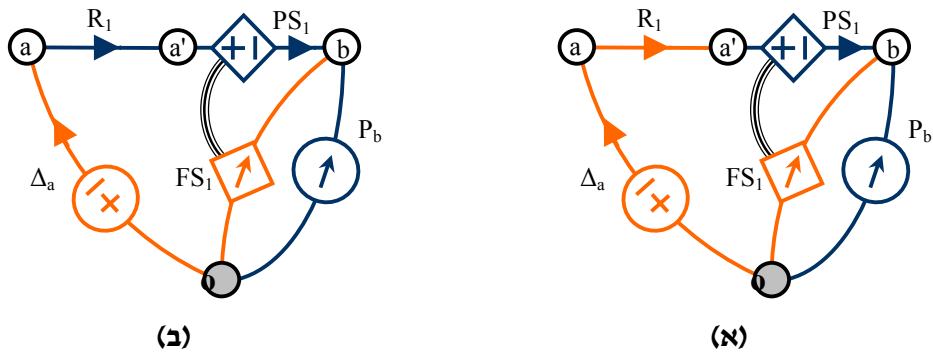
E^A – קבוצה מאופיינת ה.פ., היינו, כוללת קשתות שנוח יותר למצוא את הפרש הפוטנציאלים בהן. קבוצה זו כוללת כמובן קשתות שה.פ. בהן ידוע (מקורות ה.פ.).

הקבוצות משלימות וזרות, היינו :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} E^F \cup E^A &= E^G \\ E^F \cap E^A &= \emptyset \end{aligned}$$

בהתאם לאמור לעיל, ניתן לנסח את כלל המיון הראשון, כך :

כלל מיון 1: מקורות זרימה ידועים יש למיין לקבוצה E^F , ומקורות ה.פ. ידועים יש למיין לקבוצה E^A (בסעיף 4.2.4 יעודכן הכלל, לאור השלבים הבאים).



איור 4.2: מיון קשתות הגרף לשתי קבוצות

שתי אפשרויות למיון: (א) הזרימה במקור P_b ידועה, ולכן הקשת משוייכת ל- E^F , לפי כלל מיון 1. הפרש הפוטנציאלים במקור Δ_a גם הוא ידוע, ולכן קשת זו משוייכת ל- E^d , גם כן לפי הכלל. מיון שתי הקשתות המייצגות את המקורות התלויים מבוסס על קשרי התלות בין המקורות: הזרימה במקור הזרימה תלויה בזרימה של מקור ה.פ. מבחינה זו, מקור הזרימה רחוק יותר מידיעת הזרימה (בניגוד גמור למקור זרימה רגיל שהוא הקרוב ביותר: הוא מכיל את הידע). לכן, מבין השניים, יועדף לשייך את מקור ה.פ. לקבוצה E^F . בהקבלה גמורה, ה.פ. במקור ה.פ. תלוי בה.פ. שבמקור הזרימה, ולכן מקור הזרימה קרוב יותר לידיעת ה.פ. מאשר מקור ה.פ. התלוי (בניגוד למקור ה.פ. רגיל, המכיל בעצמו את הידע לגבי ה.פ.). לכן מקור הזרימה התלוי ראוי יותר מחברו להשתייך לקבוצה E^d . לפיכך שוייכו קשתות המקורות התלויים כפי שמוראה. קשת ההתנגדות אדישה למיון, ובאפשרות זו שוייכה ל- E^d . (ב) באותה מידה ניתן לשייך את קשת ההתנגדות ל- E^F .

בהמשך ינוסחו כללים נוספים למיון נכון שיקל על פתרון הגרף, אך בשלב זה, כל מיון שנעשה לפי הכלל הראשון, וברוח התיאור לעיל, הוא בסדר.

4.1.2. שלב ב: חלוקה

לאחר מיון הקשתות נבנים שני גרפים, כמוראה באיור 4.3:

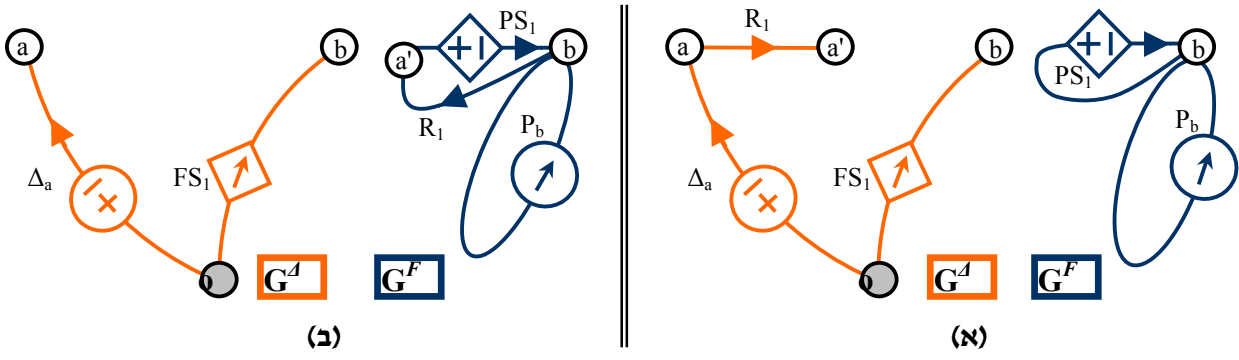
G^F – על ידי כיווץ כל הקשתות בגרף המקורי השייכות לקבוצה E^d . היינו:

$$(4.12) \quad G^F = G \circ E^d$$

G^d – על ידי מחיקת כל הקשתות השייכות ל- E^F מהגרף המקורי. היינו:

$$(4.13) \quad G^d = G - E^F$$

כזכור מפרק 1, פעולת כיווץ שומרת על תקפותו של חוק הזרימות, ופעולת מחיקה שומרת על תקפותו של חוק הפוטנציאלים. לפיכך, הנת-גרף G^F מקיים את חוק הזרימות, והנת-גרף G^d מקיים את חוק הפוטנציאלים.



איור 4.3: חלוקת הגרף לשני תת-גרפים

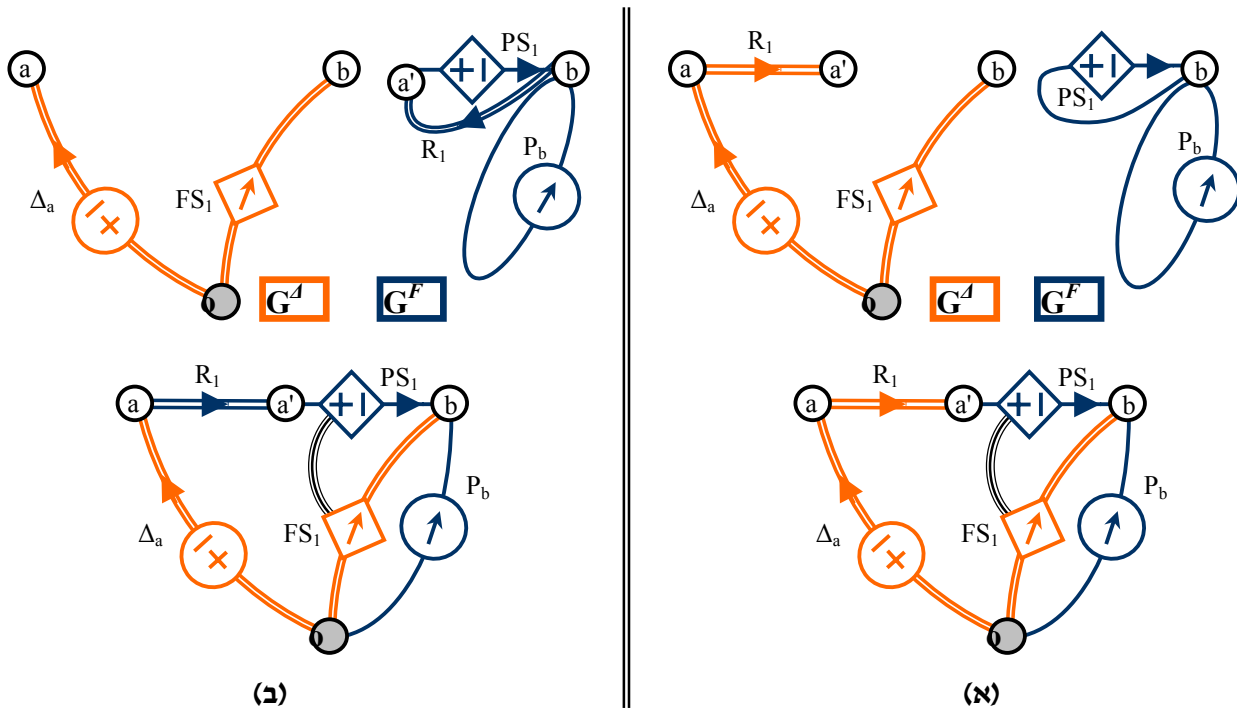
שתי אפשרויות המיון מניבות בהתאמה שתי אפשרויות חלוקה.

4.1.3 שלב ג: בניית עצים

כשהתת-גרפים בנויים, ניתן למצוא בכל אחד מהם עץ-פורש (או יער פורש, במידה והגרף אינו קשיר). איחוד העצים מניב עץ פורש של הגרף המקורי. העצים הפורשים ואיחודם מוראים באיור 4.4.

4.1.4 שלב ד: ניסוח הקשרים הבסיסיים

כזכור, יש למצוא ה.פ. וזרימה בכל אחת מקשתות הגרף. קשתות הגרף חולקו לשתי קבוצות – זרימה וה.פ., וכל קבוצה יוצרת תת-גרף ובתוכו עץ פורש. התת-גרף של קבוצת הזרימה קרוב לידיעת הזרימה, ובפרט על ידי הקישורים, שחלקם הם מקורות שהזרימה בהם כבר ידועה. מקורות אלה – מקורות זרימה ידועים בתוך קבוצת הקישורים של תת-גרף הזרימה – יסומנו כתת-קבוצה P^F . אם הזרימה תיוודע גם ביתר הקישורים, C^F , ניתן יהיה לדעת את הזרימה גם בענפי תת-גרף הזרימה, T^F .



איור 4.4: בחירת עצים פורשים בשני התת-גרפים

בכל אחת מאפשרויות החלוקה נבחר עץ פורש לשני התת-גרפים, ואיחוד שני העצים יוצר את העץ הפורש של הגרף המקורי (הזהות בין העצים של הגרף המקורי, שהתקבלו בשני האפשרויות, היא מקרית). (א) בתת-גרף G^F יש רק צומת אחד, ולכן רק הצומת נכלל בעץ, ולא אף אחת מן הקשתות. (ב) בתת-גרף G^F יש לבחור קשת אחת שתקשר בין שני הצמתים. כזכור, הן מהדוגמה שבתחילת הפרק והן משלב המיון, המקור PS_1 נוטה יותר לידיעת הזרימה מאשר לידיעת ה.פ., לכן מן הראוי שיהיה קישור, שידע הזרימה בו נדרש לידיעת הזרימה בענפים. לו יהיה ענף, אי-ידיעת ה.פ. בו תעכב את ידיעת ה.פ. בגרף כולו. לכן, כענף, נבחרת קשת ההתנגדות R_1 . (להלן בשלב ה' יתברר כי יש ביסוס לבחירה אינטואיטיבית זו, המנוסחת שם בכלל מיון 3).

בהקבלה, מקורות ה.פ. הידועים הם מוקד הידע בתוך תת-גרף ה.פ. מקורות אלה נכללים בעץ הפורש של תת-גרף ה.פ., ויוצרים את התת-קבוצה A^A . אם בנוסף להם תיוודע הזרימה גם ביתר ענפי העץ הפורש, T^A , ניתן יהיה לדעת את ה.פ. גם בקישורי תת-גרף ה.פ., C^A .

כעת יש שש קבוצות שונות של קשתות: $A^A, T^A, C^A, T^F, C^F, P^F$, ובכל אחת מהן יש למצוא את הזרימה ואת הפרש הפוטנציאלים. לפי ההירארכיה שתוארה, תהליך החישוב בכל תת-גרף כולל שלוש קבוצות. הראשונה ידועה, והשלישית קלה לחישוב עם ידיעת השתיים הראשונות. הבעיה היא אם כן בחישוב הקבוצה השנייה בכל תת-גרף: C^F בתת-גרף הזרימות ו- T^A בתת-גרף ה.פ..

מלבד זאת, ההיסק עד כה כולל רק זרימה בתת-גרף הזרימות, וה.פ. בתת-גרף ה.פ. אך נדרשות גם ידיעת ה.פ. בתת-גרף הזרימות, וזרימות תת-גרף ה.פ. לצורך כך יאוחדו התת-גרפים לכלל הגרף המקורי ויושלם תהליך החישוב. להלן שרשרת הקשרים הכוללת לביצוע החישוב כולו:

קשר 1 – טופולוגיה: היחסים הטופולוגיים מבוטאים בצורות שונות על ידי חוק הזרימות

וחוק הפוטנציאלים. כאן ייעשה שימוש בניסוחים (1.6) ו- (1.4), לפיהם הזרימות בקישורים מכתיבות את הזרימות בענפי העץ הפורש ואילו הפרשי הפוטנציאלים בעץ מכתיבים את הפרשי הפוטנציאלים בקישורים:

$$(1.6) \quad \vec{F}_T = \vec{B}_T^t \cdot \vec{F}_C$$

$$(1.4) \quad \vec{\Delta}_C = \vec{Q}_C^t \cdot \vec{\Delta}_T$$

קשר 2 – התנגדות: קשתות ההתנגדות מאופיינות, לחילופין, בעזרת קשרי ההתנגדות או המוליכות הבאים:

$$(1.29) \quad \vec{\Delta}_R = \vec{R}_R^R \cdot \vec{F}_R$$

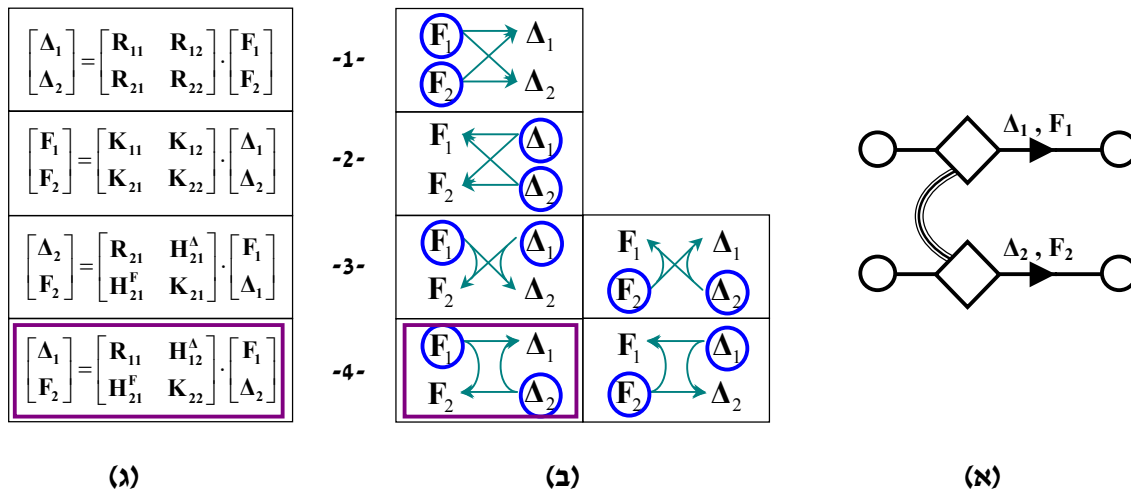
$$(1.30) \quad \vec{F}_R = \vec{K}_R^R \cdot \vec{\Delta}_R$$

קשר 3 - מקורות תלויים/מבוקרים: לכל קשת מיוחסים שני ערכים – זרימה וה.פ.. אם כך, לזוג קשתות מיוחסים ארבעה ערכים. כששתי קשתות הזוג תלויות, או מבוקרות, זו על ידי זו, כך ששניים מתוך הערכים תלויים בשניים האחרים, זוג הקשתות נקרא 'Two-port' (Chua, 1987). אפשרויות התלות בין הערכים מוצגות באיור 4.5, ואיתן הניסוחים המתאימים.

התלות הקיימת בייצוג הגרפי שבעבודה זו היא מרכיב חלקי מתוך אחד ממצבי התלות המלאה, המתואר בקשר הבא:

$$(4.14) \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & H_{12}^A \\ H_{21}^F & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

כרגע יישאר הקשר המתואר על כל מורכבותו, אך בשלב ה' ינוון לקשר התלות המאפיין את הייצוג הגרפי הנדון.

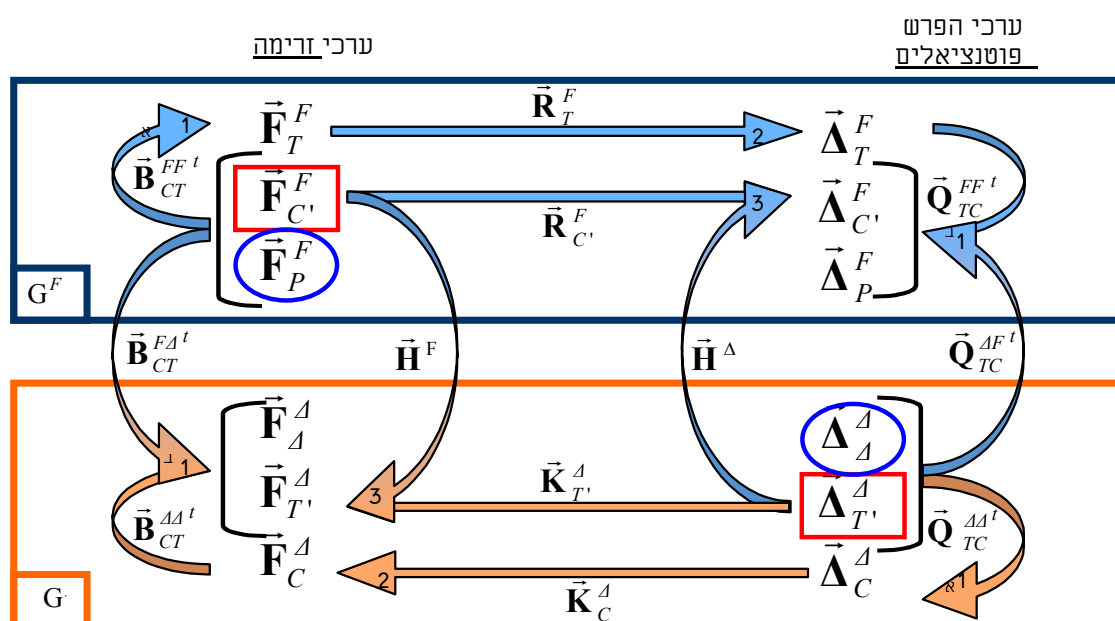


איור 4.5: Two-port – אפשרויות ליחסי תלות מלאים

(א) זוג קשתות, 1 ו- 2, עם יחסי תלות ביניהם. (ב) ששת המצבים האפשריים לתלות מלאה בין שניים מהערכים המיוחסים לקשתות לבין השניים האחרים. בכל מצב, שני הערכים המסומנים במעגל שולטים, או מבקרים, את שני הערכים האחרים. למעשה ניתן להסתפק בתיאור 4 המצבים השמאליים, כי שני המצבים שמיימין הם כמו הצמודים להם משמאלם, בהיפוך מספור הקשתות. (ג) ניסוח התלות ל- 4 המצבים העיקריים. התלות הקיימת בייצוג הגרפי שפותח בעבודה זו היא צורה מנוונת של המצב הרביעי (מודגש במשבצת).

4.1.1. שלב ה: בניית הירארכיית הידע

מאיור 4.6 ניתן לראות, שמתוך 12 קבוצות הערכים שיש בגרף, אמנם ידועות שתיים בלבד, \vec{F}_P^F ו- \vec{F}_C^F . אבל רק שתי קבוצות נוספות נדרשות כדי לחשב באופן מיידי את כל יתר קבוצות הערכים. שתי קבוצות מפתח אלה הן \vec{F}_C^F ו- \vec{F}_T^F . לפיכך, יוגדרו שתי קבוצות אלה כנעלמים הראשיים, והקשרים הקיימים ינוסחו על מנת לחלץ נעלמים אלה מתוך כלל הנעלמים, ולייחס אותם באופן בלעדי לשתי קבוצות הערכים הידועים, \vec{F}_P^F ו- \vec{F}_C^F . מכאן גם שמה של השיטה – 'שיטת המשתנים המעורבים': במשתנים הראשיים מעורבות זו בזו קבוצת משתני זרימה וקבוצת משתני ה.פ., בשונה משתי השיטות המקובלות והבסיסיות יותר – שיטת המעגלים (סעיף 1.2.7) בה נעלמי זרימה בלבד, ושיטת החתכים (סעיף 1.2.8) בה נעלמי ה.פ. בלבד.



איור 4.1: תהליך השגת הידע בשיטת המשתנים המעורבים

הנעלמים הראשיים (מלבן אדום) מצטרפים אל הידועים (מעגל כחול) כדי ליצור את בסיס הידע לכל הגרף – זרימות קישורי G^F וה.פ. בענפי G^{Δ} . (א1) בעזרת קשר טופולוגי בלבד ניתן למצוא את יתר הזרימות ב- G^F ואת יתר ה.פ. ב- G^{Δ} . על ידי קשרי התנגדות ומוליכות נמצאים גם הזרימות בקישורי G^{Δ} וה.פ. בענפי G^F . (ב1) משנמצאים הזרימות בקישורי הגרף כולו, וה.פ. בענפי הגרף כולו, ניתן למצוא את יתר הזרימות וה.פ. בכל הגרף על ידי קשרים טופולוגיים בלבד. (3) קשרים מעורבים בין ערכי הזרימות וה.פ. בשני התת-גרפים מהווים מעין 'קישור' בעץ מערכת הידע, ובכך 'סוגרים מעגל' חזרה לנעלמים הראשיים, ומתוך כך באה מערכת הידע על פתרונה.

קשר 1 (טופולוגיה) מופעל תחילה על התת-גרפים G^F ו- G^{Δ} (קשר 1א באיור 4.6), ולפיו יהיו הזרימות בענפי תת-גרף הזרימות:

$$(4.1) \quad \vec{F}_T^F = \begin{bmatrix} \vec{B}_{CT}^{FFt} \\ \vec{B}_{PT}^{FFt} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \vec{F}_{C'}^F \\ \vec{F}_P^F \end{bmatrix}$$

ואילו ה.פ. בקישורי תת-גרף הפרשי הפוטנציאליים יהיו:

$$(4.16) \quad \bar{\Delta}_C^A = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{AC}^{AA} \\ \bar{Q}_{TC}^{AA} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_A^A \\ \bar{\Delta}_T^A \end{bmatrix}$$

כדי להפעיל את הקשר הטופולוגי על כל הגרף המקורי, יש לנסח תחילה את הזרימה בכל הקישורים ואת ה.פ. בכל הענפים של הגרף המקורי. מתוך אלה טרם נוסחו הזרימות בקישורים C^A , וה.פ. בענפים T^F . אם קישורים וענפים אלה נבחרים מלכתחילה, כבר בשלב המיון, מתוך קשתות ההתנגדות של הגרף המקורי, ניסוח הזרימה וה.פ. האלה נעשה בנקל על ידי הפעלת קשר 2 (התנגדות):

$$(4.17) \quad \bar{\Delta}_T^F = \bar{R}_T^F \cdot \bar{F}_T^F$$

$$(4.18) \quad \bar{F}_C^A = \bar{K}_C^A \cdot \bar{\Delta}_C^A$$

ניתן לפיכך לנסח כלל עזר שני למיון נכון בשלב א:

כלל מיון 2: קשתות ההתנגדות ימויינו בין שתי קבוצות הקשתות כך, שבשלב בניית

העצים, קישורי התת-גרף G^A וענפי התת-גרף G^F יכללו קשתות התנגדות בלבד, ועדיף שיכללו את כל קשתות ההתנגדות בגרף כולו.

החלק הראשון, המסייג, של כלל מיון 2 אינו עוזר בדוגמת הקורה, כי, כמוראה באיור 4.4, בשתי האפשרויות אין כלל קישורים בתת-גרף G^A , ולגבי G^F – אפשרות א' לא מכילה ענפים, והענף באפשרות ב' הוא ממילא קשת התנגדות. עם זאת, לפי החלק השני של כלל מיון 2, החלק המעדיף, יש עדיפות לאפשרות ב', כיוון שבה קשת ההתנגדות היחידה בגרף מוכלת בענפי התת-גרף G^F .

כעת, כשה.פ. בכל הענפים, והזרימות בכל הקישורים, מבוטאים באמצעות המשתנים הראשיים, ניתן להפעיל את הקשר הטופולוגי (קשר 1) על הגרף המקורי כולו. וכך, ה.פ. בקישורים יבוטאו על ידי:

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{C'}^F \\ \bar{\Delta}_P^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{AC'}^{AF} & \bar{Q}_{AP}^{AF} \\ \bar{Q}_{TC'}^{AF} & \bar{Q}_{TP}^{AF} \\ \bar{Q}_{TC'}^{FF} & \bar{Q}_{TP}^{FF} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_A^A \\ \bar{\Delta}_T^A \\ \bar{\Delta}_T^F \end{bmatrix}$$

והזרימות בענפים – לפי:

$$(4.20) \quad \begin{bmatrix} \bar{F}_A^A \\ \bar{F}_T^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{CA}^{AA} & \bar{B}_{CT}^{AA} \\ \bar{B}_{C'A}^{FA} & \bar{B}_{C'T}^{FA} \\ \bar{B}_{PA}^{FA} & \bar{B}_{PT}^{FA} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_C^A \\ \bar{F}_{C'}^F \\ \bar{F}_P^F \end{bmatrix}$$

יודגש, כי חוק הזרימות לא תקף בתת-גרף G^A לבדו, ולא חוק הפוטנציאלים תקף בתת-גרף G^F לבדו. מסיבה זו, יש להפעיל את קשר 1 בשלב האחרון על כל קשתות הגרף המקורי.

אשר לזוגות הקשתות היוצרים Two-port, יש לכלול בשלב המיון את ערכי הבקרה (הערכים השולטים, המסומנים בעיגולים באיור 4.5) בקרב הנעלמים הראשיים. בדרך זו, המקורות התלויים ייוחסו ישירות לנעלמים הראשיים, ללא המרה נוספת, וללא הגדלת קבוצת הנעלמים הראשיים. מכאן, כלל העזר השלישי למיון, בהתבסס על איור 4.6:

כלל מיון 3: במיון קשתות בנות זוג two-port, את הקשת בה הזרימה היא ערך בקרה יש למיין לקבוצה E^F כך שתיכלל בקישורי התת-גרף G^F , ואת הקשת בה הזרימה היא ערך בקרה יש למיין לקבוצה E^A כך שתיכלל בענפי התת-גרף G^A .

בדוגמת הקורה, כלל מיון 3 כבר בא לידי ביטוי על ידי הבחירה האינטואיטיבית, המתוארת באיור 4.4.

לאור האמור עד כה, קבוצת הנעלמים הראשיים יכולה לכלול שני סוגי קשתות:

הסוג האחד - קשתות בקרה, שלגביהן מתאים קשר 3 (4.14). כאן המקום להזכיר את הקשרים בין המקורות התלויים, שפותחו בייצוג הגרפי:

$$(3.43) \quad \Delta_i^{PS} = \mathbf{H}_i^A \cdot \Delta_i^{FS}$$

$$(3.44) \quad \mathbf{F}_i^{FS} = \mathbf{H}_i^F \cdot \mathbf{F}_i^{PS}$$

לפי אלה, נדרש רק חלק מן הניסוח המלא (4.14) לתאר את התלות בין הקשתות, היינו:

$$(4.21) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^{PS} \\ \bar{\mathbf{F}}^{FS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \bar{\mathbf{H}}^A \\ \bar{\mathbf{H}}^F & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}^{PS} \\ \bar{\Delta}^{FS} \end{bmatrix}$$

ובניסוח אחר, לפי כלל מיון 3, לגבי סוג הקשתות הזה:

$$(4.22) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{C'}^F \\ \bar{\mathbf{F}}_{T'}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \bar{\mathbf{H}}^A \\ \bar{\mathbf{H}}^F & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{C'}^F \\ \bar{\Delta}_{T'}^A \end{bmatrix}$$

(הציונים התחתונים של מטריצות התלות, \mathbf{H} , הושמטו, מכיוון שהציונים העליונים כבר מבדילים אותם באופן חד-משמעי, וכן ייעשה גם להבא).

הסוג השני – קשתות התנגדות, אלה שלא נכללו בקישורי התת-גרף G^A או בענפי התת-גרף G^F . כיוון שהמשתנים הראשיים מעורבים, יש להשתמש בשתי החלופות של קשר 2, (1.29) ו-(1.30), לביטוי קשרי ההתנגדות, אך ניתן לנסח אותן במבנה מטריציוני מאוחד, כך:

$$(4.23) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{C'}^F \\ \bar{\mathbf{F}}_{T'}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{C'}^F & \circ \\ \circ & \bar{\mathbf{K}}_{T'}^A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{C'}^F \\ \bar{\Delta}_{T'}^A \end{bmatrix}$$

למרות שניסוחי הקשרים (4.22) ו-(4.23) לגבי שני סוגי הקשתות הם שונים, ניתן למזגם לניסוח

מוכלל אחד:

$$(4.24) \quad \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{C'}^F \\ \bar{\mathbf{F}}_{T'}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{C'}^F & \bar{\mathbf{H}}^A \\ \bar{\mathbf{H}}^F & \bar{\mathbf{K}}_{T'}^A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{C'}^F \\ \bar{\Delta}_{T'}^A \end{bmatrix}$$

לכאורה קשר זה חוזר לניסוח המלא של יחסי תלות, (4.14), אך למעשה אלו שני ניסוחים נפרדים, המוכללים במבנה אלגברי אחד. לפיכך, יש לזכור, בעת מעשה, 'לאורר' את מטריצות המקדמים, כך שיותאמו לסידור שני הסוגים השונים בווקטורי הערכים שבשני האגפים. המורכבות של (4.24) ביחס ל-

4.22) היא הגורמת להעדפה האמורה בכלל מיון 2. בהישמר כלל זה, מירב קשרי ההתנגדות מתקיים בשתי קבוצות נעלמים משניות, לפי (4.17) ו-(4.18), ומתמעט למינימום מספר קשרי ההתנגדות המיוחסים לנעלמים הראשיים והמגדילים את מספרם.

4.1.6. שלב ו: הפתרון

שילוב המשוואות (4.15) – (4.20) ו-(4.24) זו בזו מניב את המשוואה הסופית של שיטת המשתנים המעורבים, שהנעלמים בה הם הנעלמים הראשיים בלבד (Shai and Rubin, 2002):

$$(4.25) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_C^F + \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^F \cdot (\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF})^t & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^A \\ \bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{AF} + \bar{\mathbf{H}}^F & \bar{\mathbf{K}}_T^A + \bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{AA} \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot (\bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{AA})^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_C^F \\ \bar{\Delta}_T^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & -\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^F \cdot (\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FF})^t \\ -\bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{AA} \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot (\bar{\mathbf{Q}}_{AC}^{AA})^t & -\bar{\mathbf{Q}}_{TP}^{AF} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^A \\ \bar{\mathbf{F}}^P \end{pmatrix}$$

כעזר ליישום הפתרון מובאת כאן משוואת המעגלים המלאה, מחולקת פנימית לפי קבוצות הקשתות השונות:

$$(4.26) \quad \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\Delta} = [\bar{\mathbf{B}}_T \mid \mathbf{I}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_T \\ \bar{\Delta}_C \end{bmatrix} = \begin{matrix} C^A & T^A & T^F & C^A & C^{iF} & P^F \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA} & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA} & \circ & \mathbf{I} & \circ & \circ \\ \bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} & \circ & \mathbf{I} & \circ \\ \bar{\mathbf{B}}_{PA}^{FA} & \bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FA} & \bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FF} & \circ & \circ & \mathbf{I} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_A^A \\ \bar{\Delta}_T^A \\ \bar{\Delta}_T^F \\ \bar{\Delta}_C^A \\ \bar{\Delta}_C^F \\ \bar{\Delta}_P^F \end{bmatrix} & = \mathbf{0} \end{matrix}$$

מומלץ לנסח משוואה זו, ובפרט את חלק המטריצה $\bar{\mathbf{B}}_T$, כשלב מקדים לניסוח משוואת המשתנים המעורבים (4.25), כדי לחסוך את הניסוחים הנפרדים (4.15) ו-(4.20). יתר על כן, הקשר

$$(1.8) \quad \bar{\mathbf{Q}}_C = -\bar{\mathbf{B}}_T^t$$

מאפשר לנסח בהתאם את משוואת החתכים, אף היא מחולקת לקבוצות, במושגים של מטריצת המעגלים:

$$(4.27) \quad \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = [\mathbf{I} \mid -\bar{\mathbf{B}}_T^t] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_T \\ \bar{\mathbf{F}}_C \end{bmatrix} = \begin{matrix} \Delta^A & T^A & T^F & C^A & C^{iF} & P^F \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \circ & \circ & -(\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA})^t & -(\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA})^t & -(\bar{\mathbf{B}}_{PA}^{FA})^t \\ \circ & \mathbf{I} & \circ & -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA})^t & -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA})^t & -(\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FA})^t \\ \circ & \circ & \mathbf{I} & \circ & -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF})^t & -(\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FF})^t \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_A^A \\ \bar{\mathbf{F}}_T^A \\ \bar{\mathbf{F}}_T^F \\ \bar{\mathbf{F}}_C^A \\ \bar{\mathbf{F}}_C^F \\ \bar{\mathbf{F}}_P^F \end{bmatrix} & = \mathbf{0} \end{matrix}$$

וכך, כל היחסים הטופולוגיים המופיעים במטריצות של משוואת המשתנים המעורבים ינוסחו בעזרת חלקיה של התת-מטריצה \mathbf{B}_T .

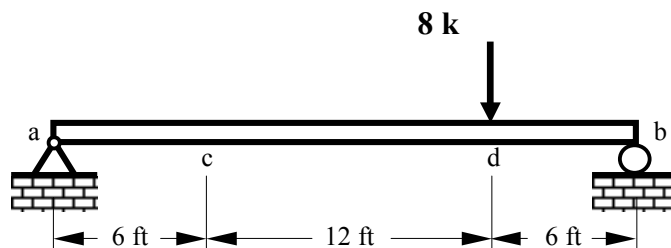
לסיום חלק זה של הפרק, יוזכר, שמסבך מטופל באמצעות קשרי מוליכות (קשיחות) בלבד, כיוון שקשר ההתנגדות אינו מוגדר למוט מסבך (סעיף 3.3.1). קשרי המוליכות במשוואת המשתנים המעורבים מיוחסים לקבוצות T^d ו- C^d בלבד, ולפיכך ניתן לנסח כלל מיון נוסף, בהתאם לכלל מיון 2:

כלל מיון 4: קשתות התנגדות המייצגות מוטות מסבך ישויכו לקישורים C^d , ובלית ברירה - גם לענפים T^d .

השלב העיקרי בפיתוח שיטת המשתנים המעורבים, לצורך פתרון הייצוג הנדון בעבודה זו, הסתיים, אך כדי ליישם את השיטה ביעילות, יש עוד להעמיק בה ולשכללה. זאת ייעשה בהמשך הפרק, תוך כדי הדגמת השיטה. דוגמה ראשונה (חלק 4.2) תוצג בהרחבה, כשהיא משמשת מצע לשכלול השיטה, ודוגמה שניה (חלק 4.3) תיפתר בהתאם לצורה הסופית שהשיטה תקבל. לסיום הפרק (חלק 4.3), יוצג אלגוריתם מלא לייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות, ולפתרונו בשיטת המשתנים המעורבים, כשמשוואת המשתנים המעורבים נכתבת ישירות מן הייצוג, ללא כל צורך בבנייה מקדימה של מטריצות טופולוגיות ואחרות. האלגוריתם האמור ייושם בדוגמה שלישית.

4.2 דוגמה א' – קורה אופקית

הבעיה לדוגמה זו לקוחה מ- (Hibbeler, 1985), עמ' 247 (דוגמה 4-7).



איור 4.7: דוגמה א' - קורה אופקית

יש למצוא את השיפוע בנקודה c של הקורה שבאיור 4.7.

4.2.1 בחירת צמתים ואלמנטים לגרף ההתנגדות

הנדרש הוא הפוטנציאל Π_{cz} , לפיכך הייצוג הגרפי יכלול צומת מייצג לנק' c. בנוסף לכך יכללו הצמתים a ו-b בגלל התגובות שם, והצומת d בגלל הכוח המרוכז שמופעל בצומת זה. מצומת הייחוס זורם העומס החיצוני לצומת d, והסמכים מאלצים ה-f. במימד ההזזה y בצמתים a ו-b ביחס לצומת הייחוס. שלושת קטעי הקורה המחברים בין הצמתים ייחשבו לשלושה אלמנטים נפרדים.

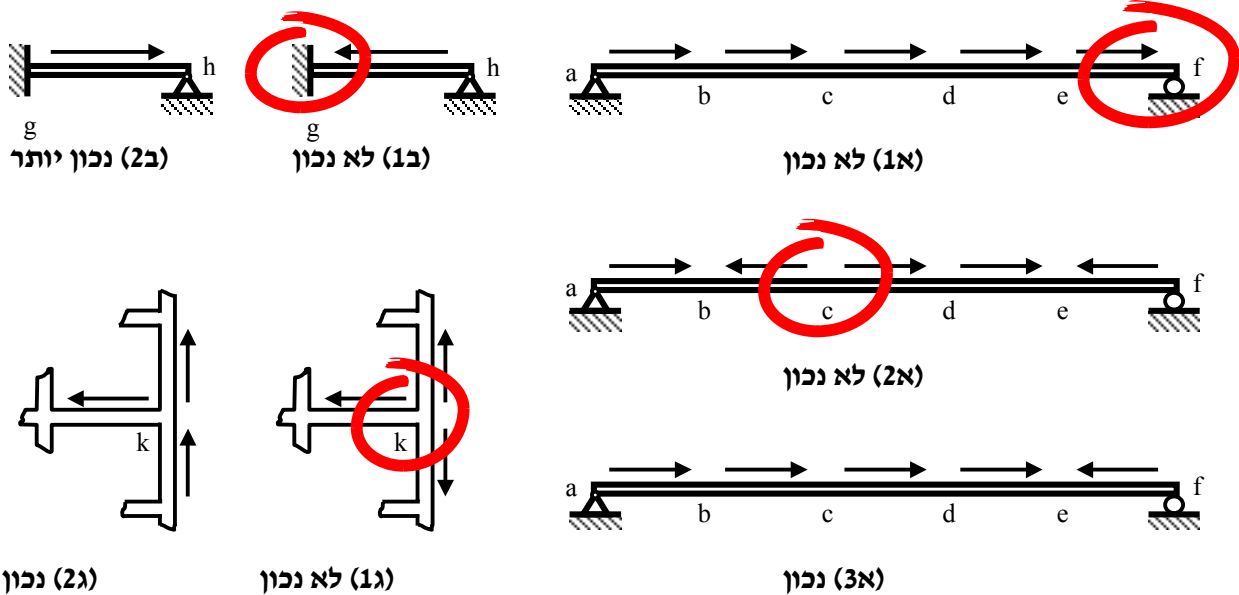
4.2.2 כללים לבחירת כיווני האלמנטים

כדי לשלב את ייצוגי האלמנטים בייצוג הכולל, יש לבחור כיוון לאלמנטים. כאן המקום לנסח שני כללים שימושיים בעניין זה, והם:

כלל כיוון 1: כיווני האלמנטים ייבחרו כך שצומת ראש אלמנט לא יהיה צומת סמך, או לפחות שיהיה משוחרר במימד הזוויתי.

כלל כיוון 2: כיווני האלמנטים ייבחרו כך שכל צומת יהיה צומת ראש של לפחות אלמנט אחד, חוץ מצמתי הסמך, שעליהם חל כלל כיוון 1.

באיור 4.8 מוצגות דוגמאות לאופן החלת הכללים.



איור 4.8: בחירה נכונה של כיווני אלמנטים

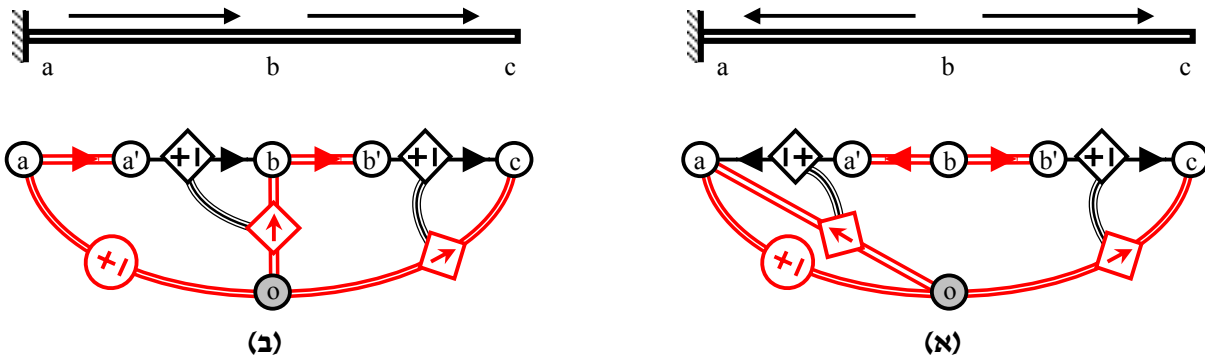
(א) אפשרות 1 סותרת את כלל כיוון 1. אמנם סמך f משוחרר במימד הזוויתי, אך אין הכרח לבחור אותו כראש אלמנט. אפשרות 2 סותרת את כלל כיוון 2. כאן יש אלמנט אחד, וראשו יהיה סמך בין כך ובין כך. אפשרות 2 נכונה יותר כי בה ראש האלמנט משוחרר במימד הזוויתי. במקרים חריגים, ניתן להוסיף צומת באמצע האלמנט, שיהיה ראש לשני התת-אלמנטים שיווצרו, וכך יישמר כלל כיוון 1 במלואו. (ג) יישום כלל כיוון 2 במסגרת. ניתן להוכיח את אפשרות יישומו של כלל כיוון 2 על ידי בניית עץ פורש לרשת האלמנטים, החל מצומת סמך, והתקדמות לכל צומת ברשת דרך אלמנט-ענף שראשו בצומת החדש שנוסף.

הסיבות לכללים אלה הן שלוש:

- 1. זמינות ידע:** נתון חשוב במבנה הוא הזזתו של צומת חופשי במבנה. הזזה כזו נמדדת בגרף כהפרש בין פוטנציאל הצומת לבין פוטנציאל צומת הייחוס. אם הצומת הוא צומת ראש אלמנט, הרי שתהיה קשת ישירה המקשרת בינו לבין צומת הייחוס, וה.פ. בה הוא הערך הדרוש, שמופיע כמשתנה ראשי במשוואת המשתנים המעורבים (4.25). בצמתי סמכים אין צורך בקשת כזו, כי גם אם הסמיכה אינה בכל המימדים, כבר קיימת שם קשת מקור הפרש פוטנציאלים.
- 2. מחסור בענפי עץ פורש:** לפי כלל מיון 3 לעיל, מקורות ה.פ. התלויים נבחרים כקישורים. אם שני אלמנטים יחוברו זנב אל זנב, הרי שיהיה לפחות צומת אחד המבודד מן העץ הפורש, כמוראה באיור 4.9. חיבור ראש אל זנב מקשר את צומת החיבור אל העץ על ידי ענף מקור הזרימה התלוי, המגיע אל הראש.
- 3. עודף ענפים בעץ הפורש:** מקורות ה.פ. המייצגים סמכים נבחרים כענפים בעץ הפורש. לפי כלל מיון 3 לעיל, גם מקורות זרימה תלויים נבחרים כענפים. אם צומת סמך ייבחר

כראש אלמנט, יקשרו בין הצומת לצומת הייחוס שתי קשתות מקבילות, כמוראה באיור 4.9, ולא ניתן יהיה אז לבחור את שתיהן כענפים. גם לא ניתן יהיה לאחד אותן, כי הן בעלי אופי ותפקוד שונים זה מזה. בחירת אחת מהן כקישור תחייב ניתוח מיוחד לגרף, ואין זה רצוי.

יש לזכור שאלה הם כללים, וכמו בכל כלל, ייתכנו יוצאי דופן.

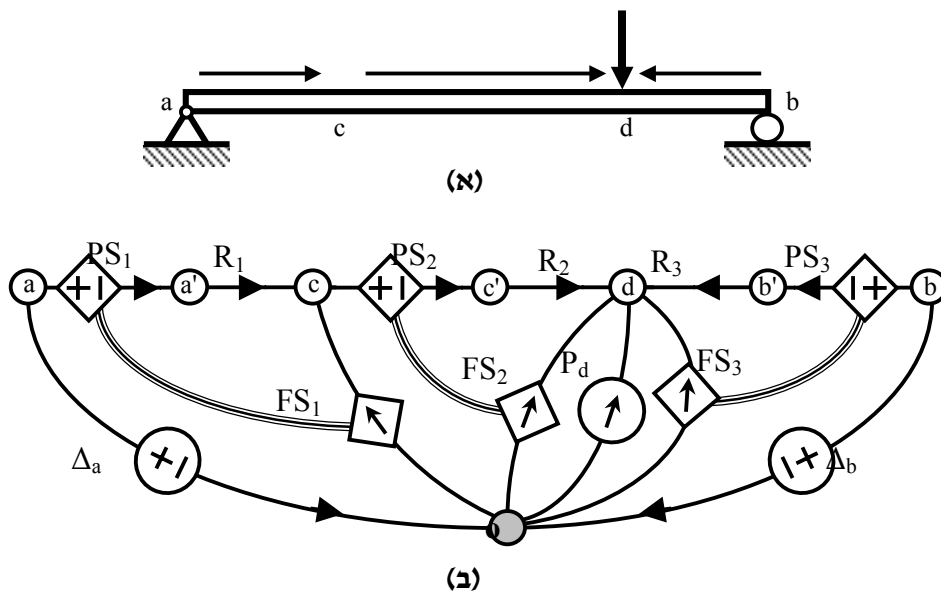


איור 4.9: התועלת בבחירה נכונה של כיווני אלמנטים

(א) הכיוונים שנבחרו סותרים את שני כללי הבחירה: צומת הריתום הוא ראש האלמנט a-b, וצומת b אינו ראש לאף אחד מן האלמנטים. העץ הפורש בגרף ההתנגדות אינו יכול להיבנות לפי כללי המיון הרגילים, כי אז הצמתים a', b', b' מבודדים מן העץ, ואילו הצמתים 0 ו-a קשורים בשני ענפים מקבילים, שלא ניתן לאחד אותם בגלל הבדלי תפקוד, וכך העץ הפורש מכיל מעגל, בניגוד להגדרתו. (ב) בחירת כיוונים לפי הכללים מאפשרת בניית עץ פורש חוקי.

4.2.3. בניית גרף ההתנגדות

לפי שני הכללים, נבחר כיוון האלמנטים כמוראה באיור 4.10 (כיוון האלמנט האמצעי אינו משנה, ונבחר שרירותית). הייצוג האופייני של אלמנט מופיע באיור 3.9, ובהתאם לכל האמור לעיל, יהיה גרף ההתנגדות המייצג את הקורה זה המוראה באיור 4.10.



איור 4.10: דוגמה א' - גרף התנגדות לקורה

(א) בחירת כיווני אלמנטים בקורה לפי כללי הבחירה. כיוון האלמנט האמצעי חופשי לבחירה שרירותית. (ב) גרף ההתנגדות לקורה.

4.2.4 מיון קשתות גרף ההתנגדות, ובניית עץ פורש

פתרון לגרף בשיטת משתנים מעורבים מתחיל במיון קשתות הגרף, חלוקת הגרף ובניית עצים פורשים. במהלך פיתוח הפתרון, פורטו שלושה שלבים אלה בנפרד מטעמים דידקטיים, אך, למעשה, ניתן לבצעם בבת-אחת, תוך הקפדה על כללי המיון, כמודגם להלן. לעזר, יובאו כאן שוב ארבעת כללי המיון:

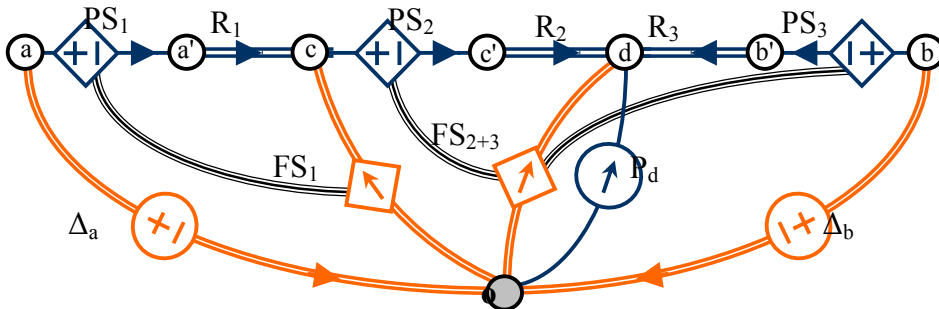
כלל מיון 1: מקורות זרימה ידועים יש למיין לקבוצה E^F כך שתיכלל בקישורי התת-גרף G^F , ומקורות ה.פ. ידועים יש למיין לקבוצה E^d כך שתיכלל בענפי התת-גרף G^d .

כלל מיון 2: קשתות ההתנגדות ימויינו בין שתי קבוצות הקשתות כך, שבשלב בניית העצים, קישורי התת-גרף G^d וענפי התת-גרף G^F יכללו קשתות התנגדות בלבד, ועדיף שיכללו את כל קשתות ההתנגדות.

כלל מיון 3: במיון קשתות בנות זוג Two-port, את הקשת בה הזרימה היא ערך בקרה יש למיין לקבוצה E^F כך שתיכלל בקישורי התת-גרף G^F , ואת הקשת בה הפרש הפוטנציאלים הוא ערך בקרה יש למיין לקבוצה E^d כך שתיכלל בענפי התת-גרף G^d .

כלל מיון 4: קשתות התנגדות המייצגות מוטות מסבך ישויכו לקישורים C^d , ובלית ברירה גם לענפים T^d .

לפי כללים אלה, יהיה הגרף, לאחר המיון ובחירת העצים הפורשים החלקיים, כמוראה באיור 4.11.



איור 4.11: דוגמה א' - גרף ההתנגדות ממיון, עם עץ פורש

לפי כלל מיון 3 ממוינים מקורות ה.פ. התלויים, שהזרימה בהם היא ערך בקרה, לקבוצה E^F כקישורים, ואילו מקורות הזרימה התלויים, בהם ה.פ. הוא ערך בקרה, ממוינים לקבוצה E^d כענפים. כדי שלא יהיה ענף כפול בין הצומת 0 לצומת d, אוחדו שני מקורות הזרימה התלויים המחוברים בין צמתים אלה, פעולה שגם מפחיתה את מורכבות הגרף. לפי כלל מיון 1, מקורות ה.פ. Δ_a ו- Δ_b הם ענפים מתוך E^d , ומקור הזרימה P_d הוא קישור ב- E^F . הקשתות הנותרות הן קשתות ההתנגדות, שחייבות להיות ענפים כדי להשלים את העץ הפורש, ולפי כלל מיון 2 הן יהיו ענפים של הקבוצה E^F .

יש לשים לב לאיחוד שני מקורות הזרימה התלויים, הזורמים במקביל מצומת 0 לצומת b. איחוד זה מתאפשר בגלל ששניהם שייכים לאותה קבוצה, והוא רצוי כי הוא מאפשר לשייך את שניהם לעץ. פעולת איחוד זו גם מפחיתה את מורכבות הגרף.

4.2.5 ניסוח המטריצות הקשורות לגרף ההתנגדות

כחכנה לפתרון הגרף, יש לנסח את מטריצות הקשר לגרף. המטריצה B_T , מחולקת בהתאם ל- (4.26), תהיה:

$$(4.28) \quad \mathbf{B}_T = \begin{matrix} C^d \\ C^F \\ P^F \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta^d & T^d & T^F \\ \hline \Delta_{ay} & \Delta_{by} & \Delta_{az} & \Delta_{bz} & FS_1 & FS_{2+3} & R_1 & R_2 & R_3 \\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline PS_1 & -1 & \circ & \circ & -1 & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & -1 & \circ & 1 & \circ \\ \hline PS_2 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & 1 & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & 1 \\ \hline PS_3 & -1 & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 \\ \hline \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ \hline P^F & \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

יש לשים לב לפיצול ענפי מקורות ה.פ. Δ_a ו- Δ_b לשתי קבוצות שונות בעמודות \mathbf{B}_T : למרות שהענף נכלל בעץ עם כל ממדיו, עדיין צריך להפריד בין מימדים הכוללים מקורות ידועים ושייכים ל- Δ^d , לבין מימדים נטולי מקורות, ששייכים ל- T^d .

קשרי ההתנגדות בקשתות ההתנגדות:

$$(4.29) \quad \bar{\mathbf{R}}_T^F = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^R & & \\ & \mathbf{R}_2^R & \\ & & \mathbf{R}_3^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{72}{EI} & -\frac{18}{EI} & & & & & & & \\ -\frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} & & & & & & & \\ & & \frac{576}{EI} & -\frac{72}{EI} & & & & & \\ & & -\frac{72}{EI} & \frac{12}{EI} & & & & & \\ & & & & & & \frac{72}{EI} & \frac{18}{EI} & \\ & & & & & & \frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} & \end{bmatrix}$$

עם \mathbf{R}_i^R המחושב לאלמנטים i לפי טבלה 3.2, ולפי אורכי האלמנטים הנתונים באיור 4.7.

כיוון שהקבוצות C^F ו- T^d כוללות רק קשתות תלויות, ללא קשתות התנגדות, הרי שהקשר (4.24) יוחלף בקשר הפשוט יותר, (4.22). לפי זה, הקשר בין ערכי ה.פ. של שתי הקבוצות יהיה:

$$(4.30) \quad \bar{\Delta}_{C^F}^F = \bar{\mathbf{H}}^\Delta \cdot \bar{\Delta}_T^d$$

ובפירוט הקשתות בכל קבוצה יהיה הקשר כך:

$$(4.31) \quad \begin{bmatrix} \Delta_1^{PS} \\ \Delta_2^{PS} \\ \Delta_3^{PS} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{H}}^\Delta \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{az} \\ \Delta_{bz} \\ \Delta_1^{FS} \\ \Delta_{2+3}^{FS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \mathbf{H}_1^\Delta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \mathbf{H}_2^\Delta & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \mathbf{H}_3^\Delta \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{az} \\ \Delta_{bz} \\ \Delta_1^{FS} \\ \Delta_{2+3}^{FS} \end{bmatrix}$$

ועם \mathbf{H}_i^Δ המחושבים לאלמנטים לפי טבלה 3.2, תהיה מטריצת הקשר כך :

$$(4.32) \quad \mathbf{H}^\Delta = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & 6 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 12 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & -6 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

באופן דומה, הקשר בין הזרימות בקבוצות האמורות יהיה, לפי (4.22) :

$$(4.33) \quad \bar{\mathbf{F}}_{T'}^A = \bar{\mathbf{H}}^F \cdot \bar{\mathbf{F}}_{C'}^F$$

עם הקשר הבא, לפי (3.33) :

$$(4.34) \quad \bar{\mathbf{H}}^F = -(\bar{\mathbf{H}}^\Delta)^t$$

4.2.6 צעדים לפישוט משוואת המשתנים המעורבים

בטרם יוצבו כל הקשרים במשוואת המשתנים המעורבים (4.25), כדאי לפשט את משוואת המשתנים המעורבים, תחילה לפי שני הצעדים הראשוניים הבאים, הנכונים לכל מבנה :

1. כאמור בשלב הפתרון לעיל, ניתן להשתמש ברכיבי המטריצה $\bar{\mathbf{B}}$ במקום רכיבי המטריצה $\bar{\mathbf{Q}}$ על ידי שימוש במשוואה (1.8). החלפה זו תיעשה לפי הביטוי ב- (4.27).

2. ניתן להשתמש בקשר (4.34) כדי לבטא את $\bar{\mathbf{H}}^F$ על ידי $\bar{\mathbf{H}}^\Delta$.

בשלב זה, תקבל משוואת המשתנים המעורבים (4.25) את הצורה הבאה :

$$(4.35) \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_C^F + \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^F \cdot (\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF})^t & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^\Delta \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^\Delta)^t & \bar{\mathbf{K}}_{T'}^A + (\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA})^t \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{C'}^F \\ \bar{\Delta}_{T'}^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & -\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} \cdot \bar{\mathbf{R}}_T^F \cdot (\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FF})^t \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA})^t \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA} & (\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FA})^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^A \\ \bar{\mathbf{F}}^P \end{pmatrix}$$

שלושה צעדים נוספים לפישוט המשוואה, מתבססים על כללי המיון ועל כללי בחירת הכיוונים באלמנטים ובקשתות :

3. בהישמר כללי המיון 2 ו-4 במלואם, אין קשתות התנגדות בקבוצה C^F . לפיכך :

$$(4.36) \quad \bar{\mathbf{R}}_{C'}^F = 0$$

צעד זה לא נעשה לגבי $\bar{\mathbf{K}}_{T'}^\Delta$ בשלב זה, כי, לפי כלל מיון 4, ייתכן מסבך שחלק ממוטותיו מיוצגים על ידי ענפים, ואז ייעשה שימוש באיבר זה, ועל כן אין להשמיטו.

4. לפי כללי המיון, ענפים ב- G^F יהיו קשתות התנגדות של אלמנטי כפיפה בלבד. כמו כן, קישורים ב- G^F , שאינם מקורות זרימה, יהיו רק מקורות ה.פ. תלויים של אלמנטי הכפיפה. בנוסף לכך, לפי הייצוג הסופי לאלמנטי כפיפה, קשת התנגדות של האלמנט וקשת מקור ה.פ. תלוי הן בנות אותו כיוון (ניתן להיווכח בזאת גם בדוגמה הנוכחית).

יתר על כן, מבין כל הקשתות המשתתפות במעגל המכיל את שתי הקשתות האלה, הן היחידות מתוך G^F , שכן לשני צמתי אלמנט הכפיפה מגיעים שני ענפים מצומת הייחוס, בין אם אלה מקורות הזרימה התלויים, ובין אם אלה מקורות ה.פ. ידועים. שני ענפים אלה, השייכים ל- G^A , סוגרים מעגל עם שתי הקשתות האמורות. לפיכך:

$$(4.37) \quad \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FF} = \mathbf{I}$$

5. בנוסף לצעד האחרון, לפי כללי בחירת כיווני האלמנטים, צומת חופשי יהיה צומת ראש לפחות לאלמנט אחד, ולכן תגיע מצומת הייחוס לצומת זה קשת מקור זרימה תלוי, שלפי כלל מיון 3 היא שייכת ל- T^A . גם לצומת שאינו חופשי, מעצם הגדרתו, יגיע מצומת הייחוס מקור ה.פ. ידוע, שאף הוא שייך לענפי G^A לפי כלל מיון 1. כיוון שעומס חיצוני מיוצג על ידי מקור זרימה הפועל על צמתים, וכיוון שהוא תמיד יהיה קישור, לפי כלל מיון 1, הרי שהמעגלים המוגדרים על ידי קישורי מקורות הזרימה הידועים יכילו רק ענפים מ- G^A . (אם העומס פועל על צומת במסבך, כל קשתות המסבך גם הם של G^A , לפי כלל מיון 4). לפיכך:

$$(4.38) \quad \bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FF} = \mathbf{0}$$

עם יישום צעדים אלה, תקבל משוואת המשתנים המעורבים (4.35) את הצורה הבאה:

$$(4.39) \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_T^F & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^A \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^A)^T & \bar{\mathbf{K}}_T^A + (\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA})^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_C^F \\ \bar{\Delta}_T^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & \circ \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA})^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA} & (\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FA})^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^A \\ \bar{\mathbf{F}}^P \end{pmatrix}$$

צעדים לגבי התת-מטריצות $\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{AA}$ ו- $\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA}$ אינם יכולים להינקט באותה קלות, שכן אלה יכולות להיות מיוחסות לרשת מסבך, שכיווני המוטות בה אינם נענים לכללים כלשהם. מתוך כך, יינקט צעד אחרון לגבי מבנים הכוללים אלמנטי כפיפה בלבד:

6. במבנה בעל אלמנטי כפיפה בלבד, ניתן למיין את כל קשתות ההתנגדות כענפים ב- G^F , ועם יתר כללי המיון מתקבל ש:

$$(4.40) \quad C^A = \emptyset$$

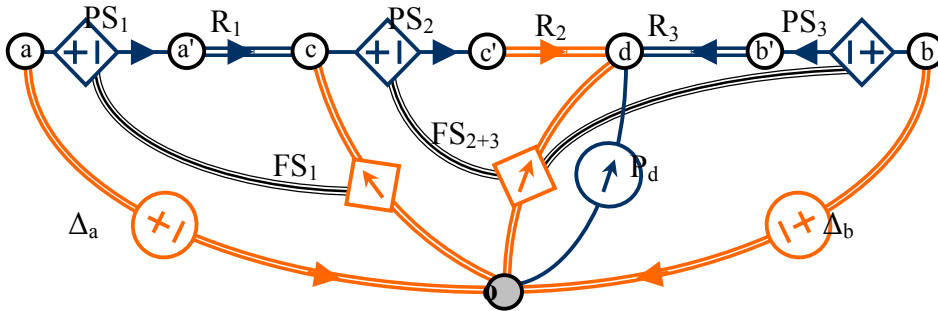
$$(4.41) \quad R_T^A = \emptyset$$

לפי הצעד האחרון, משוואת המשתנים המעורבים למבנה בעל אלמנטי כפיפה בלבד, המיוצג על פי כל הכללים שנקבעו עד כה, תהיה מן הצורה הפשוטה הבאה:

$$(4.42) \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_T^F & \bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^A \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^A)^T & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_C^F \\ \bar{\Delta}_T^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & \circ \\ \circ & (\bar{\mathbf{B}}_{PT}^{FA})^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^A \\ \bar{\mathbf{F}}^P \end{bmatrix}$$

4.2.8 השפעת שיוך קשתות ההתנגדות לקבוצה E^d

בסעיף זה תוצג ההשפעה של חריגה מאחד הכללים – כלל מיון 2. לפי כלל זה, קשת התנגדות המשמשת כענף יש לשייך לקבוצה E^F , כדי לא להוסיף על המשתנים העיקריים – זרימות בקישורי גרף הזרימות והפ. בענפי גרף הפוטנציאלים, שמספיקים להבעת כל יתר הזרימות והפ. בגרף. קביעה זו תיבחן כעת, כשקשת ההתנגדות של אלמנט 2 תשוך לגרף הפוטנציאלים. עדיין יש לקבוע אותה כענף כדי לכלול את צומת הביניים בעץ הפורש, לכן היא שייכת ל- T^d . הגרף יהיה כעת כמוראה באיור 4.12.



איור 4.12: דוגמה 'א' - גרף התנגדות החורג מכלל מיון 2

והמטריצה \mathbf{B}_T המתאימה לו תהיה:

$$(4.47) \quad \mathbf{B}_T = \begin{matrix} & \Delta^d & & T^d & & T^F \\ \begin{matrix} C^d \\ C^F \\ P^F \end{matrix} & \begin{matrix} \Delta_{ay} & \Delta_{by} \\ \Delta_{az} & \Delta_{bz} \end{matrix} & \begin{matrix} FS_1 \\ FS_{2+3} \\ R_2 \end{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} - \\ PS_1 \\ PS_2 \\ PS_3 \\ P_d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ -1 & & \circ & & -1 & \circ & & & 1 & \circ \\ \circ & & -1 & & \circ & -1 & & & \circ & 1 \\ & & & & 1 & \circ & -1 & \circ & 1 & \circ \\ & & & & \circ & 1 & \circ & -1 & \circ & 1 \\ -1 & & \circ & & & & -1 & \circ & & \\ \circ & & -1 & & & & \circ & -1 & & \\ & & & & -1 & \circ & & & & \\ & & & & \circ & -1 & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

שינוי הרכב הקבוצות אינו משנה את היחסים בין הקשתות, אך יש להביע אותם בהקשרים הנכונים:

$$(4.48) \quad \bar{\mathbf{R}}_T^F = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^R \\ \mathbf{R}_3^R \end{bmatrix}$$

$$(4.49) \quad \begin{bmatrix} \Delta_1^{PS} \\ \Delta_2^{PS} \\ \Delta_3^{PS} \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{H}}^\Delta \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{az} \\ \Delta_{bz} \\ \frac{\Delta_1^{FS}}{\Delta_{2+3}^{FS}} \\ \frac{\Delta_2^R}{\Delta_2^R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \mathbf{H}_1^\Delta & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \mathbf{H}_2^\Delta & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \mathbf{H}_3^\Delta & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{az} \\ \Delta_{bz} \\ \frac{\Delta_1^{FS}}{\Delta_{2+3}^{FS}} \\ \frac{\Delta_2^R}{\Delta_2^R} \end{bmatrix}$$

בגלל שבהרכבה החדש קבוצת הענפים ב- G^A מכילה גם קשת התנגדות, לא ניתן להשתמש בקשר התלות (4.22), ויש להחליפו בקשר (4.24), שלפיו:

$$(4.50) \quad \vec{\mathbf{F}}_{T'}^A = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{H}}^F & \vec{\mathbf{K}}_{T'}^A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{F}}_{C'}^F \\ \vec{\Delta}_{T'}^A \end{bmatrix}$$

אמנם עדיין:

$$(4.34) \quad \vec{\mathbf{H}}^F = -(\vec{\mathbf{H}}^\Delta)^t$$

אך יש גם קשר מוליכות לגבי קשת 2:

$$(4.51) \quad \vec{\mathbf{K}}_{T'}^A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & & \\ & & & & & \mathbf{K}_2^R \end{bmatrix}$$

כשהמטריצה 'נמתחת' כדי למקם במקום המתאים את קשר המוליכות. קשר זה, לפי טבלה 3.2, הוא:

$$(4.52) \quad \mathbf{K}_2^R = \begin{bmatrix} \frac{EI}{144} & \frac{EI}{24} \\ \frac{EI}{24} & \frac{EI}{3} \end{bmatrix}$$

כעת משוואת המשתנים המעורבים (4.42) תיראה כך:

פתרון הגרף מתחיל בניסוח בלוק הענפים של משוואת המעגלים :

$$(4.54) \quad \mathbf{B}_T = \mathbf{C}^{CF} \begin{bmatrix} \Delta^A & T^{A'} & T^F \\ \begin{matrix} \Delta_a & \Delta_d \\ \text{FS}_{1+2} & \text{FS}_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C^A \\ R_4 \\ PS_1 \\ PS_2 \\ PS_3 \\ P^F \\ P_b \end{matrix} \end{bmatrix}$$

	Δ_a	Δ_d	FS_{1+2}	FS_3	R_1	R_2	R_3
C^A	-1	0	0	0	0	0	0
R_4	0	-1	0	-1	0	0	0
PS_1	-1	0	0	0	1	0	0
PS_2	0	-1	0	0	0	1	0
PS_3	0	0	-1	0	0	0	1
P^F	-1	0	0	1	0	0	0
P_b	0	-1	0	0	1	0	0
	0	0	-1	0	0	0	1

קשר התלות בין ה.פ. יהיה, לפי טבלה 3.3 :

$$(4.55) \quad \bar{\mathbf{H}}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^\Delta & | & 0 \\ \mathbf{H}_2^\Delta & | & 0 \\ \hline 0 & | & \mathbf{H}_3^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & -L_2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

ומשוואת המשתנים המעורבים המתאימה תהיה, לפי (4.39) :

$$(4.56) \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_T^F & \bar{\mathbf{B}}_{CT'}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^\Delta \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT'}^{FA} + \bar{\mathbf{H}}^\Delta)^T & (\bar{\mathbf{B}}_{CT'}^{AA})^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CT'}^{AA} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_C^F \\ \bar{\Delta}_T^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{B}}_{CA}^{FA} & 0 \\ -(\bar{\mathbf{B}}_{CT'}^{AA})^T \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^A \cdot \bar{\mathbf{B}}_{CA}^{AA} & (\bar{\mathbf{B}}_{PT'}^{FA})^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Delta}^A \\ \bar{\mathbf{F}}^P \end{bmatrix}$$

עם קשר ההתנגדות הבא לאלמנטי המסגרת, לפי טבלה 3.3 :

$$(4.57) \quad \bar{\mathbf{R}}_T^F = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^R & & \\ & \mathbf{R}_2^R & \\ & & \mathbf{R}_3^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{matrix} \right]_1 & & \\ & \left[\begin{matrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{AE} & 0 \\ \frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{matrix} \right]_2 & \\ & & \left[\begin{matrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{matrix} \right]_3 \end{bmatrix}$$

וקשר המוליכות הבא למוט 4, לפי (3.48) ועם $\alpha = -45^\circ$:

$$(4.58) \quad \vec{\mathbf{K}}_C^d = \mathbf{K}_4^R = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} c_\alpha^2 & c_\alpha s_\alpha \\ c_\alpha s_\alpha & s_\alpha^2 \end{bmatrix}_4 = \left(\frac{EA}{L}\right)_4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

הצבת (4.54), (4.55), (4.57) ו-(4.58) ב-(4.56) תיתן:

$$(4.59) \quad \begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{3EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{AE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{AE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & -1 & -L_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{PS} \\ \mathbf{F}_2^{PS} \\ \mathbf{F}_3^{PS} \\ \mathbf{F}_4^{PS} \\ \mathbf{F}_5^{PS} \\ \mathbf{F}_6^{PS} \\ \mathbf{F}_7^{PS} \\ \mathbf{F}_8^{PS} \\ \mathbf{F}_9^{PS} \\ \mathbf{F}_b^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_d \\ \mathbf{F}_b^P \end{bmatrix}$$

ועם נתוני הבעיה הבאים:

$$(4.60) \quad \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_d \\ \mathbf{F}_b^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -352 \\ 4800 \end{bmatrix} ; \quad \begin{array}{l} \text{elements 1,2,3: } L = 50 \quad EA = 13,000 \quad EI = 16,250 \\ \text{truss rod 4: } L = 70.7 \quad EA = 19,500 \end{array}$$

יהיה הפתרון:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{\text{PS}} \\ \mathbf{F}_2^{\text{PS}} \\ \mathbf{F}_3^{\text{PS}} \\ \Delta_{1+2}^{\text{FS}} \\ \Delta_3^{\text{FS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x}^{\text{PS}} \\ F_{1y}^{\text{PS}} \\ M_{1z}^{\text{PS}} \\ F_{2x}^{\text{PS}} \\ F_{2y}^{\text{PS}} \\ M_{2z}^{\text{PS}} \\ F_{3x}^{\text{PS}} \\ F_{3y}^{\text{PS}} \\ M_{3z}^{\text{PS}} \\ \Delta_{1+2x}^{\text{FS}} \\ \Delta_{1+2y}^{\text{FS}} \\ \Delta_{1+2z}^{\text{FS}} \\ \Delta_{3x}^{\text{FS}} \\ \Delta_{3y}^{\text{FS}} \\ \Delta_{3z}^{\text{FS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54.75 \\ 80.71 \\ 1397 \\ -54.75 \\ 271.3 \\ 575.5 \\ 232.7 \\ -16.12 \\ -229.7 \\ 0.2106 \\ 4.022 \\ -1.909 \\ 0.8948 \\ 2.979 \\ 0.5321 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Pi_{bx} \\ \Pi_{by} \\ \Theta_{bz} \\ \Pi_{cx} \\ \Pi_{cy} \\ \Theta_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2106 \\ -4.022 \\ 1.909 \\ -0.8948 \\ -2.979 \\ -0.5321 \end{bmatrix}$$

(4.61)

4.4. ניסוח מבוסס טופולוגיה

לסיום פרק זה, וכסיכום של כל הפיתוח בעבודה עד כה, יוצגו שני אלגוריתמים לביצוע שיטתי של אנאליזת מבנים באמצעות הייצוג על ידי גרף. האלגוריתם הראשון הוא לבניית הגרף המייצג את המבנה, עם מיון מלא לשני התת-גרפים G^A ו- G^F , ובחירת ענפי העצים הפורשים. האלגוריתם השני הוא לפתרון הגרף, ובו תנוסח משוואת המשתנים המעורבים ישירות מן הגרף, על בסיס הטופולוגיה שלו.

4.4.1. אלגוריתם 1: ייצוג מבנה על ידי גרף מעורב משתנים

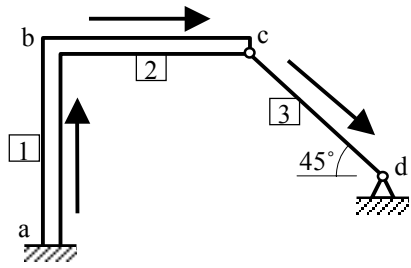
1. קבע כיוון לכל אחד מאלמנטי המבנה לפי הכללים לבחירת כיווני האלמנטים (סעיף 4.2.2). בקצרה: צומת ראש אלמנט לא יהיה צומת סמך, בוודאי לא במימד הזוויתי, וכל צומת חופשי יהיה ראש לפחות לאלמנט אחד).
2. יצג כל אחד מאלמנטי המבנה על ידי הייצוג המתאים, תוך חיבור קשתות האלמנטים זה לזה לפי טופולוגיית המבנה, ואיחוד כל צמתי הייחוס לאחד.
3. הוסף מקורות פוטנציאל בהתאם לסמכים, ומקורות זרם בהתאם לעומסים.
4. אחד מקורות זרימה תלויים מקבילים, וכווץ מקורות ה.פ. שערכם 0 בכל המימדים.
5. בנה עץ פורש מעורב: ענפי G^A כוללים את כל מקורות ה.פ. הידועים ואת כל מקורות הזרימה התלויים, ומספר מינימלי של קשתות התנגדות המייצגות מוטות מסבך. ענפי G^F כוללים את כל קשתות ההתנגדות של אלמנטי הכפיפה (קורות ומסגרות) בלבד.

6. מיין את הקישורים: קישורי G^4 כוללים את הנותרות מקשתות ההתנגדות המייצגות מוטות מסבך בלבד. קישורי G^F כוללים את כל מקורות הזרימה הידועים ואת כל מקורות ה.פ. התלויים.

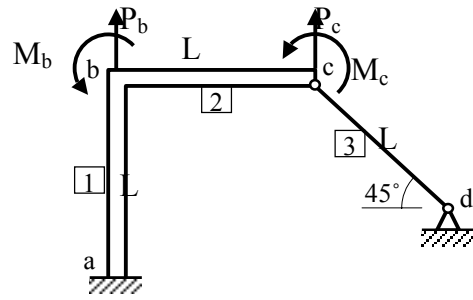
האלגוריתם מודגם באיור 4.14 על המבנה שהובא לדוגמה בחלק 3.4. צעד 4 באלגוריתם אינו מודגם במלואו, כמוסבר באיור, כדי שניתן יהיה בהמשך להדגים את ההתייחסות למקור ה.פ. ברישום המשוואות.

4.4.2. ניסוח משוואות המשתנים המעורבים ישירות מן הגרף

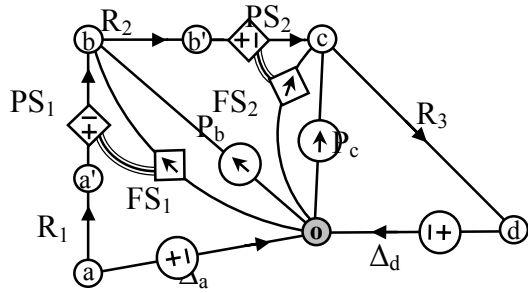
מתוך הגרף שמתקבל, ניתן לחלץ ישירות משוואות מעורבות משתנים. לכל מעגל, המוגדר לפי קישור השייך ל- G^F , ניתן לנסח משוואת מעגל, ולפיה - סך הפרשי הפוטנציאלים בקשתות המעגל הוא 0. כמו כן, לכל חתך, המוגדר לפי ענף השייך ל- G^A , ניתן לנסח משוואת חתך, ולפיה - סך הזרימות בקשתות החתך הוא 0. לפי אלגוריתם 1, הקישורים ב- G^F , שזרימתם בלתי ידועה, הם כל מקורות ה.פ. התלויים של אלמנטי הכפיפה, ואילו הענפים ב- G^A , שהפרש הפוטנציאלים בהם בלתי ידוע, הם כל מקורות הזרימה התלויים של אלמנטי הכפיפה, וכן קשתות מסבך שנבחרו כענפים. זרימות בלתי ידועות אלה של קישורי G^F , וה.פ. בלתי ידועים אלה של הענפים ב- G^A , הם הנעלמים לפיהם ניתן לבטא את כל משוואות המעגלים של קישורי G^F , ואת כל משוואות החתכים של ענפי G^A .



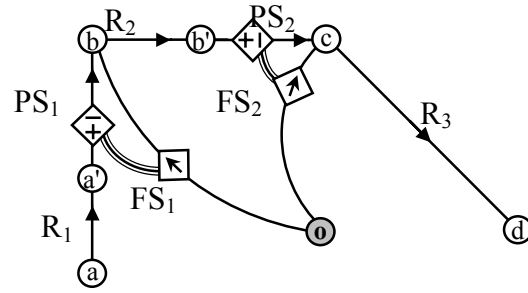
(צעד 1)



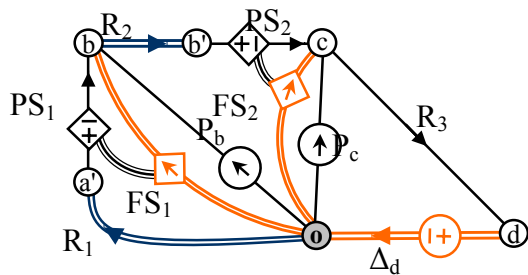
(א)



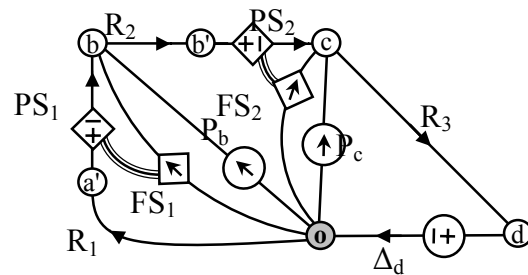
(צעד 3)



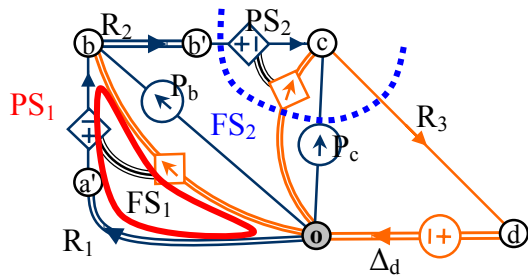
(צעד 2)



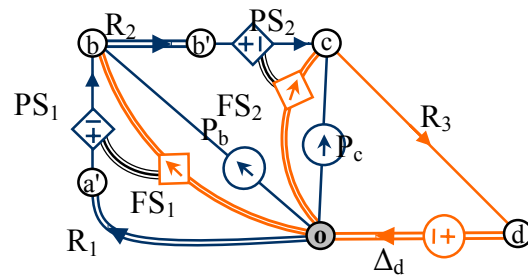
(צעד 5)



(צעד 4)



(ב)



(צעד 6)

איור 4.14: אלגוריתם 1 - ייצוג מבנה על ידי גרף התנגדות

(א) המבנה מאיור 3.11. (צעד 1) בחירת כיוונים לאלמנטים. (צעד 2) ייצוג האלמנטים על ידי גרף. (צעד 3) הוספת ייצוגי הסמכים והעומסים. (צעד 4) כיוון מקורות ה.פ. ידועים שערכם 0 בכל המימדים. כאן כוון רק אחד מן המקורות, ואילו חברו הושאר מטעם דידקטי - כדי להדגים בהמשך את ההתייחסות למקור כזה בעץ ובמשוואות. איחוד מקורות זרימה תלויים אינו מעשי כאן, והוא מודגם באיור 4.11. (צעד 5) בחירת ענפים ומיונם. (צעד 6) מיון הקישורים. (ב) מעגל לדוגמה, לפי קישור PS_1 וחתך לדוגמה, לפי ענף FS_2 .

באזור 4.14 ב מוראים מעגל לדוגמה לפי קישור PS_1 , וחתך לדוגמה לפי ענף FS_2 . לפי חוק הפוטנציאלים, סך ה.פ. במעגל PS_1 הוא 0. לפיכך:

$$(4.62) \quad \Delta_1^{PS} + \Delta_1^R - \Delta_1^{FS} = 0$$

הפרש הפוטנציאלים Δ_1^{PS} תלוי בה.פ. Δ_1^{FS} :

$$(4.63) \quad \Delta_1^{PS} = \mathbf{H}_1^\Delta \cdot \Delta_1^{FS}$$

ואילו ה.פ. Δ_1^R בקשת ההתנגדות R_1 מתייחס לזרימה בקשת זו לפי ההתנגדות:

$$(4.64) \quad \Delta_1^R = \mathbf{R}_1^R \cdot \mathbf{F}_1^R$$

לפיכך, משוואת המעגל (4.62) תהיה:

$$(4.65) \quad \underline{(\mathbf{H}_1^\Delta - \mathbf{I}) \cdot \Delta_1^{FS} + \mathbf{R}_1^R \cdot \mathbf{F}_1^{PS} = 0}$$

באופן דומה, ניתן לפתח את משוואת החתך לחתך המוגדר לפי ענף FS_2 . לפי חוק הזרימות, סך הזרימות בחתך הוא 0. לפיכך:

$$(4.66) \quad \mathbf{F}_2^{PS} + \mathbf{F}_2^{FS} + \mathbf{F}_c^P - \mathbf{F}_3^R = 0$$

הזרימה \mathbf{F}_c^P ידועה. הזרימה \mathbf{F}_2^{FS} תלויה בזרימה \mathbf{F}_2^{PS} לפי:

$$(4.67) \quad \mathbf{F}_2^{FS} = \mathbf{H}_2^F \cdot \mathbf{F}_2^{PS}$$

הזרימה בקשת ההתנגדות R_3 מיוחסת לה.פ. בה, כך:

$$(4.68) \quad \mathbf{F}_3^R = \mathbf{K}_3^R \cdot \Delta_3^R$$

אך כיוון שקשת זו היא קישור, הרי שהיא מגדירה מעגל שכולו, מלבדה, ענפים, וניתן לבטא, לפי חוק הפוטנציאלים, את ה.פ. בה לפי סך ה.פ. בענפים אלה:

$$(4.69) \quad \Delta_3^R = -\Delta_2^{FS} - \Delta_d^\Delta$$

הצבה ב- (4.66) תניב:

$$(4.70) \quad (\mathbf{I} + \mathbf{H}_2^F) \cdot \mathbf{F}_2^{PS} + \mathbf{F}_c^P - \mathbf{K}_3^R \cdot (-\Delta_2^{FS} - \Delta_d^\Delta) = 0$$

ועם סידור נוסף תהיה משוואת החתך כך:

$$(4.71) \quad \underline{(\mathbf{I} + \mathbf{H}_2^F) \cdot \mathbf{F}_2^{PS} + \mathbf{K}_3^R \cdot \Delta_2^{FS} = -\mathbf{K}_3^R \cdot \Delta_d^\Delta - \mathbf{F}_c^P}$$

מן הדוגמאות האלה לניסוח משוואת מעגל ומשוואת חתך ניתן ללמוד, כי רישום כל משוואות החתכים והמעגלים בגרף יכול להיעשות בצורה מיידידת שיטתית, והמשוואה הכללית של שיטת המשתנים המעורבים יכולה להתקבל לפיכך ישירות מן הטופולוגיה של הגרף, ללא מיסוך הידע בהעברתו לצורה מטריציונית כפי שנעשה עד כה. באופן זה מקבל כל אלמנט במשוואת המשתנים המעורבים משמעות

טופולוגית ישירה לפי הגרף, ולכל שורה במשוואה המטריציאית ניתנת פרשנות מיידית כמשוואת חתך או כמשוואת מעגל.

משמעות ישירה זו מאפשרת לראות ולהבין את פעולתו של כל אחד ואחד מאלמנטי המבנה דרך מקומו במשוואת המשתנים המעורבים, בנוסף לתובנה המתבררת מן הגרף עצמו בהקשר זה! זוהי יכולת שלא קיימת בטופולוגיה האלגברית, שם, בתהליכי בניית המטריצות והכפלותיהם מיטשטשת הטופולוגיה המקורית של המבנה, ולא ניתן להבין את המבנה ישירות מן המשוואות הסופיות, ולא לבנות את המשוואות הסופיות ישירות מן המבנה. עוד כשייצג מבנים דרך מעגלים חשמליים, טרם קיומו של ייצוג מוכלל יותר, עמד Gabriel Kron (1963) על חשיבות עניין זה, ועל עדיפותו הגדולה של ייצוג טופולוגי של המבנה על פני ייצוג טופולוגי של הקשרים המטריציאיים שבו, וכך הוא כותב:

"The author remembers how frustrated he always felt, when he had to analyse ... by merely writing down a series of equations, ... He never knew for sure whether some equation or some term was missing, or misplaced, or just incorrect. There was no 'structure' available to tie together the conglomeration of symbols into a single unity. As soon as he began to use electric-circuit models for the formulation, as well as for the writing down of equations, the whole problem came to life and the equations became visual. The matrices no longer tended to fall apart, but had acquired a backbone." (*Kron, 1963. p.2*)

את האופן בו נוסחו שתי המשוואות לדוגמה ניתן להכליל לכדי אלגוריתם לניסוח משוואת המשתנים המעורבים ישירות מן הטופולוגיה, כדלהלן.

4.4.3 אלגוריתם 2: רישום טופולוגי ישיר של משוואת המשתנים המעורבים

האלגוריתם כולל מילוי שיטתי של האלמנטים במשוואת המשתנים המעורבים לפי טבלה 4.1.

$i, j \in C^F$ ^[א] ההתנגדות $\pm 1 = [i, j]$ במעגל i . למעשה, זו ההתנגדות בענף R_i , הטורי לקישור PS_i . 1	$i \in C^F, j \in T^d$ $\pm 1 = [i, j]$ אם ענף j כלול במעגל i , וכיוונו מתאים/מנוגד לכיוון המעגל. אחרת - 0. אם ה.פ. i - ב- i תלוי בה.פ. של j , יש להוסיף H_{ij}^A . 3	$i \in C^F$ וקטור הזרימות הבלתי ידועות של קישורי G^F . 5	$i \in C^F, j \in A^d$ $\pm 1 = [i, j]$ אם מקור ה.פ. j כלול במעגל i , וכיוונו מנוגד/מתאים לכיוון המעגל. אחרת - 0. 7	$i \in C^F, j \in P^F$ $0 = [i, j]$. 9	$i \in A^d$ וקטור מקורות ה.פ. הידועים. 11
$i \in T^d, j \in C^F$ $\pm 1 = [i, j]$ אם קישור j כלול בחתך i , וכיוונו מתאים/מנוגד לכיוון החתך. אחרת - 0. אם זרימת i תלויה בזרימת j , יש להוסיף H_{ij}^F . 2	$i, j \in T^d$ $\pm 1 = [i, j]$ סכום מותאם סימן ^[ב] של מוליכות קשתות המסבך המשותפות לחתכים i ו- j . $\pm 1 = [i, j]$ סכום חיובי ^[ג] של מוליכות קשתות המסבך בחתך i . 4	$i \in T^d$ וקטור ה.פ. הבלתי ידועים של הענפים ב- G^A . 6	$i \in T^d, j \in A^d$ $\pm 1 = [i, j]$ מיוס הסכום מותאם סימן ^[ב] של מוליכות קשתות המסבך המשותפות לחתכים i ו- j . 8	$i \in T^d, j \in P^F$ $\pm 1 = [i, j]$ אם מקור זרימה j כלול בחתך i , וכיוונו מנוגד/מתאים לכיוון החתך. אחרת - 0. 10	$i \in P^F$ וקטור מקורות הזרימה הידועים. 12

טבלה 4.1: הפרשנות הטופולוגית של משוואת המשתנים המעורבים^[א]

[א] הטבלה מיוחסת למשוואת המשתנים המעורבים המצומצמת (4.39). פרשנות טופולוגית למשוואה הכללית מופיעה ב- (Shai and Rubin, 2002).

[ב] בטבלה זו, בניגוד לסימונים המוסכמים בעבודה כולה, מציינים האינדקסים i ו- j , בהתאמה, מס' שורה ומס' עמודה במטריצה הקשורה לכל משבצת בטבלה, ובמקביל - את המספרים הסידוריים של הקשתות בקבוצות הקשורות לכל משבצת.

[ג] סימן מותאם של ערך בקשת המשותפת לשני מעגלים/חתכים הוא חיובי אם הקשת מתייחסת לשני המעגלים/חתכים באותו כיוון טופולוגי, אחרת הוא שלילי.

[ד] בסכום חיובי כל הערכים נלקחים בסימנים המקורי, גם אם הם מיוחסים לקשת שכיוונה הפוך לכיוון החתך/מעגל.

האלגוריתם יודגם כאן על המבנה, והגרף המתאים לו, שבאיור 4.14, כהמשך ישיר ליישום אלגוריתם 1. בטבלאות 4.2 ו- 4.3 מיושמים על הגרף אגף שמאל ואגף ימין של טבלה 4.1 בהתאמה. העתקת הערכים, המופקים לפי האלגוריתם, לתוך התבנית של משוואת המשתנים המעורבים שבטבלה 4.1, מניבה את המשוואה הבאה:

$$(4.72) \quad \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{R}_1^R & \circ & \mathbf{H}_1^A - \mathbf{I} & \circ \\ \circ & \mathbf{R}_2^R & \mathbf{I} & \mathbf{H}_2^A - \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{H}_1^F + \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \circ & \circ \\ \circ & \mathbf{H}_2^F + \mathbf{I} & \circ & \mathbf{K}_3^R \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_1^{PS} \\ \mathbf{F}_2^{PS} \\ \Delta_1^{FS} \\ \Delta_2^{FS} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & -\mathbf{I} & \circ \\ -\mathbf{K}_3^R & \circ & -\mathbf{I} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta_d \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_c \end{array} \right]$$

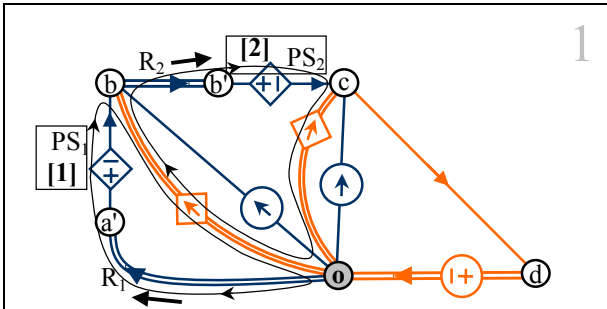
לאחר הצבת מטריצות הקשר לפי (3.48) ולפי טבלה 3.3, ועם הנתונים הבאים:

$$(4.73) \quad L_1 = L_2 = L_3 = 3 \text{ m} \quad ; \quad A_1 = A_2 = 5e - 3 \text{ m}^2 \quad ; \quad E_1 = E_2 = 200e6 \text{ kPa}$$

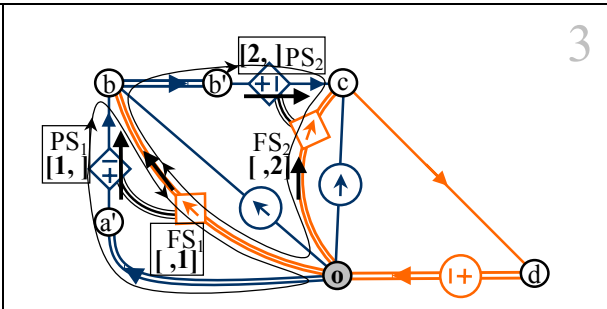
$$I_1 = I_2 = 5e - 6 \text{ m}^4 \quad ; \quad A_3 = 2e - 3 \text{ m}^2 \quad ; \quad E_3 = 70e6 \text{ kPa}$$

$$(4.74) \quad \Delta_d = 0 \quad ; \quad \mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} \circ \\ P_{by} \\ M_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5 \text{ kN} \\ -1.0313 \text{ kNm} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \circ \\ P_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5 \text{ kN} \\ 1.0313 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$

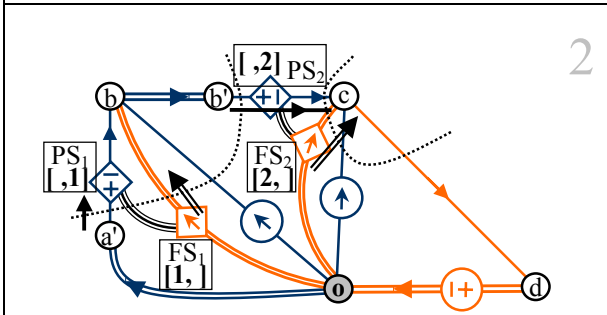
תהיה משוואת המשתנים המעורבים (4.72) כך:



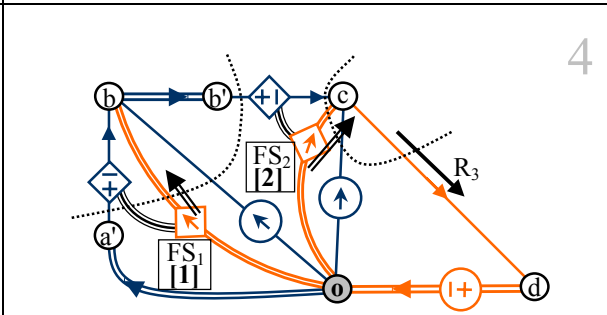
1 רכיבי האלכסון הם ההתנגדויות של הענפים R_1 ו- R_2 , השייכים, בהתאמה, למעגלי הקישורים PS_1 ו- PS_2 , המרכיבים את הקבוצה C^F .



3 [1,1] – ענף FS_1 כלול במעגל PS_1 , וכיוונו מנוגד למעגל, לפיכך נדרש $-I$. בגלל שה.פ. ב- PS_1 תלוי בה.פ. ב- FS_1 , יש להוסיף $H_1^A - I$: סה"כ: $H_1^A - I$.
 [1,2] – ענף FS_2 לא כלול במעגל PS_1 , וגם אין תלות בין ה.פ. בקשתות אלה, לכן הערך הוא 0.
 [2,1] – ענף FS_1 כלול במעגל PS_2 , וכיוונו ככיוון המעגל, לפיכך נדרש I , ואין להוסיף על כך, כי אין תלות ה.פ..
 [2,2] – ענף FS_2 כלול במעגל PS_2 , וכיוונו מנוגד למעגל, לפיכך נדרש $-I$. בגלל שה.פ. ב- PS_2 תלוי בה.פ. ב- FS_2 , יש להוסיף $H_2^A - I$: סה"כ: $H_2^A - I$.

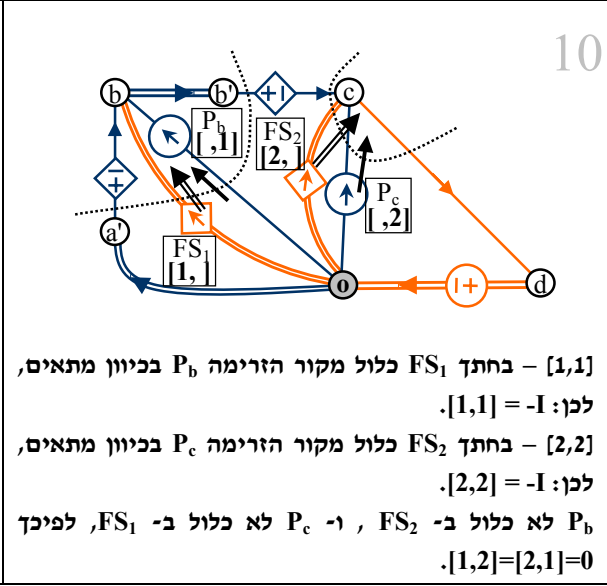
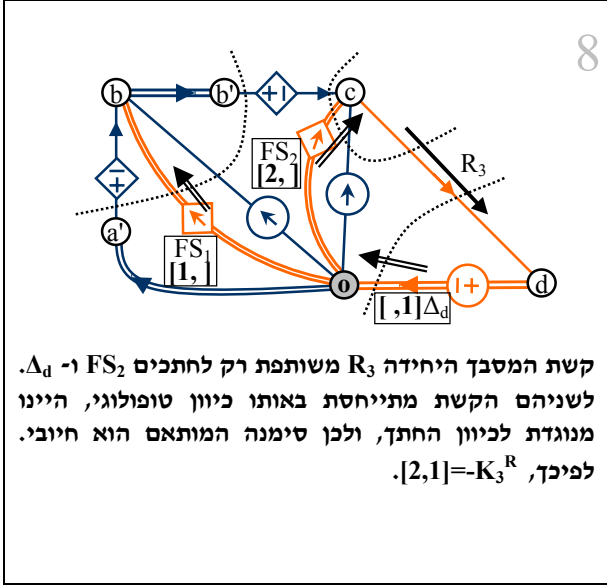
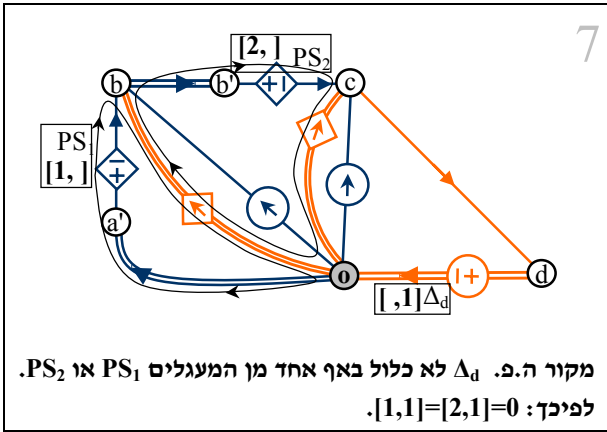


2 [1,1] – קישור PS_1 כלול בחתך FS_1 , וכיוונו ככיוון החתך, לפיכך נדרש I . בגלל שהזרימה ב- FS_1 תלויה בזרימה ב- PS_1 , יש להוסיף $H_1^F + I$: סה"כ: $H_1^F + I$.
 [1,2] – קישור PS_2 כלול בחתך FS_1 , וכיוונו מנוגד לכיוון החתך, לפיכך נדרש $-I$, ואין להוסיף על כך, כי אין תלות בזרימה.
 [2,1] – קישור PS_1 לא כלול בחתך FS_2 , וגם אין תלות בין הזרימות בקשתות אלה, לכן הערך הוא 0.
 [2,2] – קישור PS_2 כלול בחתך FS_2 , וכיוונו ככיוון החתך, לפיכך נדרש I . בגלל שהזרימה ב- FS_2 תלויה בזרימה ב- PS_2 , יש להוסיף $H_2^F + I$: סה"כ: $H_2^F + I$.



4 לחתכים FS_1 ו- FS_2 אין קשתות מסבך משותפות, לפיכך $[1,2]=[2,1]=0$.
 [1,1] – בחתך FS_1 אין קשתות מסבך, לכן $[1,1]=0$.
 [2,2] – החתך FS_2 מכיל קשת מסבך 3, לכן $[2,2]=K_3^R$.

טבלה 4.2: הדגמת יישום אלגוריתם הרישום הטופולוגי – אגף שמאל



טבלה 4.3: הדגמת יישום אלגוריתם הרישום הטופולוגי – אגף ימין

5. יישומים והרחבות של הייצוג הגרפי

בפרק זה ישמש הייצוג הגרפי הבסיסי ציר לפיתוחים נוספים בתורת המבנים ולקשרים עם ייצוגים אחרים. תחילה יוראה, באמצעות ניתוח מסבך, כי הייצוג שפותח בעבודה זו הוא הכללה של הייצוג הגרפי למסבכים שכבר דווח בספרות (חלק 5.1). לאחר מכן יוראה, ששיטות מיוחדות בתורת המבנים יכולות להתקבל ישירות מן הייצוג הגרפי, על סמך הידע המוטבע בייצוג, בדרכים המוכרות בתורת הגרפים. שתי שיטות שיודגמו הן קורה מצומדת (חלק 5.2) ועבודה מדומה (חלק 5.3). כנדבך נוסף של הייצוגים הקומבינטוריים יוצג בקצרה ייצוג מבנה על ידי מטראיד (חלק 5.4), על בסיס הייצוג הגרפי שפותח, כדי להדגים את חשיבות עליית הייצוג לרמה גבוהה יותר.

5.1. ייצוג מסבך ופתרונו על ידי גרף

5.1.1. צמצום הייצוג הגרפי המעורב

באין אלמנטי כפיפה במבנה, יהיו כל המוטות במבנה מיוצגים על ידי קשתות התנגדות בלבד. בחירת כיווני המוטות אינה מעכבת אז את בניית הייצוג הגרפי של המבנה, כי הנימוקים לבחירת הכיוונים התבססו על אופיו של הייצוג לאלמנטי כפיפה. זאת ועוד, מטריצת הקשר הכללית היחידה המיוחסת לקשת המייצגת את מוט המסבך היא מטריצת הקשיחות (3.49), שערכה אינו מותנה בכיוון הנבחר של מוט המסבך. באיור 5.1 מודגם ייצוג גרפי למסבך יתר-סטטי.

לפי אלגוריתם 1 לבניית הייצוג הגרפי (סעיף 4.4.1), יהיה העץ הפורש כולו שייך ל- G^d , ויכיל את מקורות ה.פ. המייצגים סמכים וכן קשתות התנגדות של מוטות המסבך, וגם הקישורים יהיו כולם שייכים ל- G^d , מלבד מקורות הזרימה המייצגים עומסים, השייכים ל- G^F .

5.1.2. צמצום משוואת המשתנים המעורבים לפתרון הגרף

כזכור, משוואת המשתנים המעורבים (4.25) מורכבת משני סוגי משוואות. שורות החלק העליון הן משוואות מעגלים המתאימות למעגלים המוגדרים על ידי קישורי G^F שזרימתם אינה ידועה, ושורות החלק התחתון הן משוואות חתכים המתאימות לחתכים המוגדרים על ידי ענפי G^d ש.פ. בהם אינו ידוע. כיוון שהגרף המייצג מסבך אינו מכיל קישורים ב- G^F שזרימתם אינה ידועה, לא יהיו כלל משוואות מעגלים, וקבוצת הנעלמים תכלול רק את ה.פ. הבלתי ידועים בענפי G^d . משוואת המשתנים המעורבים (4.25) תצטמצם לפיכך לצורה הבאה:

$$(5.1) \quad \left(\bar{\mathbf{K}}_T^d + \bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{dA} \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^d \cdot \left(\bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{dA} \right)^T \right) \cdot \bar{\Delta}_T^d = \left(-\bar{\mathbf{Q}}_{TC}^{dA} \cdot \bar{\mathbf{K}}_C^d \cdot \left(\bar{\mathbf{Q}}_{AC}^{dA} \right)^T \right) \cdot \bar{\Delta}^d - \bar{\mathbf{Q}}_{TP}^{dF} \cdot \bar{\mathbf{F}}^P$$

ההפרדה לשתי קבוצות, E^F ו- E^d , מאבדת מחשיבותה, כי מלבד מקורות הזרימה הידועים, כל הקשתות שייכות ל- E^d . ניתן להשמיט, לפיכך את ציוני השייכות לקבוצות אלה במשוואה (5.1), ורק לשים לב

שהקבוצה C^d הופכת להיות C' , כי הקישורים ב- E^d לא כוללים את הקישורים שזרימתם ידועה, השייכים ל- E^F . מטריצת החתכים תקבל אז את חלוקתה הבסיסית לפי (1.28) כך:

$$(5.2) \quad \bar{Q} = \begin{matrix} A & T' & C' & P \\ \begin{matrix} \mathbf{I} & \circ & \bar{Q}_{AC'} & \bar{Q}_{AP} \\ \circ & \mathbf{I} & \bar{Q}_{T'C'} & \bar{Q}_{T'P} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} A & R & P \\ \begin{matrix} \mathbf{I} & \bar{Q}_{AR} & \bar{Q}_{AP} \\ \circ & \bar{Q}_{T'R} & \bar{Q}_{T'P} \end{matrix} \end{matrix}$$

אגף שמאל של (5.1) יקבל את הצורה הבאה:

$$(5.3) \quad (\bar{K}_{T'}^A + \bar{Q}_{T'C}^{AA} \cdot \bar{K}_C^A \cdot (\bar{Q}_{T'C}^{AA})^t) \cdot \bar{\Delta}_{T'} = [\mathbf{I} \quad \bar{Q}_{T'C}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{K}_{T'} & \circ \\ \circ & \bar{K}_{C'} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{I} \quad \bar{Q}_{T'C}] \cdot \bar{\Delta}_{T'} = (\bar{Q}_{T'C} \cdot \bar{K}_R^R \cdot \bar{Q}_{T'C}^t) \cdot \bar{\Delta}_{T'}$$

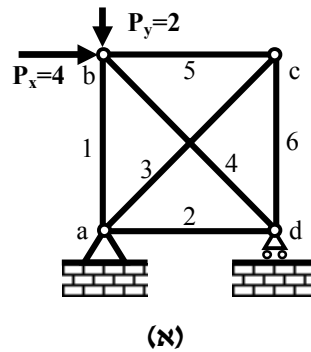
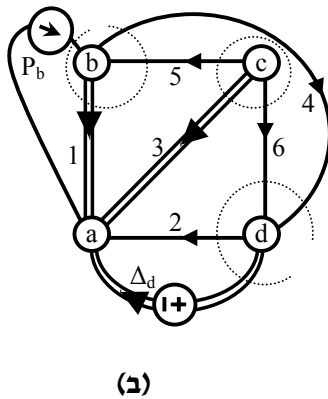
עיבוד דומה ייעשה גם לאגף הימני של (5.1), וזו אז תקבל את צורתה הסופית:

$$(5.4) \quad (\bar{Q}_{T'R} \cdot \bar{K}_R^R \cdot \bar{Q}_{T'R}^t) \cdot \bar{\Delta}_{T'} = -(\bar{Q}_{T'R} \cdot \bar{K}_R^R \cdot \bar{Q}_{AR}^t) \cdot \bar{\Delta}_A - \bar{Q}_{T'P} \cdot \bar{F}_P$$

המוכרת היטב כמשוואת שיטת החתכים (1.39). ניסוח זה לפתרון מסבך באמצעות גרף התנגדות פותח על ידי Shai (2001c), והוכח שם כשיטה הקומבינטורית המקבילה לשיטת ההזזות (הידועה גם כשיטת הקשיחות).

5.1.3 דוגמה לפתרון מסבך על ידי גרף התנגדות

נתון מסבך מועמס, כמוראה באיור 5.1.



איור 5.1: ייצוג מסבך על ידי גרף התנגדות

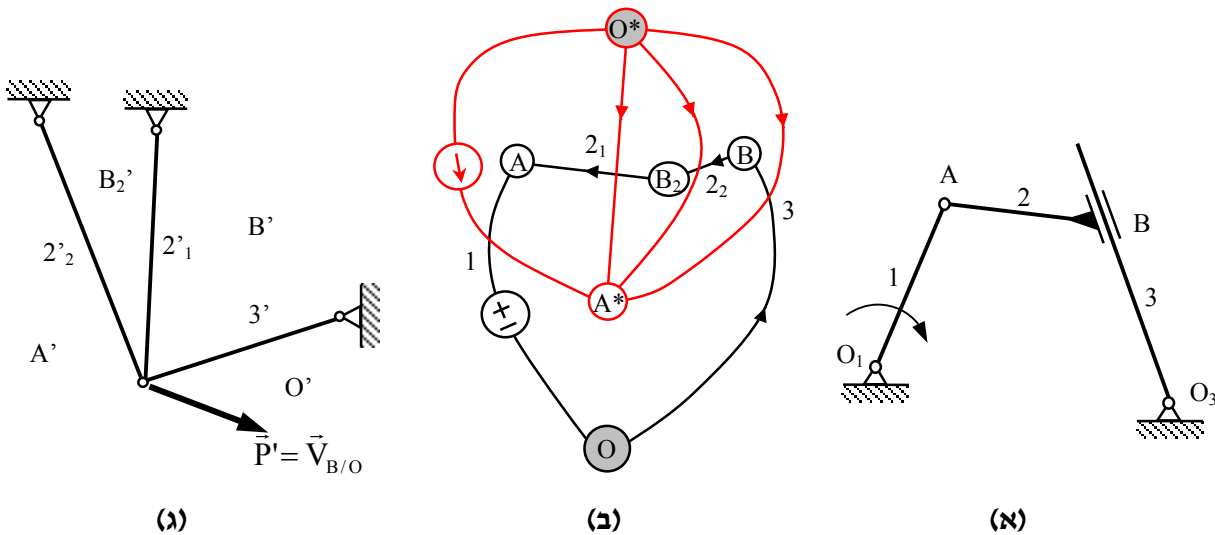
(א) מסבך יתר-סטטי. (ב) הגרף המייצג, עם העץ הפורש, ועם החתכים המתאימים לענפיו. כל קשתות הגרף, חוץ מן המקורות, הן קשתות התנגדות, שכיוונן יכול להיבחר שרירותית.

מטריצת החתכים הסקלארית לגרף שבאיור 5.1 תהיה:

5.2 קורה מצומדת (Conjugate Beam) כתוצר של גרף דואלי

5.2.1 דואליות בין מסבך למכניזם

באמצעות שימוש בקשר הדואלי בין גרפים, הנזכר בפרק המבוא (סעיף 1.3.10), הוכח בספרות קשר דואלי בין מסבכים מסוימים סטטית למכניזמים (Shai, 2001a). מכניזם הוא מנגנון, שקיבוע דרגת חופש אחת שלו יוצר מבנה מסוים סטטית. הזזתו, באמצעות אחת החוליות, החוליה המניעה, יוצרת יחסי מהירויות בין כל החוליות, שאותם ניתן לייצג על ידי גרף פוטנציאלים. בהקבלה, מסבך מסוים סטטית הוא מבנה, שהסרת אילוץ מאחת מדרגות החופש שלו יוצרת מכניזם. העמסתו, דרך אחד הצמתים, יוצרת יחסי כוחות בין כל המוטות, שאותם ניתן לייצג כגרף זרימות. הקבלה זו אינה רק איכותית כי אם כמותית, ובאמצעות הקשר הדואלי בין הייצוגים של שתי המערכות, ניתן לעבור ממכניזם למסבך מסוים סטטית, ולהפך, עם כל הפרמטרים הקשורים. דוגמה לדואליות כזו מוראית באיור 5.2.



איור 5.2: דואליות בין מסבך למכניזם

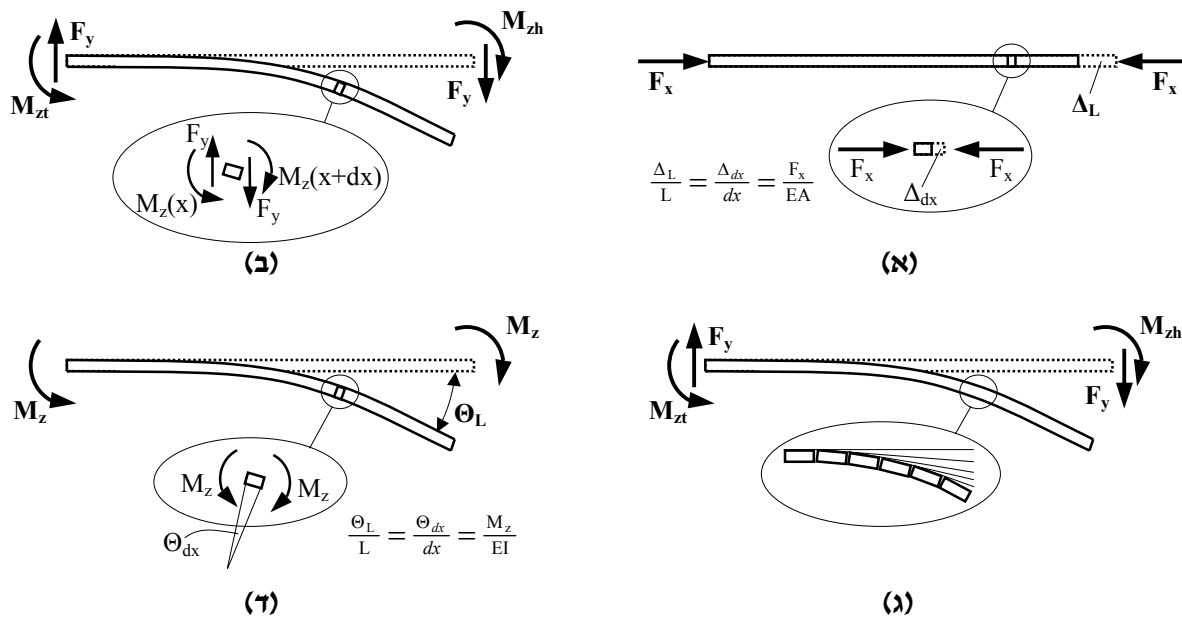
(א) מכניזם, עם חוליה 1 כחוליה מניעה. (ב) גרף פוטנציאלים המייצג את המהירויות במכניזם, וגרף הזרימות הדואלי שלו. (ג) הפרשנות הניתנת לגרף הזרימות הדואלי היא ייצוג של הכוחות במסבך, עם עומס חיצוני הדואלי להנעת חוליה 1. המסבך ג' הוא לפיכך המבנה הדואלי למכניזם א' (Shai, 2001a).

על סמך הדואליות הזו, פותחו דרכים חדשות לאנאליזה של מבנים ומכניזמים, באמצעות העברת שיטות בין שני התחומים. יתר על כן, שיטות ויישומים נפרדים לשני התחומים עברו מצד אל צד על גבי גשר הדואליות, וכך פותחו מנגנונים ומבנים מיוחדים, אלה על סמך אלה. אלגוריתמים לבדיקת דרגות חופש במכניזמים תורגמו אוטומטית לבדיקת יציבות של מבנים, ולהפך.

הדואליות הוכחה ככלי יעיל ביותר להרחבת הידע, וכאן יורחב השימוש בה גם לייצוגים של אלמנטים עם ייחודיות כשל אלמנטי כפיפה.

5.2.2. השוני בין אלמנט מסבך לאלמנט כפיפה בהחלת הדואליות

המאפיין הבולט של מוט מסבך, ביחס ליתר האלמנטים, הוא שהוא חד מימדי, וכן כל קטע אינפיניטסימלי שלו מתנהג כמו המוט כולו (איור 5.3א). מוט הנלחץ בקצותיו מורכב מאינספור קטעים אינפיניטסימליים הנלחצים כל אחד באותו הכוח שבו נלחץ המוט, ומתקצרים, יחסית לאורכם, באותו שיעור בו מתקצר המוט (מאפיין זה שייך גם למוט פיתול, אך עבודה זו מתמקדת במבנה מישורי). לא כן הוא הדבר באלמנטי כפיפה, כפי שהוסבר כבר בספרות וגם בעבודה זו, וכפי שיורחב כאן.



איור 5.3: מרכיב התנגדותי בהפרשי פוטנציאלים של אלמנטים

(א) באלמנט צירי, הפרש הפוטנציאלים הוא תוצאה של התנגדות טהורה. התנהגות תת-אלמנט היא כשל האלמנט כולו, הן מבחינת הכוחות, והן מבחינת שיעור התזוזות לפי האורך. (ב) באלמנט כפיפה, אם יש כוח גזירה, המומנטים משתנים לאורך האלמנט, ובכל תת-אלמנט הזרימה שונה וכך גם ה.פ. (ג) ה.פ. הניצב לכיוון האורך של האלמנט מורכב רק מהצטברות גיאומטרית של תזוזות, ללא קשר ישיר לכוחות. לפיכך אין בתזוזות הניצבות לאלמנט משום השפעה של התנגדות. (ד) השפעת המומנט על ה.פ. באותו מימד היא תוצאה של התנגדות טהורה. התנהגות כל תת-אלמנט היא כשל האלמנט כולו, הן מבחינת הכוחות, והן מבחינת שיעור התזוזות לפי האורך. גם אם יש באלמנט מומנט טהור, יהיו גם תזוזות ניצבות, שכן תזוזות אלה לא תלויות בכוחות באותו מימד, כאמור.

המומנטים בשני קצות אלמנט הכפיפה, לא זו בלבד ששונים זה מזה, הם אף שונים מן המומנטים הפועלים על כל אחד מן הקטעים האינפיניטסימליים המרכיבים את האלמנט (איור 5.3ב). גם התזוזות באלמנט אינן אחידות. למרות שכוח הגזירה אחיד לכל אורך האלמנט, תזוזות הצד, השקיעות, אינן אחידות, ומותנות גם במומנטים. למעשה, התזוזה הקווית הצידיית, השקיעה, עיקרה אינו מרכיב ההתנגדות בייצוג, אלא דווקא תוספת התזוזה, שמיוצגת על ידי מקור ה.פ. תלוי. כל השקיעה במרכיב ההתנגדות אינה אלא הצטברות של אותן אינסוף תוספות הנובעות משיפועי הקטעים האינפיניטסימליים (איור 5.3ג). הנה כי כן, בקורה הנפעלת למומנט טהור בקצותיה (איור 5.3ד), יהיה המומנט אחיד לכל אורך הקורה, וכל קטע אינפיניטסימלי בה, שגם הוא נפעל לאותו מומנט, יתכופף בשיעור זוויתי, יחסית לאורכו,

השווה לשיעור הכפיפה בקורה כולה, ולכן רק תוצא זה הוא מרכיב התנגדותי טהור. לעומתו, השקיעה בקורה היא הצטברות של אינסוף שקיעות התלויות בשיפוע בכל נקודה ונקודה, ולכן השקיעה היא מרכיב תוספתי בלבד, המיוצג נכונה רק על ידי טור של אינסוף מקורות ה.פ. תלויים בין שני צמתי הקצה של הקורה.

המורכבות היתרה של אלמנט הכפיפה לעומת פשטותו של מוט המסבך, היא זו שעמדה במרכז העבודה במהלך כל פיתוח הגרף המייצג, והיא גם זו שכעת מחייבת התייחסות מיוחדת בפיתוח הגרף הדואלי. במסגרת עבודה זו, כצעד מפתח, יוצג פיתוח הגרף הדואלי למקרה הבסיסי של אלמנט כפיפה – הקורה, אך תחילה, יש לשכלל את הייצוג הפרימאלי, על בסיס ההסבר שלעיל.

5.2.3. ייצוג קורה רציפה על ידי גרף

בהתאם להסבר עד כה, מטריצת ההתנגדות הכללית של אלמנט אינפיניטסימלי, \mathbf{R}_{dx}^R , תכיל רק את מרכיבי ההתנגדות הטהורים, הלא הם ההתנגדות ללחיצה, $\frac{dx}{EA}$, וההתנגדות לכפיפה, $\frac{dx}{EI}$. לפי הניסוח המקורי של מטריצת ההתנגדות (3.38):

$$(3.38) \quad \mathbf{R}_i^R = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} C_\alpha^2 + \frac{L^3}{3EI} S_\alpha^2 & & \text{sym.} \\ \left(\frac{L}{AE} - \frac{L^3}{3EI}\right) S_\alpha C_\alpha & \frac{L}{AE} S_\alpha^2 + \frac{L^3}{3EI} C_\alpha^2 & \\ \frac{L^2}{2EI} S_\alpha & -\frac{L^2}{2EI} C_\alpha & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}_i$$

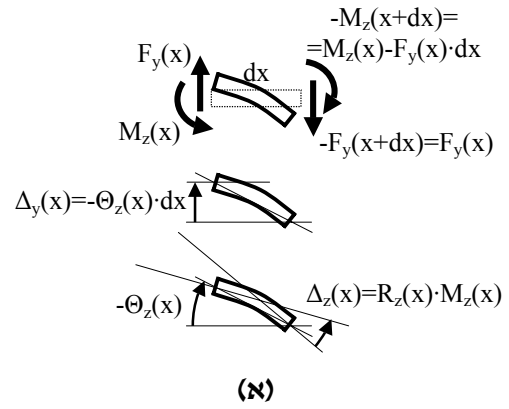
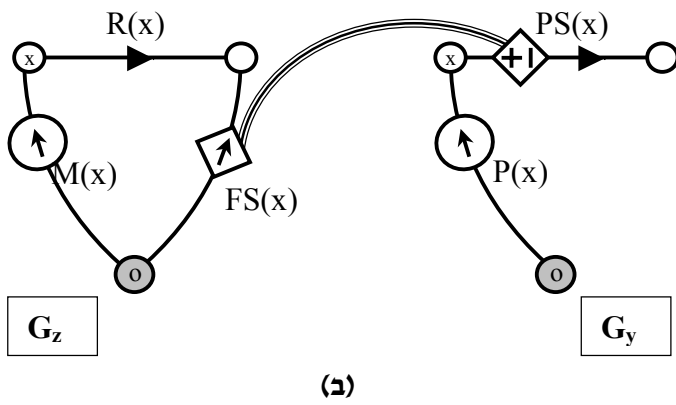
ואכן, בהצבת $L=dx$, ובהזנחת גדלים מסדר שני, כל אלמנטי המטריצה מתאפסים, מלבד שני מרכיבים אלו. לדוגמה, קטע אינפיניטסימלי של אלמנט אופקי, עם $\alpha=0$, יהיה בעל מטריצת ההתנגדות הכללית הבאה:

$$(5.9) \quad \mathbf{R}_{dx}^R = \begin{bmatrix} \frac{dx}{EA} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \frac{dx}{EI} \end{bmatrix}$$

בפרט, עבור קורה אופקית, שבה מוזנחות השפעות ציריות, ניתן יהיה לבטל את המימד הראשון בערכי המערכת, ומטריצת ההתנגדות (5.9) תהיה אז:

$$(5.10) \quad \mathbf{R}_{dx}^R = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \frac{dx}{EI} \end{bmatrix}$$

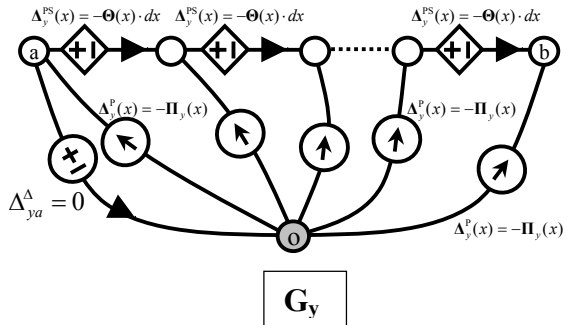
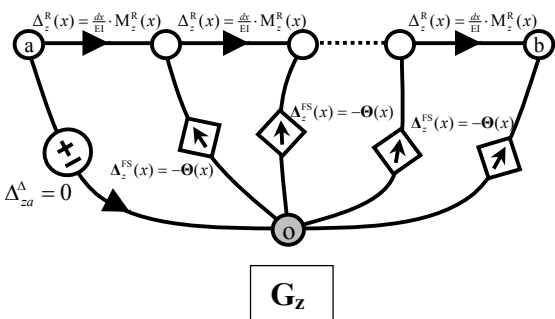
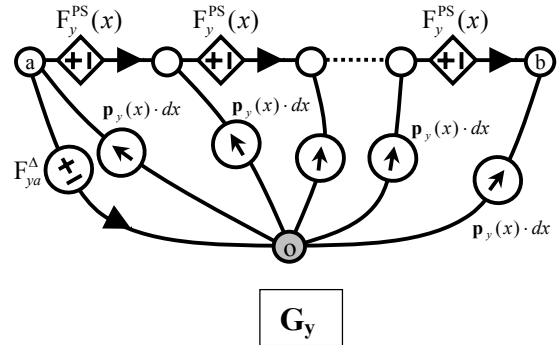
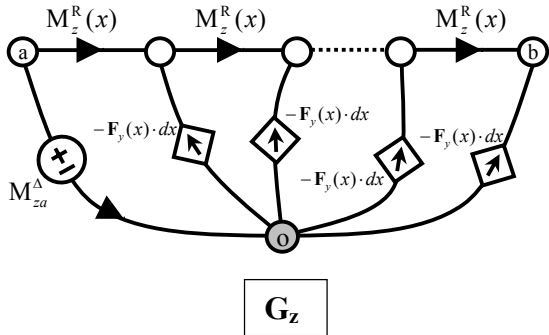
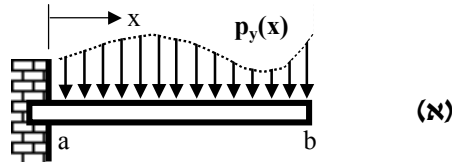
ולפיכך, כצפוי, התנגדות קיימת רק במימד הזוויתי – מימד המומנט. מנגד, מקור ה.פ. תלוי תורם רק למימדים האורכיים, ולא למימד המומנט. הייצוג הרציף של אלמנט קורה יהיה אז כמוראה באיור 5.4.



איור 5.4: ייצוג רציף של אלמנט מבנה אופקי

(א) כוחות והזזות באלמנט אינפיניטסימלי של קורה אופקית. (ב) ייצוג האלמנט על ידי גרף. הייצוג מבוסס על זה המקורי שפותח בפרק 3, אך כאן ניתן להפרידו בנקל לשני מימדיו, כיוון שאין התנגדות במימד y . לכל נקודה בקורה מתאים אלמנט אינפיניטסימלי כזה, שצומת הזנב שלו מיוחס למיקום האלמנט על ציר האורך x של הקורה.

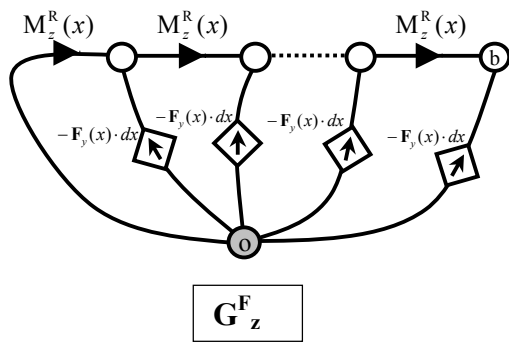
את הייצוג הרציף ניתן להחיל, לדוגמה, על הקורה המוראית באיור 5.5. כדי לא לסרב את הגרף, מיוצגים רק שלושה תת-אלמנטים בלבד, אך להלכה צריכים להופיע אינסוף כאלה בין שני צמתי הקצה.



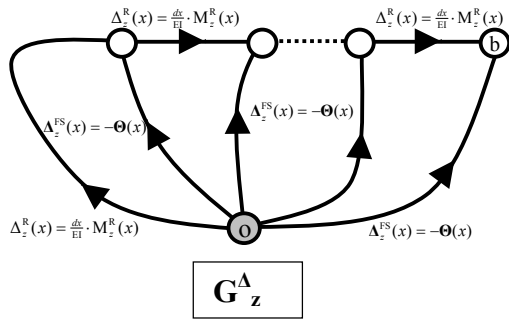
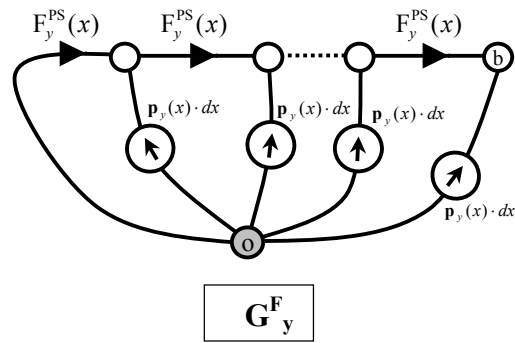
איור 5.5: גרף רציף של קורה מועמסת, מופרד לשני מימדין

(א) קורה רתומה, בעלת אלמנט יחיד, מועמסת בכוח אנכי מפורס לאורכה, כמוראה. (ב) גרף ההתנגדות הרציף, המייצג את הקורה שב-א', מחולק לשני מימדין. בכל קשת צוינו ערכי הזרימה, לפי הקשרים המתאימים. יודגש שוב, שכל הקשרים מתאימים אך ורק לייצוג רציף, עם אורך אינפניטסימלי של תת-אלמנטים. סימון התלות ההדדית בזוגות המקורות התלויים הושמט כדי לא לסרב את האיור, למרות שהתלות שרירה וקיימת, כפי שניתן ללמוד מניסוח הקשרים למקורות התלויים. (ג) ערכי ה.פ. בקשתות הגרפים.

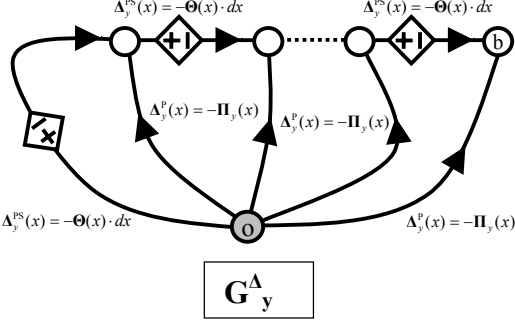
לפי כלל הכיווץ (סעיף 1.2.9), ניתן לאחד צמתים שה.פ. ביניהם הוא 0. לפיכך, ניתן לכווץ את מקורות ה.פ. המייצגים את הריתום, ואיתם את הקשתות המקבילות להם. נוסף על כך, אם הגרפים מופרדים לגרפי זרימות וגרפי פוטנציאלים, ניתן להשמיט חלק מן הסימונים, היינו, בגרף הזרימות ניתן להשמיט סימוני קשתות הקשורים לפוטנציאל, ובגרף הפוטנציאלים ניתן להשמיט סימוני קשתות הקשורים לזרימה. בפרט, קשתות ההתנגדות אינן עוד כאלה, כי אם קשתות זרימה בגרף הזרימות וקשתות ה.פ. בגרף הפוטנציאלים, שכן יש הפרדה מוחלטת בין משטר הזרימות למשטר הפוטנציאלים. כיוון שהגרפים מופרדים כך לצורך החלת דואליות בהמשך, הם יכוננו מעתה – 'הגרפים הפרימאליים של הקורה'. גרפי הזרימות והפוטנציאלים הפרימאליים, המופרדים והמכווצים מוראים באיור 5.6.



(א)



(א)

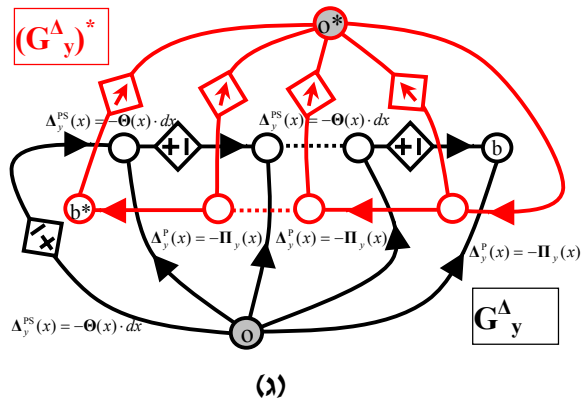
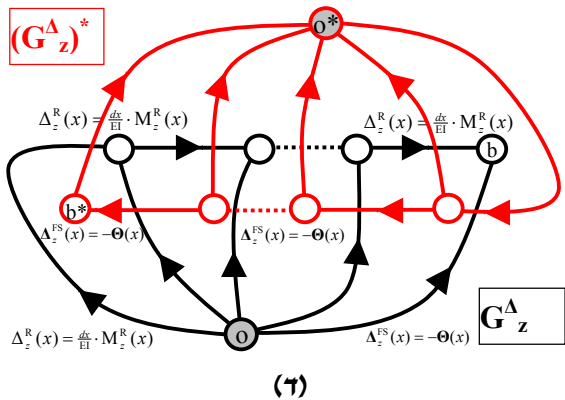
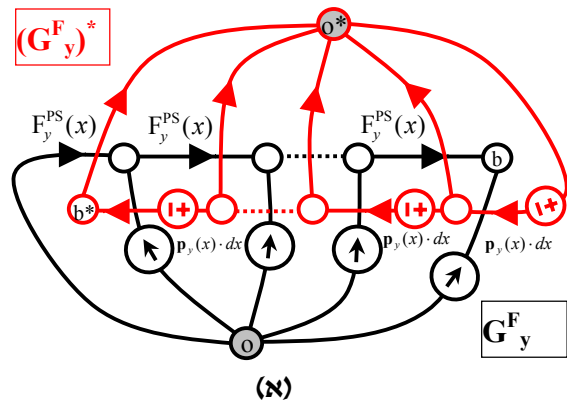
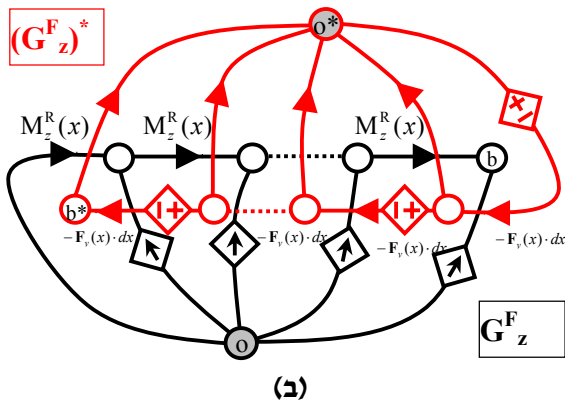


איור 5.6: גרף זרימות וגרף פוטנציאלים פרימאליים של קורה מועמסת, מופרדים למימדיהם

(א) גרף זרימות פרימאלי של הקורה הרתומה, לאחר כיווץ מקור ה.פ. 0, ואיחוד צומת a עם צומת הייחוס. סממני הפוטנציאלים – מקורות ה.פ. התלויים בגרף y - אינם שימושיים בגרף הזרימות, ולכן הוחלפו בקשתות רגילות. (ב) גרף ה.פ. פרימאלי לאחר הכיווץ. סממני הזרימה, כגון מקורות זרימה אינם שימושיים בגרף ה.פ., ולכן הוחלפו בקשתות רגילות. גם אין עוד צורך בהגדרת קשתות התנגדות, שכן נעשתה הפרדה מוחלטת בין משטר הזרימות למשטר הפוטנציאלים.

5.2.4 הגרף הדואלי של גרף הקורה

משעה שנבנו הגרפים הפרימאליים של הקורה בצורה המדויקת, ועם זאת, המצומצמת, ניתן לבנות גרף דואלי לקורה, ולתת לו פרשנות מתאימה, כפי שניתנה פרשנות מתאימה לגרף הדואלי של מסבכים. כיוון שהטופולוגיה של כל ארבעת הגרפים הפרימאליים היא זהה, שהלא נתפרדו מאותו גרף מקורי, הרי שטופולוגיית כל הגרפים הדואליים – אף היא זהה. אך בכל גרף מן הארבעה יש ייחוד שונה לקשתותיו, וזאת יש לזכור, כי ייחודיות זו נשמרת גם בגרף הדואלי. וכך, מקורות זרימה פרימאליים הופכים להיות מקורות ה.פ. בגרף הדואלי, ומקורות ה.פ. פרימאליים – מקורות זרימה דואליים. קשתות רגילות נשארות כאלה גם בדואלי. הגרפים הדואליים מתוארים באיור 5.7. כיווני הקשתות נבחרו לפי כלל היד הימנית, אך, מבלי להפר את חוק הזרימות או הפוטנציאלים, יכולים היו להיבחר לפי יד שמאלית, ובלבד שתהיה עקביות בכך.



איור 5.7: הגרפים הדואליים של קורה מועמסת, מופרדים למימדיהם

(א) גרף פוטנציאליים דואלי לגרף הזרימות במימד y . מקורות זרימה הפכו למקורות ה.פ. הערכים המצויינים ליד כל זוג קשתות, פרימאלית ודואלית, הם ערך זרימה בקשת הפרימאלית, ההופך לערך ה.פ. בקשת הדואלית. (ב) גרף פוטנציאליים דואלי לגרף הזרימות במימד z . מקורות זרימה תלויים הפכו למקורות ה.פ. תלויים. (ג) גרף זרימות דואלי לגרף ה.פ. במימד y . מקורות ה.פ. תלויים הפכו למקורות זרימה תלויים. הערכים המצויינים ליד כל זוג קשתות, פרימאלית ודואלית, הם ערך ה.פ. בקשת הפרימאלית, ההופך לערך זרימה בקשת הדואלית. (ד) גרף זרימות דואלי לגרף ה.פ. במימד z .

5.2.5 הגרף הדואלי כייצוג של קורה דואלית

בניית הגרף הדואלי, כפי שתואר עד כה, היא תהליך טכני שיטתי. היכולת להביא את הגרף הדואלי לשימוש מעשי מותנית במתן פרשנות נכונה למה שהגרף הדואלי מייצג. כדי להצליח בכך יש לבחון את הקשר הלוגי בין הייצוג המקורי לבין הייצוג הדואלי. הטופולוגיה של הגרף הדואלי שהתקבל, למעט כיוונים, זהה לטופולוגיית הגרף הפרימאלי. יתר על כן, ההקבלה בין צמד הגרפים שבאיור 5.7 לבין צמד הגרפים שבאיור 5.7 מחזקת את הקשר בין הייצוג הדואלי שהתקבל לבין הייצוג המקורי, והקבלה זו מצטרפת לצימוד שתואר במהלך העבודה כולה, ומבטאת גם בייצוג הבסיסי עצמו, קרי, הצימוד בין התנהגות הפוטנציאליים בשני המימדים, לבין התנהגות הזרימות בשני המימדים.

כפי שניתן ללמוד מאיור 5.4, התנהגות הפוטנציאליים, מאופיינת בתלות הבאה, שהיא ניוון של (3.43):

$$(5.11) \quad \Delta_y(x) = \Pi_y(x) - \Pi_y(x + dx) = -\Theta(x) \cdot dx$$

ואילו התנהגות הזרימה מאופיינת בתלות הבאה, שהיא ניוון של (3.23):

$$(5.12) \quad M_z(x) - M_z(x + dx) = F_y(x) \cdot dx$$

לפי משוואה (5.11), וכפי שניתן ללמוד מאיור 5.6, הפוטנציאל במימד y , היינו שקיעת הקורה, הולך ומתגבר לאורך הקורה, לפי שיעור הפוטנציאל במימד z - השיפוע. הפוטנציאל במימד z , לעומת זאת, אינו מתגבר כי אם רק מצטבר בגלל שינויים חיצוניים בערכו (בדוגמה הנוכחית - בגלל יחסי התנגדות עם המומנט).

בהקבלה, לפי משוואה (5.12), וכפי שניתן ללמוד מאיור 5.6א, הזרימה במימד z , היינו המומנט, הולכת ומתגברת לאורך הקורה, לפי שיעור הזרימה במימד y - כוח הגזירה. הזרימה במימד y , לעומת זאת, אינה מתגברת כי אם רק מצטברת בגלל שינויים חיצוניים בערכה (כוח חיצוני, בדוגמה הנוכחית).

הנה כי כן, הפוטנציאל במימד y והזרימה במימד z , מתנהגים זה כמו זה, ומנגד, הפוטנציאל במימד z והזרימה במימד y מתנהגים אף הם באופן זהה. לשון אחרת - השקיעה מתנהגת כמומנט, והשיפוע הזוויתי מתנהג ככוח גזירה:

$$\begin{aligned} (\Delta_y)^* &\rightarrow M_z \\ (\Delta_z)^* &\rightarrow F_y \end{aligned}$$

מכל האמור לעיל ניתן להיווכח, כי הגרף הדואלי של ייצוג הקורה הוא בעצמו ייצוג של קורה. ערכי הזרימות בקורה הפרימאלית, המקיימים את חוק הזרימות, הופכים בגרף הדואלי לערכי ה.פ. המקיימים את חוק הפוטנציאלים לפי אותם יחסים פנימיים שמאפיינים התנהגות של פוטנציאלים בקורה, כשזרימת כוח הגזירה הופכת לה.פ. זוויתיים, וזרימת המומנט הופכת לה.פ. של שקיעה. באותו אופן, ערכי ה.פ. בקורה הפרימאלית, המקיימים את חוק הפוטנציאלים, הופכים בגרף הדואלי לערכי זרימה, המקיימים את חוק הזרימות לפי אותם יחסים פנימיים שמאפיינים זרימה בקורה, כשה.פ. של שקיעה הופכים לזרימת מומנט וה.פ. זוויתיים הופכים לזרימת כוח גזירה.

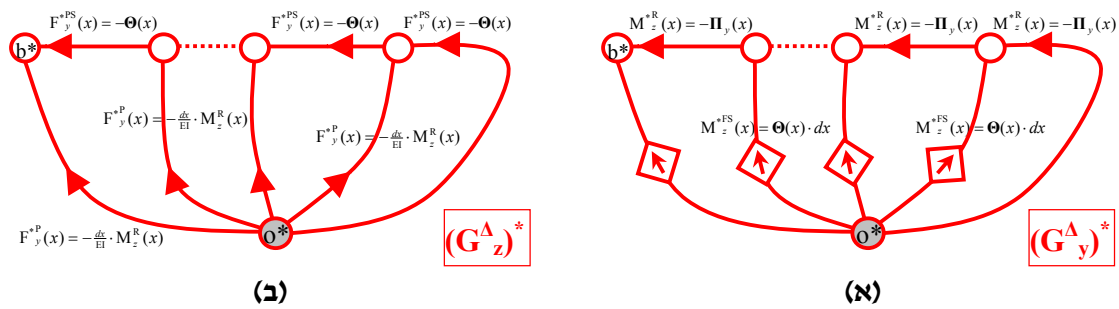
חשוב לציין כי כל הדברים נאמרים עוד קודם השתוות סימני הערכים או כיווני הקשתות, שהרי ממבט חטוף בגרפים הדואליים באיור 5.8 נראה שכיווני הקשתות אינם מתאימים לאלה שבייצוג הפרימאלי, וגם לפי משוואות (5.11) ו-(5.12) נראה שסימני התלות אינם זהים. זאת, כי הגרף הדואלי לא מייצג בהכרח את הקורה המקורית, ולכן היפוכי כיוון וסימן בהחלט ייתכנו, כפי שיובהר בהמשך.

5.2.6. ההזות בקורה המקורית ככוחות בקורה דואלית

שימוש מעשי מיידי לדואליות הוא האפשרות לפתור ה.פ. בקורה כאילו היו זרימות, על ידי ניתוח גרף הזרימות הדואלי של גרף הפוטנציאלים הפרימאלי. בידוע הוא, שאת הכוחות והמומנטים בקורה מסוימת סטטית ניתן לדעת על ידי ניתוח גרף זרימות בלבד. לעומת זאת, כדי לדעת את ההזות לפי הגרפים המקוריים, יש צורך להשתמש בכל התכונות המאפיינות אותם כגרפי התנגדות. זה כולל את קשר ההתנגדות וכן את ההתייחסות למקורות ה.פ. (התלויים והידועים). כמוכן, שניתוח גרף זרימות פשוט בהרבה מניתוח גרף התנגדות.

באיור 5.8 סודרו הגרפים הדואליים לגרפי הפוטנציאל הפרימאליים (איור 5.7ג,ד) בשני המימדים. הגרפים הופכו עם צומת הייחוס כלפי מטה, כדי להתאימם לאופן ההצגה הרגיל. אמנם ניתן היה לסובבם

ב- 180° , אך אז היה מתהפך גם כיוון ציר x . כמו כן שונו כיווניהן של מספר קשתות, תוך שינוי סימן ערכן כמובן, הכל כדי להתאימם לצורת גרפי הזרימה של קורה, כמו, למשל, אלה הפרימאליים.



איור 5.8: הגרפים הדואליים כגרפי זרימה של קורה דואלית

(א) הגרף הדואלי לה.פ. במימד y הופך להיות גרף לקורה דואלית של זרימות במימד z . (ב) הגרף הדואלי לה.פ. במימד z הופך להיות גרף זרימות במימד y של הקורה הדואלית.

באמצעות הגרפים הדואליים שבאיור 5.8 ניתן לחשב את ההזזות בקורה באמצעות חוק הזרימות בלבד. תחילה, מידיעת המומנט לאורך הקורה המקורית, ניתן לדעת את כל הזרימות התלויות בו בגרף הדואלי באיור 5.8. בנקל יימצאו גם יתר הזרימות באותו הגרף לפי חוק הזרימות. על ידי הזרימות האחרונות יחושבו הזרימות התלויות שבגרף הדואלי באיור 5.8, ולפי חוק הזרימות יחושבו גם יתר הזרימות בגרף. כזכור, החישוב הוא רציף, ויש צורך להשתמש בחשבון אינפיניטסימלי, אך משנעשה הדבר, נמצאות כל הזזות הקורה בכל מקום.

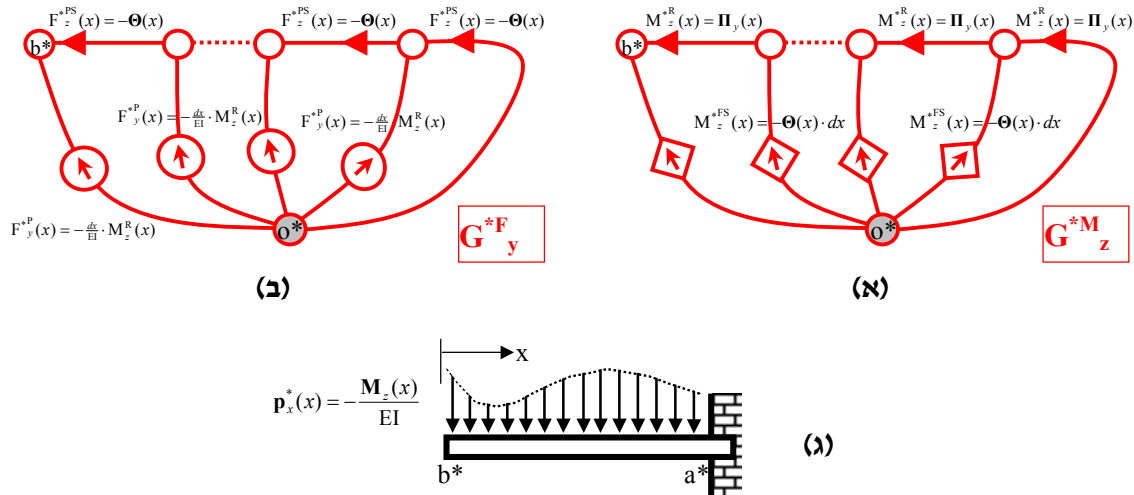
הגרפים הדואליים שהתקבלו לבסוף דומים להפליא לגרפים המצומצמים המקוריים כפי שהם מופיעים באיור 5.6. כדי להיווכח בכך, ייעשו עוד שני צעדים: הצעד האחד הוא בעניין הזרימה בקשתות היוצאות מצומת הייחוס בגרף הדואלי של מימד z (איור 5.8). קשתות אלה כבר איבדו את אפיון ההתנגדות שלהן במעבר לגרף הזרימות, אך הזרימה בהן עדיין תלויה במומנט $M_z(x)$, שאינו ערך בגרפי הזרימה הדואליים, ומובא לגרפים אלה חיצונית מגרפי הזרימה הפרימאליים המקוריים, או מגרפי ה.פ. הדואליים. לפיכך, ניתן להתייחס לזרימה זו כאל מקור זרימה חיצוני. עם השינוי הזה, המוראה באיור 5.9, תהיה טופולוגיית הגרף הדואלי $(G^Delta_z)^*$ (איור 5.8) בדיוק כזו של גרף המייצג את זרימת כוחות גזירה בקורה רתומה. אלא שבקורה זו, הריתום הוא בקצה המנוגד לזה של הריתום בקורה המקורית, והעומס בה נתון לפי:

$$(5.13) \quad \mathbf{p}_y^*(x) = -\frac{\mathbf{M}_z(x)}{EI}$$

כיוון שקורה חדשה זו היא הפירוש לייצוג הדואלי, תיקרא קורה זו - 'הקורה הדואלית'.

כפי שטופולוגיית הדואלי לגרף פוטנציאליים במימד z $(G^Delta_z)^*$ דומה לזו של גרף זרימה פרימאלי במימד y , G^F_y , כן טופולוגיית הדואלי לגרף פוטנציאליים במימד y , $(G^Delta_y)^*$ (איור 5.8), אף היא דומה לזו של גרף זרימה פרימאלי במימד z , G^M_z . ניתן לצפות, אם כך, שגרף זה ייצג את זרימת המומנטים בקורה הדואלית. אלא שקשר התלות בין הזרימות היוצאות מצומת הייחוס לבין הזרימות בקשתות התת-אלמנטים בגרף הדואלי $(G^Delta_z)^*$, המייצג את זרימת כוחות הגזירה, הפוך בסימנו לזה שצריך להיות, לפי

טבלה 3.2, לאלמנט קורה המכוון שמאלה. הצעד השני בא להשלים את קשר התלות בין הזרימות, ובו ייהפכו כל ערכי הזרימות בגרף הדואלי $(G^{\Delta}_y)^*$, מבלי לשנות את כיוון הקשתות, וכך, מבלי לפגום בחוק הזרימות, יהפוך גרף זה למייצג את זרימת המומנטים בקורה הדואלית, עם קשרי התלות בזרימת כוחות הגזירה המיוצגת על ידי הגרף הדואלי $(G^{\Delta}_z)^*$. הקורה הדואלית עם הגרפים הדואליים במתכונתם החדשה מוראים באיור 5.9.



איור 5.9: הגרפים הדואליים כגרפי זרימת כוחות ומומנטים של קורה דואלית

(א) הגרף הדואלי של ה.פ. במימד y הוא גרף זרימת המומנטים בקורה הדואלית. כדי שהתלות האופיינית בין מקורות הזרימה התלויים ב'גרף המומנטים', $(G^{\Delta}_y)^*$, לזרימה בקשתות התת-אלמנטים ב'גרף כוחות הגזירה', $(G^{\Delta}_z)^*$, תהיה התלות הנדרשת לפי הייצוג שפותח בעבודה זו, נהפכו כל ערכי הזרימה בגרף זה ללא שינוי כיווני הקשתות. פעולה זו שומרת על חוק הזרימות, וסימונו החדש של הגרף הוא לפיכך G^{*M}_z . (ב) הגרף הדואלי של מימד z מתאר את הזרימה במימד y בקורה הדואלית, כשהעומס מיוצג על ידי מקורות הזרימה האינפיניטסימליים, המובעים באמצעות המומנטים בקורה המקורית, והגרף המתקבל הוא גרף זרימת כוחות הגזירה, בצמצום מקור ה.פ. המייצג את הריתום, כפי שנעשה באיור 5.6. סימונו החדש של הגרף הוא לפיכך G^{*F}_y . (ג) הקורה הדואלית לקורה המקורית שבאיור 5.5א, לפי הגרפים הדואליים שאמורים לייצג אותה. העומס על הקורה הדואלית הוא עומס כוח אנכי בלבד המפולג לאורך הקורה, וערכו תלוי במומנט של הקורה המקורית לפי משוואה (5.13).

משהותקנו הגרפים הדואליים כך שייצגו זרימת כוחות ומומנטים בקורה דואלית, הרי שכבר אין צורך לבצע את תהליך הדואליות, כי אם לפתור את הקורה המקורית לכוחות על ידי גרף זרימות, להעמיס את הקורה הדואלית בעומס מפולג לפי (5.13), ולפתור גם אותה לכוחות על ידי גרף זרימות.

ניתן לקבוע, לפי האמור עד כה, את שני הכללים הבאים:

כלל 1 לקורה דואלית: השיפוע בנקודה בקורה המקורית שווה למינוס כוח הגזירה בנקודה המתאימה בקורה הדואלית, המועמסת בעומס אנכי מפולג לפי משוואה (5.13).

כלל 2 לקורה דואלית: ההזזה האנכית בנקודה בקורה המקורית שווה למומנט בנקודה המתאימה בקורה הדואלית, המועמסת בעומס אנכי מפולג לפי משוואה (5.13).

כזכור מפרק 2 (סעיף 2.3.3), הגדרות הכיוונים בדיאגרמות כוחות הגזירה והמומנטים שונה מהגדרות הכיוונים בעבודה זו. עם התאמת סימני הערכים, בשני הכללים שפותחו לעיל, לסימנים המסורתיים של דיאגרמות הכוחות והמומנטים, יהיה ניסוחם של הכללים זהה בדיוק נמרץ לשני המשפטים של שיטת הקורה המצומדת (conjugate beam), שפותחה על ידי Otto Mohr בשנת 1860.

שיטה זו היא לעזר רב בחישוב הזזות בקורות אופקיות מסוימות סטטית, אם כי הבסיס התיאורטי תקף גם בקורות יתר-סטטיות.

פיתוח שיטת הקורה המצומדת דרך הייצוג הגרפי באמצעים קומבינטוריים ידועים מראה שני דברים:

1. שיטות מיוחדות שפותחו בתורת המבנים למקרים מיוחדים, ולכאורה חורגים מהקו השיטתי הכללי, מתגלות באמצעות הייצוג הגרפי כמקרים פרטיים גרידא של שיטות מוכללות בתורת הגרפים.

2. על ידי העלאת הבעיה ההנדסית המכנית לרמה הקומבינטורית, ניתן להרחיב את שיטת הקורה המצומדת, כמו גם שיטות אחרות, ולהגדיל את מעטפת הביצועים של הכלים המוכרים. כך למשל ניתן לבנות גרף דואלי למבנים מורכבים יותר ולמצוא באופן שיטתי תובנות חדשות, ואף שיטות חדשות שטרם מוכרות בתורת המבנים.

5.3 שיטות אנרגיה כהיסק של משפט Tellegen

5.3.1 שיטת עבודה מדומה למציאת הזזה במבנה

על פי שיטת עבודה מדומה (Virtual Work) (Hibbeler, 1984), כדי לחשב הזזה קווית, Π , של נקודה כלשהי בכיוון מסוים, יש לחשב את הכוחות הציריים, f_x^P , ואת המומנטים הפנימיים, m_z^P , בכל המבנה כתוצאה מהעומסים המקוריים, וכן את הכוחות הציריים, f_x^{p1} , ואת המומנטים הפנימיים, m_z^{p1} , בכל המבנה כתוצאה מעומס כוח בודד בשיעור יחידה המופעל בנקודה בה נדרשת ההזזה, ובכיוון בו היא נדרשת, ואז ההזזה הנדרשת תחושב לפי:

$$(5.14) \quad \Pi \cdot 1 = \sum_i \left(\int_{L_i} \frac{m_z^{p1} \cdot m_z^P}{EI} dx + \int_{L_i} \frac{f_x^{p1} \cdot f_x^P}{EA} dx \right)$$

באותו אופן, כדי לחשב הזזה זוויתית בנקודה, יחושבו הכוחות הציריים, f_x^{m1} , והמומנטים הפנימיים, m_z^{m1} , כתוצאה ממומנט בשיעור יחידה המופעל בנקודה האמורה, בכיוון הנדרש, וההזזה הזוויתית תחושב לפי:

$$(5.15) \quad \Theta \cdot 1 = \sum_i \left(\int_{L_i} \frac{m_z^{m1} \cdot m_z^P}{EI} dx + \int_{L_i} \frac{f_x^{m1} \cdot f_x^P}{EA} dx \right)$$

בחלק זה של הפרק יוכח, ששיטת עבודה מדומה היא תוצאה ישירה של המשפט היסודי של Tellegen. בזאת יוכלל היישום של המשפט על ייצוג גרפי למבנה, לאחר שכבר יושם על ייצוג גרפי למסבך (Shai, 2001d). משפט Tellegen מופיע בפרק המבוא, וכאן יוזכר בקצרה: בהינתן שני גרפים איזומורפיים, האחד מקיים את חוק הזרימות, והאחר – את חוק הפוטנציאלים, הרי שסך המכפלות בכל הקשתות של זרימה בקשת הגרף האחד, בה.פ. בקשת המתאימה בגרף האחר, הוא 0:

$$(5.16) \quad \sum_{j=1}^{|G|} (\Delta_j^\Delta)^t \cdot \mathbf{F}_j^F = 0$$

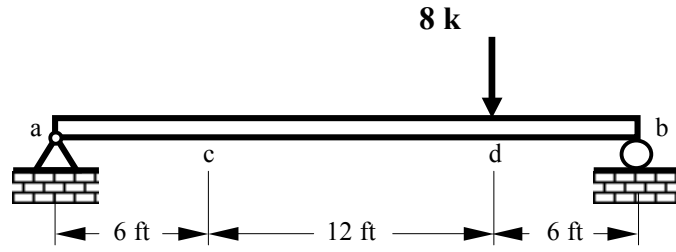
5.3.2. התאמת משפט Tellegen לגרף המייצג מבנה

במהלך העבודה, ובייחוד בפרק 2, הובהר כי פתרון כוחות במבנה מסוים סטטית נעשה בנקל על ידי גרף הזרימות המייצג את המבנה. לעומת זאת, לידעת התזוזות יש צורך בפתרון גרף ההתנגדות על כל מרכיביו, שכן ה.פ. המייצגים את התזוזות תלויים באופן ישיר גם בזרימות. במקום תלות זו, בין ה.פ. לזרימות באותו גרף התנגדות, ניתן לעשות שימוש במשפט Tellegen כדי לקשור בין ה.פ. בגרף ההתנגדות המקורי לבין זרימות בגרף אחר, איזומורפי למקורי אמנם, אך עם משטר זרימות פשוט הרבה יותר.

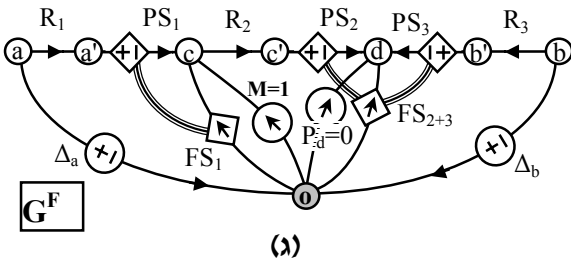
גרף ההתנגדות המקורי, שה.פ. בו הם עיקר העניין, יסומן G^Δ . גרף זה מייצג את המבנה, עם העומס המקורי הגורם לתזוזות הנעלמות. בפרט, אם נדרש לדעת תזוזה בנקודה מסוימת במבנה, אפילו בכיוון מוגדר, ניתן להוסיף, על הייצוג הקיים, קשת מיוחדת, היוצאת מצומת הייחוס ונכנסת אל הצומת המייצג את הנקודה שבה נדרשת התזוזה. כך, ההזזה המבוקשת מיוצגת על ידי ה.פ. בקשת הנוספת. יש רק להגדיר שהזרימה בקשת זו היא 0 , כדי לא לשבש את משטר הזרימות המקורי בגרף, ולהשפיע בכך על ה.פ., שתלויים, כזכור, בזרימות.

הגרף האחר יסומן G^F , כי בו נדרש לקיים רק את חוק הזרימות. הוא צריך להיות איזומורפי ל- G^Δ , והפשוט ביותר הוא לשכפל את הגרף המקורי, עם אותה קשת נוספת. אך את הטופולוגיה בלבד יש לשכפל, ולא את ערכי הקשתות, שכן חשוב גם לדאוג לכך שמשטר הזרימות יהיה פשוט. כמובן שחוק הזרימות יתקיים באורח הפשוט ביותר אם לא יהיו בגרף זה זרימות כלל, אך אז משפט Tellegen מתקיים בצורה טריוויאלית, ואינו מועיל. המשפט גם לא יועיל אם בקשת הנוספת לא תהיה זרימה, כי אז מכפלת ה.פ. בגרף המקורי עם האי-זרימה בקשת המתאימה בגרף הזרימות תהיה שווה 0 , וממילא לא יהיה ביטוי במשפט לה.פ. הנדרש. משטר הזרימות המינימלי הדרוש בגרף הזרימות, לפי כל האמור, הוא זרימה בקשת הנוספת, שתהווה למעשה מקור זרימה, ואיפוס כל יתר מקורות הזרימה, שייצגו את העומסים בגרף המקורי. הזרימה במקור החדש, שהוגדר על ידי הקשת הנוספת, מנורמלת לערך יחידה, כשרכיביה בכל המימדים יוצרים וקטור מקביל לכיוון התזוזה הנדרשת, וכך, מכפלת הזרימה בה.פ. בקשת הנוספת בגרף המקורי תיתן ביטוי ישיר לתזוזה הנדרשת.

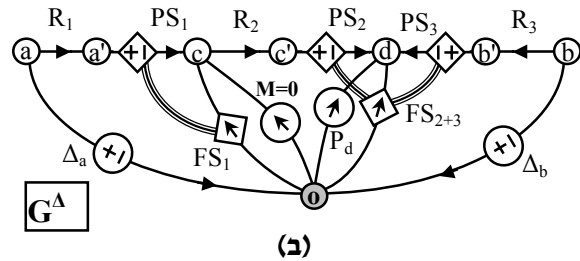
לצורך ההדגמה, הקורה ששימשה לדוגמה א' בפרק 4 (חלק 4.2), ונפתרה שם באמצעות שיטת המשתנים המעורבים, תיפתר כאן שוב, הפעם באמצעות משפט Tellegen. הבעיה, לקוחה, כזכור, מ- (Hibbeler, 1985), עמ' 247 (דוגמה 4-7). בקורה, המתוארת באיור 5.10א, נדרשת ההזזה הזוויתית בנקודה c. הגרפים האיזומורפיים של הקורה, G^Δ ו- G^F , שנבנו לפי ההסבר לעיל, מופיעים באיור 5.10ב ו-5.10ג, בהתאמה.



(א)



(ג)



(ב)

איור 5.10: מציאת תזוזה על ידי משפט Tellegen – שני גרפים איזומורפיים לקורה

(א) קורה מסוימת סטטית, עם עומס חיצוני. יש למצוא הזזה זוויתית ב- c. (ב) גרף ההתנגדות של הקורה האמיתית. קשת נוספת מחוברת מ- o ל- c, כדי למדוד את ההזזה הנדרשת, והיא סומנה כמקור זרימה במימד הזוויתי כדי שהגרף יהיה איזומורפי לזה שב-ג'. ערך הזרימה הזוויתית במקור זה הוא אפס, כדי לא לשנות את משטר הזרימות האמיתי בגרף, ולהשפיע בכך על ה-פ. המקוריים. גרף זה צריך לייצג בעיקר את ה-פ. האמיתי בקורה, ולשמור על חוק הפוטנציאלים, לכן יסומן G^A . (ג) גרף איזומורפי לגרף הקורה האמיתי שב- ב', אך באיפוס מקור הזרימה המקורי, ועם מקור זרימה בקשת הנוספת, בערך יחידה במימד הפוטנציאל הנדרש ב- c. את מקור הזרימה המאופס יש להשאיר בגרף, כדי לשמור על האיזומורפיות בין שני הגרפים. גרף זה צריך לקיים את חוק הזרימות לצורך החלת משפט Tellegen, ולכן יסומן G^F .

בהחלת משפט Tellegen, יש לסכם את מכפלות הזרימה בגרף G^F בה-פ. בגרף G^A בכל קשתות הגרף. הקשתות מחולקות לשלוש קבוצות ראשיות: מקורות ה-פ. ידועים המייצגים את הסמכים, מקורות זרימה ידועים המייצגים עומסים, והקשתות המייצגות את אלמנטי המבנה. משפט Tellegen, לפי חלוקה זו, ינוסח כך:

$$(5.17) \quad \sum_{j=1}^{|G|} (\Delta_j^A)^T \cdot F_j^F = \sum_A (\Delta_A^A)^T \cdot F_A^F + \sum_P (\Delta_P^A)^T \cdot F_P^F + \sum_I (\Delta_I^A)^T \cdot F_I^F = 0$$

לגבי הקשתות המייצגות סמכים, סמך מייצג אי-תזוזה, ולכן ה-פ. במקורות המייצגים סמכים הם:

$$(5.18) \quad \Delta_A^A = 0$$

יש סמכים שאינם מקבעים את כל דרגות החופש, כמו הסמך הנייד בצומת b, או אפילו הסמך הנייח בצומת a, בדוגמה לעיל. אז ה-פ. במימדי הסמך החופשיים אינם 0, אך לעומת זאת הזרימה במימדים אלה, מצומת הסמך לצומת הייחוס, היא 0. הרי זה כמו צומת חופשי שאינו מיוחס כלל לצומת הייחוס, ובין השניים יש נתק. במימדים אלה, הזרימה בגרף G^F באותן קשתות תהיה 0. לפיכך, המכפלה המיוחסת לקשתות סמכים תהיה 0, בין אם בגלל המימדים המאולצים עם ה-פ. 0, ובין אם בגלל המימדים החופשיים, שם הזרימה היא 0.

$$(5.19) \quad \sum_A (\Delta_A^A)^T \cdot F_A^F = 0$$

לגבי מקורות הזרימה המייצגים עומסים, כיוון שכל מקור כזה זורם מצומת הייחוס לצומת הנפעלת לעומס, הרי שה.פ. במקור זרימה כזה הוא פוטנציאל צומת הייחוס, שהוא 0, פחות פוטנציאל צומת הפעלת העומס, ולפיכך:

$$(5.20) \quad \Delta_P^\Delta = -\Pi_P^\Delta$$

בנוסף לכך, מקור הזרימה היחיד הפעיל ב- G^F הוא מקור הזרימה שערכו יחידה, בעוד אלו המקוריים, המייצגים עומסים אמיתיים, מאופסים. לפיכך:

$$(5.21) \quad \sum_P (\Delta_P^\Delta)^Y \cdot F_P^F = -(\Pi_{P^1}^\Delta)^Y \cdot P^1$$

כש- P^1 הוא וקטור זרימה שבכל מימדיו הוא אפס, למעט מימד ההזזה הנדרשת, שבו הזרימה היא 1.

הצבת (5.19) ו- (5.21) ב- (5.17) תיתן:

$$(5.22) \quad (\Pi_{P^1}^\Delta)^Y \cdot P^1 = \sum_i (\Delta_i^\Delta)^Y \cdot F_i^F$$

האגף הימני של (5.22) הוא סיכום מכפלות הזרימה בה.פ. של קשתות האלמנטים. הייצוג של אלמנט מבנה מתחלק לשלושה סוגי קשתות – קשת התנגדות, קשת מקור ה.פ. תלוי וקשת מקור זרימה תלוי. לפי חלוקה זו יפורק כל איבר באגף הימני לשלושה איברים:

$$(5.23) \quad (\Delta_i^\Delta)^Y \cdot F_i^F = (\Delta_R^\Delta)^Y \cdot F_R^F + (\Delta_{PS}^\Delta)^Y \cdot F_{PS}^F + (\Delta_{FS}^\Delta)^Y \cdot F_{FS}^F$$

הקשרים הפנימיים בגרף, ובכלל זה קשרי ההתנגדות של קשתות ההתנגדות וקשרי התלות בין המקורות התלויים, נשמרים תחת האיזומורפיות שתוארה, ולכן יישארו בסימונם המקורי, ללא תלות בגרף שבו הם משמשים. שימוש בקשרי התלות (3.43) ו- (3.44) יניב:

$$(5.24) \quad (\Delta_i^\Delta)^Y \cdot F_i^F = (\Delta_R^\Delta)^Y \cdot F_R^F + (\mathbf{H}^\Delta \cdot \Delta_{FS}^\Delta)^Y \cdot F_{PS}^F + (\Delta_{FS}^\Delta)^Y \cdot \mathbf{H}^F \cdot F_{PS}^F$$

ובעזרת הקשר (3.33) יתקבל:

$$(5.25) \quad (\Delta_i^\Delta)^Y \cdot F_i^F = (\Delta_R^\Delta)^Y \cdot F_R^F + (\Delta_{FS}^\Delta)^Y \cdot (\mathbf{H}^\Delta)^Y \cdot F_{PS}^F + (\Delta_{FS}^\Delta)^Y \cdot (-\mathbf{H}^\Delta)^Y \cdot F_{PS}^F$$

שני האיברים הימניים ביותר מקוזזים זה את זה, ולפיכך:

$$(5.26) \quad (\Delta_i^\Delta)^Y \cdot F_i^F = (\Delta_R^\Delta)^Y \cdot F_R^F$$

מכאן, שכל אלמנט תורם לסך המכפלות ב- (5.22) רק את המכפלה בקשת ההתנגדות של האלמנט.

יצויין כאן בהערת אגב, כי לפי המעבר מ- (5.25) ל- (5.26), סכום מכפלות הזרימה בה.פ. בשני המקורות התלויים בייצוג של אלמנט כפיפה הוא 0 תמיד. ניתן להיווכח בכך גם באופן ישיר, ללא קשר למשפט Tellegen. עובדה זו, יחד עם הקשר ההדדי בין המקורות התלויים המובע ב- (4.22), מוכיחים שהייצוג בעל שתי הקשתות של המקורות התלויים זהה לייצוג של שנאי חשמלי על ידי שתי קשתות. בעזרת זהות זו ניתן למצוא הקבלות איזומורפיות בין מערכות מכניות המבוססות על אלמנטי כפיפה לבין מערכות השנאה חשמליות, אך נושא זה הוא מעבר למסגרת העבודה, ולא יידון כאן עוד.

פיתוח הביטוי האחרון בעזרת קשר ההתנגדות (3.34) :

$$(5.27) \quad (\Delta_i^\Delta) \cdot \mathbf{F}_i^F = (\Delta_R^\Delta) \cdot \mathbf{F}_R^F = (\mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{F}_R^\Delta) \cdot \mathbf{F}_R^F = (\mathbf{F}_R^\Delta) \cdot (\mathbf{R}_R^R) \cdot \mathbf{F}_R^F = (\mathbf{F}_R^\Delta) \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{F}_R^F$$

המעבר האחרון מתבסס על סימטריית מטריצת ההתנגדות. הצבת (5.27) ב- (5.22) תיתן :

$$(5.28) \quad (\Pi_{p^1}^\Delta) \cdot \mathbf{P}^1 = \sum_R (\mathbf{F}_R^\Delta) \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{F}_R^F$$

המשוואה האחרונה מאפשרת לדעת את ההזזה הנדרשת באמצעות מכפלת ערכי הזרימות בקשתות ההתנגדות בשני הגרפים האיזומורפיים, דרך מטריצת ההתנגדות של כל אלמנט.

השימוש במשוואה 5.28 מפשט את פתרון הבעיה לדוגמה. לפי משוואה זו, יש לפתור את הגרף לזרימות בלבד, בשני משטרי זרימה – האחד לפי הזרימות המקוריות, והשני לפי זרימת יחידה במקור הנוסף. יש לזכור שבדרך לקבלת (5.28) נעשה שימוש בכל הקשרים המאפיינים את הייצוג הגרפי, גם לגבי גרף הזרימות, ולכן לא ניתן בשלב זה לבחור בו מעגל זרימה שרירותי, כי אם מעגל שיקיים את כל הקשרים של הייצוג המקורי. הדרך הישירה לעשות זאת היא להתייחס אליו בדיוק כאל הייצוג המקורי, ולפתור אותו באותן שיטות.

5.3.3 פתרון המבנה על ידי גרף זרימות

עד כה לא פותח בעבודה זו תהליך שיטתי לפתרון גרף זרימות של מבנה מסוים סטטית כללי, אך מכל הידע שהצטבר עד כה, תהליך כזה ייעשה כאן בפשטות. תחילה יש להתייחס לשתי הקשתות הטוריות R_i ו- PS_i בייצוג של כל אלמנט כפיפה כקשת אחת, כיוון שבגרף הזרימות אין משמעות ליחודיות של קשתות אלה, והזרימה בשתיהן היא זהה, כפי שגם מובע במשוואה (3.42). כיוון שהקשת המאוחדת היא בעיקרה קשת התנגדות, יישאר סימנה – R_i .

בשלב הבא, יש לבחור עץ פורש. אותם כללי בחירה ששימשו לבחירת עץ פורש בגרף מעורב (אלגוריתם 1 בסעיף 4.4.1), יחולו גם על גרף זרימות, אך ללא הצורך לחלק את ענפי העץ, ואת הקשתות בכלל, לשתי קבוצות שונות. ענפי העץ יכולו לפיכך את מקורות ה.פ. הידועים, ואת מקורות הזרימה התלויים. קשתות ההתנגדות של פרקי הכפיפה כבר אינם צריכים להופיע בעץ, כי לצורך ניתוח גרף הזרימות כל קשת כזו מאוחדת עם מקור ה.פ. התלוי הסמוך לה, ויוצרת איתו קישור אחד ארוך. על העץ גם להכיל, פחות ככל שניתן, קשתות התנגדות של מוטות מסבך.

פתרון הגרף לזרימות ייעשה בעיקר על ידי חוק הזרימות (1.13), אך לא ניתן להשתמש בחוק זה לבדו, בגלל קשר התלות (3.44) שבין הזרימה במקורות הזרימה התלויים לבין הזרימה בקשת אלמנטי הכפיפה. את חוק הזרימות (1.13) ניתן לנסח כך :

$$(5.29) \quad \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{F}} =_{FS} \begin{bmatrix} \Delta & FS & T'_R \\ \mathbf{I} & & \\ & \mathbf{I} & \\ & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_R & P \\ \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta C'}^R & \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta P} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{FS C'}^R & \bar{\mathbf{Q}}_{FS P} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{T' C'}^{RR} & \bar{\mathbf{Q}}_{T' P}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{\Delta} \\ \bar{\mathbf{F}}_{FS} \\ \bar{\mathbf{F}}_{T'}^R \\ \bar{\mathbf{F}}_{C'}^R \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} =_{FS} \begin{bmatrix} \Delta & FS & R & P \\ \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & & \\ & & \bar{\mathbf{Q}}_{FS R} & \bar{\mathbf{Q}}_{FS P} \\ & & \bar{\mathbf{Q}}_{T' R}^R & \bar{\mathbf{Q}}_{T' P}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{\Delta} \\ \bar{\mathbf{F}}_{FS} \\ \bar{\mathbf{F}}_R \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

יש להוסיף על כך את קשר התלות הכללי, על פי (3.44):

$$(5.30) \quad \bar{\mathbf{F}}_{FS} = \bar{\mathbf{H}}^F \cdot \bar{\mathbf{F}}_R$$

ואז (5.29) הופכת להיות:

$$(5.31) \quad \begin{bmatrix} \Delta & R & P \\ \mathbf{I} & \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta R} & \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta P} \\ FS & \bar{\mathbf{Q}}_{FS R} + \bar{\mathbf{H}}^F & \bar{\mathbf{Q}}_{FS P} \\ T'_R & \bar{\mathbf{Q}}_{T' R}^R & \bar{\mathbf{Q}}_{T' P}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{\Delta} \\ \bar{\mathbf{F}}_R \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

את שתי השורות התחתונות ב- (5.31) ניתן לאחד, תוך הרחבה של מטריצת התלות $\bar{\mathbf{H}}^F$ באופן מדומה, כך שתכלול בחלקה התחתון מטריצת אפסים, שהרי אין תלות ישירה בין הזרימות בקשתות ההתנגדות, ואז את (5.31) ניתן יהיה לנסח בקצרה כך:

$$(5.32) \quad \begin{bmatrix} \Delta & R & P \\ \mathbf{I} & \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta R} & \bar{\mathbf{Q}}_{\Delta P} \\ T'_R & \bar{\mathbf{Q}}_{T' R}^R + \bar{\mathbf{H}}^F & \bar{\mathbf{Q}}_{T' P}^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_{\Delta} \\ \bar{\mathbf{F}}_R \\ \bar{\mathbf{F}}_P \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

והשורה התחתונה של (5.32) היא משוואת החתכים המשמשת לפתרון גרף הזרימות:

$$(5.33) \quad (\bar{\mathbf{Q}}_{T' R}^R + \bar{\mathbf{H}}^F) \cdot \bar{\mathbf{F}}_R = -\bar{\mathbf{Q}}_{T' P}^R \cdot \bar{\mathbf{F}}_P$$

באמצעות משוואה זו, ניתן לקבל ישירות את כל הזרימות בקשתות ההתנגדות בגרף, המייצגות את הכוחות בכל האלמנטים במבנה. כפי שנעשה לגבי משוואת המשתנים המעורבים בפרק 4 (סעיף 4.4.3), כן ניתן לעשות כאן לגבי משוואה (5.33), ולתת לה משמעות טופולוגית, שבאמצעותה ניתן יהיה לרשום את המשוואה ישירות מן הגרף. המשוואה ברישומה הטופולוגי מוצגת בטבלה 5.1.

<p>1</p> <p>$:\{i \in T', j \in R\}$</p> <p>$\pm 1 = [i, j]$ אם קישור j כלול בחתך i, וכיוונו מתאים/מנוגד לכיוון החתך. אחרת – 0.</p> <p>אם זרימת i תלויה בזרימת j, יש להוסיף \mathbf{H}_{ij}^F.</p>	<p>2</p> <p>$: i \in R$</p> <p>וקטור הזרימות הבלתי ידועות בקשתות ההתנגדות.</p>	<p>3</p> <p>$: i \in T', j \in P$</p> <p>$\pm 1 = [i, j]$ אם מקור זרימה j כלול בחתך i, וכיוונו מנוגד/מתאים לכיוון החתך. אחרת – 0.</p>	<p>4</p> <p>$: i \in P$</p> <p>וקטור מקורות הזרימה הידועים.</p>
---	---	---	--

טבלה 5.1: רישום טופולוגי לחוק הזרימות למבנה מסוים סטטית^[א]

[א] הטבלה מיוחסת למשוואת החתכים (5.33).

[ב] בטבלה זו, כבטבלה 4.1, בניגוד לסימונים המוסכמים בעבודה כולה, מציינים האינדקסים i ו- j, בהתאמה, מס' שורה ומס' עמודה במטריצה הקשורה לכל משבצת בטבלה, ובמקביל – את המספרים הסידוריים של הקשתות בקבוצות הקשורות לכל משבצת.

5.3.4 החלת משפט Tellegen על הקורה לדוגמה

על פי השיטה לחישוב הזרימות בגרף, יחושבו הזרימות בשני הגרפים שבאיור 5.10. כיוון שהגרפים הם איזומורפיים, הרי שהטופולוגיה, ובחירת העץ הפורש הנגזרת ממנה, תהיה שווה בשניהם. מכאן, שגם מטריצות המקדמים במשוואת החתכים (5.33) יתקבלו באופן זהה לשני הגרפים. בטבלה 5.2 ערוך הרישום הטופולוגי של מטריצות המקדמים לגרף שבאיור 5.10, בהתבסס על טבלה 5.1, כשהעץ הפורש נבחר לפי המוסבר לעיל. יש לזכור, שמקורות ה.פ. התלויים נספחים לקשתות ההתנגדות הטוריות להן, ליצירת קישורים.

[1,1]=1 ולכן Δ_{az} ומתאים לכיוונו, ולכן $[1,1]=1$ הערך יופיע רק במימד המשותף, מימד z. הקישור R_1 כלול בחתך Δ_{az} ומתאים לכיוונו, ולכן $[1,1]=1$ הערך יופיע רק במימד המשותף, מימד z. הקישור R_1 כלול גם בחתך FS_1 ומתאים לכיוונו, ומשפיע על הזרימה בענף המגדיר אותו, ולכן $[2,1]=I+H_1^F$. באותו אופן, $[2,2]=-I$, $[3,2]=I+H_2^F$, $[3,3]=I+H_3^F$, $[3,2]=I+H_2^F$, $[2,2]=-I$. הקישור R_3 כלול בחתך Δ_{bz} ומתאים לכיוונו, ולכן $[4,3]=1$ הערך יופיע רק במימד המשותף, מימד z.

מקור זרימה [1,1] כלול בחתך [2,1] ומתאים לכיוונו, ולכן $[2,1]=-I$. מקור זרימה [2,2] כלול בחתך [3,2] ומתאים לכיוונו, ולכן $[3,2]=-I$. יתר השילובים אינם משותפים, ולכן כל יתר האלמנטים במטריצה הם 0.

טבלה 5.2: רישום טופולוגי של מטריצות המקדמים במשוואת החתכים לקורה

לפי טבלה 5.2, ועם מטריצות הקשר H_1^F לפי טבלה 3.2, תהיה משוואת החתכים (5.33) לגרף המשותף שבאיור 5.10 כך:

$$(5.34) \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ -6 & 1 & \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & -12 & 1 & 6 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ P_{dy} \\ M_{dz} \end{bmatrix}$$

הצבת נתוני הזרימות הידועות לגרפים שבאיורים 5.10א ו-5.10ב, בהתאמה, תניב את התוצאות הבאות:

$$(5.35) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ P_{dy} \\ M_{dz} \end{bmatrix}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix}^{\Delta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ P_{dy} \\ M_{dz} \end{bmatrix}^F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix}^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \\ 0 \\ \frac{1}{24} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{24} \\ 0 \end{bmatrix}$$

לפי טבלה 3.2 תהיה מטריצת ההתנגדות לפרקי המבנה :

$$(5.36) \quad \bar{\mathbf{R}}_R^R = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^R & & \\ & \mathbf{R}_2^R & \\ & & \mathbf{R}_3^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{72}{EI} & -\frac{18}{EI} & & & & \\ -\frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} & & & & \\ & & \frac{576}{EI} & -\frac{72}{EI} & & \\ & & -\frac{72}{EI} & \frac{12}{EI} & & \\ & & & & \frac{72}{EI} & \frac{18}{EI} \\ & & & & \frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} \end{bmatrix}$$

הצבת (5.35) ו-(5.36) בניסוח המתאים לפי משפט Tellegen, (5.28), יניב :

$$(5.37) \quad \begin{bmatrix} \Pi_{yc} \\ \Theta_{zc} \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \\ 0 \\ \frac{1}{24} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{24} \\ 0 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \frac{72}{EI} & -\frac{18}{EI} & & & & \\ -\frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} & & & & \\ & & \frac{576}{EI} & -\frac{72}{EI} & & \\ & & -\frac{72}{EI} & \frac{12}{EI} & & \\ & & & & \frac{72}{EI} & \frac{18}{EI} \\ & & & & \frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

והתוצאה המבוקשת :

$$(5.38) \quad \Theta_{zc} = -\frac{144}{EI}$$

כפי שהתקבלה גם לפי שיטת המשתנים המעורבים ב-(4.46).

5.3.5 החלת משפט Tellegen על גרף רציף

בחלק הקודם של הפרק פותח ייצוג רציף למבנה. ניתן להתאים את משפט Tellegen גם לייצוג רציף, כך שניתן יהיה להשתמש בו במקרים של עומס מפולג, וכיוצא בזה. כזכור, הניסוח האחרון שהתקבל למשפט זה הוא :

$$(5.28) \quad (\Pi_{p^i}^{\Delta})^t \cdot \mathbf{P}^1 = \sum_R (\mathbf{F}_R^{\Delta})^t \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{F}_R^F$$

לפי (3.6), הקשר בין הזרימה בקשת התנגדות של האלמנט לבין הכוח הפנימי בו הוא :

$$(5.39) \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{f}$$

לפי (5.39) יקבל האיבר הנסכם במשוואה (5.28) את הצורה הבאה :

$$(5.40) \quad (\mathbf{F}_R^\Delta)^t \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{F}_R^F = (\mathbf{T}^t \cdot \mathbf{f}^\Delta)^t \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{f}^F = (\mathbf{f}^\Delta)^t \cdot \mathbf{TR}_R^R \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{f}^F$$

אך לפי (3.38), הקשר בין מטריצת ההתנגדות הפנימית לבין זו החיצונית הוא :

$$(5.41) \quad \mathbf{R}_R = (\mathbf{T}^t)^{-1} \cdot \mathbf{R}_R^R \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{TR}_R^R \mathbf{T}^t$$

לפיכך, מ- (5.41) ו- (5.40), משוואה (5.28) תהיה כעת :

$$(5.42) \quad (\mathbf{\Pi}_{P^1}^\Delta)^t \cdot \mathbf{P}^1 = \sum_R (\mathbf{f}_R^\Delta)^t \cdot \mathbf{R}_R \cdot \mathbf{f}_R^F$$

בייצוג הרציף, הסכימה של כל אלמנט ב- (5.42) כוללת סכימה רציפה פנימית, לכל אורך האלמנט, של כל התת-אלמנטים האינפיניטסימליים. לפיכך, יש לחשב בכל נקודה ונקודה לאורך כל האלמנטים במבנה את שלושת הערכים המופיעים באיבר הנסכם באגף הימני של (5.42).

הכוחות הפנימיים \mathbf{f}^Δ ו- \mathbf{f}^F יהיו כעת תלויים במיקום לאורך ציר האורך הפנימי x של כל אלמנט. כמו כן, לפי (3.37), המטריצה \mathbf{R} הפנימית של אלמנט היא :

$$(5.43) \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

ובייצוג הרציף, אורך כל תת-אלמנט הוא $L=dx$. בהזנחת גדלים מסדר שני ומעלה תהיה מטריצת ההתנגדות הפנימית של אלמנט אינפיניטסימלי כזו :

$$(5.44) \quad \mathbf{R}_{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{EI} \end{bmatrix}$$

(5.42) לייצוג הרציף תקבל את הצורה הבאה :

$$(5.45) \quad (\mathbf{\Pi}_{P^1}^\Delta)^t \cdot \mathbf{P}^1 = \sum_i \left(\int_{L_i} (\mathbf{f}^\Delta(x))^t \cdot \mathbf{R}_{dx}(x) \cdot \mathbf{f}^F(x) \right)$$

ולאחר פירוק הוקטורים לרכיביהם, והכפלת האיברים בתוך האינטגרל :

$$(5.46) \quad (\mathbf{\Pi}_{P^1}^\Delta)^t \cdot \mathbf{P}^1 = \sum_i \left(\int_{L_i} \frac{\mathbf{f}_x^\Delta(x) \cdot \mathbf{f}_x^F(x)}{EA_i} dx + \int_{L_i} \frac{\mathbf{m}_z^\Delta(x) \cdot \mathbf{m}_z^F(x)}{EI_i} dx \right)$$

וזהו בדיוק הניסוח לפי שיטת עבודה מדומה (5.14) או (5.15).

5.4. הרחבה לייצוגים נוספים - ייצוג על ידי מטרואיד

תורת הגרפים, ששימשה בסיס לייצוג העיקרי שהוצג בעבודה זו, היא ענף של תורה כללית יותר הנקראת 'תורת המטרואידיים'. ייצוג המבנה באמצעות מטרואיד יכול להקנות זווית ראייה רחבה יותר, וחלק מן המחקר העתידי מוקדש לפיתוח נושא זה. יתר על כן, הייצוג המטרואידי של המבנה, מושג כאן על ידי הכללת הייצוג הגרפי, כפי שיעשה להלן, ומודגש בכך הקשר בין ייצוגים קומבינטוריים שונים, המהווה בסיס להכללת הגישה המוצגת בעבודה. כאן יוצג שימוש בייצוג המטרואידי, תוך הדגמה על אחד מן המבנים שכבר נותחו בעבודה זו, כדי שניתן יהיה להתרשם מיתרונותיו. לכך יוקדם רקע תיאורטי מצומצם, הנדרש להבנת הדוגמה המובאת כאן, אך ברור שהנושא עמוק ורחב מכדי שידון כולו בעבודה זו.

5.4.1 תורת המטרואידיים – רקע תיאורטי

הרקע המובא כאן בתמצות לקוח מ-(Shai, 2001c). להרחבה והעמקה ניתן להיעזר בכל ספר יסודי בתורת המטרואידיים, כגון Recski (1989).

מטרואיד – הגדרה: תהי S קבוצה סופית של אלמנטים, ויהי F אוסף קבוצות מתוך S , המקיים את שלושת התנאים הבאים:

$$1. \emptyset \in F$$

$$2. \text{ אם } X \in F, \text{ וכן } Y \subseteq X, \text{ אזי חייב להתקיים: } Y \in F$$

$$3. \text{ אם } X \in F \text{ וכן } Y \in F, \text{ וקיים } |X| > |Y|, \text{ אזי קיים אלמנט } x \in X - Y \text{ כך ש:}$$

$$Y \cup \{x\} \in F$$

אזי הזוג S ו- F מגדיר מטרואיד, המסומן: $M = \langle S, F \rangle$.

הקבוצה S נקראת 'הקבוצה היסודית של המטרואיד M '. הקבוצות השייכות לאוסף F מוגדרות 'קבוצות בלתי-תלויות', וכל קבוצה שאינה כלולה באוסף היא קבוצה תלויה.

לדוגמה, יוגדר מטרואיד $M_A = \langle S_A, F_A \rangle$ על ידי קבוצה סופית S המכילה את n עמודות המטריצה $A_{m \times n}$, ועל ידי האוסף F של כל קבוצות העמודות הבלתי-תלויות-ליניארית בתוך S . ניתן להיווכח שהאוסף F מקיים את שלושת התנאים לעיל.

בסיס של המטרואיד – הגדרה: קבוצה מכסימלית ב- F , היינו קבוצה בלתי-תלויה שאינה מוכלת ממש בקבוצה בלתי-תלויה אחרת, נקראת בסיס של המטרואיד. גודל כל הבסיסים במטרואיד זהה.

משלים הבסיס – הגדרה: לכל בסיס במטרואיד מוגדר 'משלים בסיס' שהוא המשלים של קבוצת הבסיס לקבוצה היסודית S . כמובן שלכל משלימי הבסיסים במטרואיד גודל זהה.

מעגל של המטרואיד – הגדרה: קבוצה תלויה מינימלית, היינו שאינה מכילה ממש קבוצה תלויה אחרת, נקראת מעגל של המטרואיד. אוסף המעגלים של המטרואיד מסומן C .

חתך של המטרואיד – הגדרה: הקבוצה $X \subseteq S$ נקראת חתך של המטרואיד M אם ורק אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. $X \neq \emptyset$.

2. $|X \cap Y| \neq 1$ לכל $Y \in C$.

3. X מינימלי ביחס לתכונות אלה.

מעגל יסודי של המטרואיד – הגדרה: כיוון שבסיס של המטרואיד הוא קבוצה מקסימלית של איברים בלתי תלויים, הרי שהוספת איבר נוסף לבסיס (מתוך משלים הבסיס, כמובן) תיצור קבוצה תלויה, המכילה מעגל של המטרואיד. מכאן, שכל איבר במשלים-בסיס מגדיר בדיוק מעגל אחד, המורכב מאיבר זה עצמו, ומאיברים נוספים שכולם שייכים לבסיס בלבד. מעגל כזה נקרא 'מעגל יסודי של המטרואיד'.

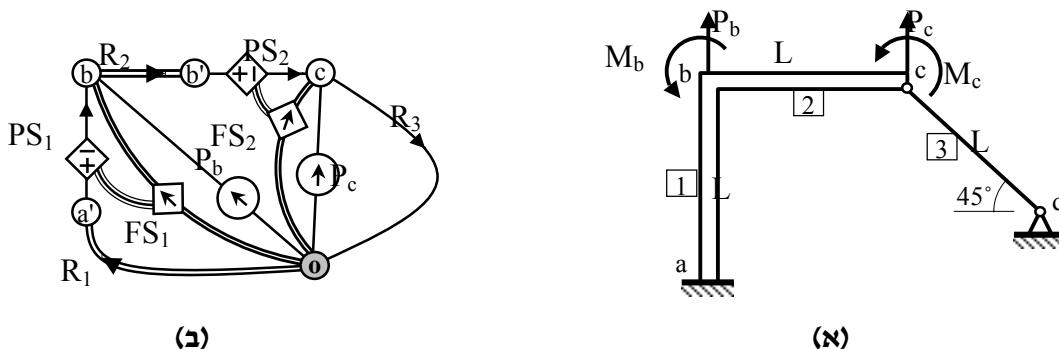
חתך יסודי של המטרואיד – הגדרה: בדומה למעגל היסודי, כל איבר בבסיס של המטרואיד מגדיר חתך יחיד, המורכב מאיבר זה עצמו, ומאיברים נוספים שכולם שייכים למשלים הבסיס בלבד. חתך כזה נקרא 'חתך יסודי של המטרואיד'.

במושגים של תורת הגרפים, בסיס של המטרואיד הוא העץ הפורש, ומשלימו הוא קבוצת הקישורים.

5.4.2. ייצוג מבנה על ידי מטרואיד

יישום תורת המטרואידים על מבנים נעשה בשלושים השנים האחרונות (Recski, 1989; Kaveh, 1982; Shai, 2001c; Lovász and Yemini, 1982). כאן יודגם השימוש בייצוג המטרואיד, כשנקודת המוצא לכך היא הייצוג על ידי גרף, שפותח בעבודה זו, בשונה מהדרך הרווחת לבנות את המטרואיד ישירות מן המבנה. האופן בו נבנה הייצוג המטרואיד, שהוא הרחבה לאופן דומה לבניית ייצוג מטרואיד למסבכים (Shai, 2001c), ממחיש את הכללת הגישה הקומבינטורית על בסיס קשרים קיימים בין ייצוגים שונים.

באיור 5.11 מוראים המבנה מאיור 4.14, עם הגרף המייצג שפותח שם.



איור 5.11: גרף מצומצם למבנה

(א) המבנה מאיור 4.14. (ב) הגרף המייצג את המבנה. כאן אין צורך בחלוקה לשני תת-גרפים כבאיור 4.14. שינוי נוסף כאן הוא צמצום כל מקורות ה.פ. הידועים, כמתחייב לפי צעד 4 באלגוריתם 1 שם (סעיף 4.3.1).

לפי חוק הזרימות, סך הזרימה בכל חתך של הגרף הוא 0, או, בניסוח המוכר:

$$(1.13) \quad \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$$

מטריצת החתכים הווקטורית לגרף שבאיור 5.11 תהיה :

$$(5.47) \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & FS_1 & R_2 & FS_2 & PS_1 & PS_2 & R_3 & P_b & P_c \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ FS_1 \\ R_2 \\ FS_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & & & 1 & -1 & \circ & 1 & \circ \\ & & 1 & & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ & & & 1 & \circ & 1 & -1 & \circ & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

אמנם וקטור הזרימות במשוואה (1.13) מכיל את זרימות כל הקשתות בגרף, אך באמצעות הקשרים (3.42) ו-(3.44) ניתן לצמצם את מספר משתני הזרימות. לדוגמה :

$$(5.48) \quad \mathbf{F}_1^{PS} = \mathbf{F}_1^R$$

$$(5.49) \quad \mathbf{F}_1^{FS} = \mathbf{H}_1^F \cdot \mathbf{F}_1^{PS} = \mathbf{H}_1^F \cdot \mathbf{F}_1^R$$

בצורה זו, יצומצם גודלו של וקטור הזרימות, ובהתאם, יאוחדו עמודות במטריצת החתכים. וכך :

$$(5.50) \quad \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 & P_b & P_c \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ FS_1 \\ R_2 \\ FS_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{I} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \mathbf{H}_1^F + \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \circ & \mathbf{I} & \circ \\ \circ & \mathbf{I} - \mathbf{I} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \mathbf{H}_2^F + \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \circ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^R \\ \mathbf{F}_2^R \\ \mathbf{F}_3^R \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{matrix}$$

כעת יומר כל ערך וקטורי של זרימות בערך הזרימה הפנימי באלמנט המבנה המתאים, לפי הקשר (3.6). כך, לדוגמה :

$$(5.51) \quad \mathbf{F}_1^R = \mathbf{T}_1^t \cdot \mathbf{f}_1$$

מטריצות ההמרה \mathbf{T}_i נתונות על ידי (3.36), וכאן יילקחו בנקל לפי טבלה 3.2 לאלמנטי המסגרת, ולפי 3.47 למוט המסבך. על ידי יישום המרה זו במשוואה (5.50), כל אלמנט בעמודה i במטריצת החתכים הווקטורית מוכפל מימין במטריצה \mathbf{T}_i^t , ומטריצת החתכים הווקטורית הופכת להיות סקאלרית, ואילו וקטור הכוחות הגלובלי מומר בוקטור הכוחות הפנימיים של אלמנטי המבנה. לאחר המרה זו, ומחיקת שורות אפס במטריצת החתכים, משוואה (5.50) תקבל את הצורה הבאה :

$$(5.52) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1_x & 1_y & 1_z & 2_x & 2_y & 2_z & 3 & P_{by} & M_{bz} & P_{cy} & M_{cz} \\ \circ & -1 & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -L_1 & 1 & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 2 & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \frac{\sqrt{2}}{2} & \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -L_2 & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ m_{1z} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \\ f_3 \\ P_{by} \\ M_{bz} \\ P_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

מטריצת החתכים הסקלרית מייצגת עתה את הקשרים בין הכוחות הפנימיים במבנה. כזכור מן הרקע התיאורטי בתורת המטרואידים, ניתן להגדיר מטרואיד $M_Q = \langle S_Q, F_Q \rangle$ על ידי הקבוצה היסודית S_Q המכילה את עמודות המטריצה \mathbf{Q} , ועל ידי האוסף F_Q של קבוצות העמודות הבלתי תלויות ליניארית של \mathbf{Q} .

לפי הגדרת הבסיס של המטרואיד, כל קבוצת עמודות מכסימלית בלתי תלויה ליניארית היא בסיס של המטרואיד. בנוסף לכך, מעגל יסודי של המטרואיד נוצר כשלבסיס נוספת עמודה אחת ממשלים הבסיס. לפי זה, בדיוק כפי שנבנתה מטריצת מעגלים לגרף, ניתן לבנות מטריצת מעגלים למטרואיד, שכל שורה בה מכילה את מקדמי התלות הליניארית של הקבוצה התלויה, המורכבת מהבסיס, הנשאר קבוע, ומאיבר אחד מתוך משלים הבסיס – כל שורה והאיבר המתאים לה. כבסיס ניתן לבחור כל קבוצת עמודות מכסימלית בלתי תלויה ליניארית, וכאן בדוגמה תיבחרנה שש העמודות הראשונות, המתאימות לרכיבים של שני אלמנטי המסגרת במבנה. מקדמי התלות הליניארית בכל מעגל ינורמלו כך, שמקדם התלות של האיבר ממשלים הבסיס בכל שורה יהיה 1. לפי בחירה זו מטריצת המעגלים של המטרואיד תהיה:

$$(5.53) \quad \mathbf{B}^M = \begin{bmatrix} 1_x & 1_y & 1_z & 2_x & 2_y & 2_z & 3 & P_{by} & M_{bz} & P_{cy} & M_{cz} \\ 3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L_1 + L_2) & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L_2 & 1 & \circ & \circ & \circ \\ P_{by} & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ & \circ \\ M_{bz} & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & \circ \\ P_{cy} & -1 & \circ & -L_2 & \circ & -1 & -L_2 & \circ & \circ & 1 & \circ \\ M_{cz} & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

לפי משוואה (5.52), מקדמי התלות הליניארית של עמודות \mathbf{Q} הם הכוחות הפנימיים באלמנטי המבנה. יוצאת מכך פרשנות פיסיקלית חשובה למטריצת המעגלים של המטרואיד: כל שורה במטריצת המעגלים היא מצב כוחות אפשרי במבנה, כשרכיב הכוח המכתיב את יתר הכוחות הוא אחד מרכיבי הכוח של משלים הבסיס. זהו בדיוק תיאור של מבנה בסיסי מסוים סטטית, המורכב משני אלמנטי המסגרת, שבו לבדו אין כלל כוחות, וכל אלמנט נוסף, או עומס חיצוני, מתוך קבוצת משלים הבסיס, ייגרמו למצב של כוחות במבנה ביחסים כאלה, שאם הכוח הנוסף הוא בשיעור יחידה, יהיו הכוחות בתת-מבנה המסוים סטטית בדיוק לפי הערכים בשורה המתאימה במטריצת המעגלים של המטרואיד.

לפיכך, כל אחת משורות מטריצת המעגלים מתארת מצב אפשרי של מאמצים עצמיים (self-stress) במבנה, וכל מצב כוחות שהוא במבנה יהיה צירוף ליניארי של שורות \mathbf{B}^M . פירוק כזה של המבנה הוא הבסיס הפיסיקלי של שיטת הכוחות, ובעזרת הייצוג המטרואידי מתקבלת שיטת הכוחות באופן שיטתי. בדיוק כפי שפותחה משוואת המעגלים (1.39) בתורת הגרפים, כך ניתן לפתח את משוואת המעגלים למטרואיד. הפיתוח מופיע בספרות (Shai, 2001c), וכאן תובא המשוואה ללא הוכחה:

$$(5.54) \quad \left(\mathbf{B}_{C'R}^M \cdot \mathbf{R}_R^M \cdot \mathbf{B}_{C'R}^{M^t} \right) \cdot \mathbf{F}_{C'}^M = - \left(\mathbf{B}_{C'R}^M \cdot \mathbf{R}_R^M \cdot \mathbf{B}_{PR}^{M^t} \right) \cdot \mathbf{F}_P^M - \mathbf{B}_{C'A}^M \cdot \Delta_A^M$$

את חלקי המטריצה \mathbf{B}^M המופיעים במשוואה (5.54) ניתן להפיק ישירות מ- (5.53):

$$(5.55) \quad \mathbf{B}_{C'R}^M = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (L_1 + L_2) & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5.56) \quad \mathbf{B}_{PR}^M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -L_2 & 0 & -1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ובניגוד להגדרת מטריצת ההתנגדות \mathbf{R}^R בגרף ההתנגדות שפותח בעבודה זו, בייצוג המטרואידי מטריצת ההתנגדות מורכבת מן ההתנגדויות הפנימיות של האלמנטים במבנה כפי שהן מופיעות ב- (3.37). לפיכך:

$$(5.57) \quad \mathbf{R}_R^M = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & & \\ & \mathbf{R}_2 & \\ & & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 A_1} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \frac{L_1^3}{3E_1 I_1} & -\frac{L_1^2}{2E_1 I_1} & & & & \\ 0 & -\frac{L_1^2}{2E_1 I_1} & \frac{L_1}{E_1 I_1} & & & & \\ & & & \frac{L_2}{E_2 A_2} & 0 & 0 & \\ & & & 0 & \frac{L_2^3}{3E_2 I_2} & -\frac{L_2^2}{2E_2 I_2} & \\ & & & 0 & -\frac{L_2^2}{2E_2 I_2} & \frac{L_2}{E_2 I_2} & \\ & & & & & & \frac{L_3}{E_3 A_3} \end{bmatrix}$$

ועם הנתונים הבאים,

$$(5.58) \quad L_1 = L_2 = L_3 = 3 \text{ m} \quad ; \quad A_1 = A_2 = 5e-3 \text{ m}^2 \quad ; \quad E_1 = E_2 = 200e6 \text{ kPa}$$

$$I_1 = I_2 = 5e-6 \text{ m}^4 \quad ; \quad A_3 = 2e-3 \text{ m}^2 \quad ; \quad E_3 = 70e6 \text{ kPa}$$

$$(5.59) \quad \mathbf{F}_P^M = \begin{bmatrix} P_{by} \\ M_{bz} \\ P_{cy} \\ M_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \text{ kN} \\ -1.0313 \text{ kNm} \\ -1.5 \text{ kN} \\ 1.0313 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$

יהיה הפתרון של משוואה (5.54) כך:

$$(5.60) \quad \underline{\underline{\mathbf{F}_{C'}^M = f_3 = 1.3665 \text{ kN}}}$$

זוהי החוליה החסרה, לפי שיטת הכוחות, לפתרון המבנה כולו, כי כל יתר הכוחות המיותרים הם עומסים חיצוניים שערכם ידוע. כעת ידוע גם ערך הכוח במוט המיותר 3, וניתן לפתור את המבנה כאילו הוא מסוים סטטית, כשהמוט 3 מוחלף בכוח חיצוני הפועל על צומת c וערכו נתון לפי (5.60).

את מטריצת המעגלים של המטרואיד ניתן לקבל גם ישירות מן המבנה על ידי הגדרת מבנה מסוים סטטית, והפעלת כוחות יחידה, בזה אחר זה, במקום כל אחד ואחד מן העומסים החיצוניים או האלמנטים המיותרים במבנה.

יודגש שוב שהמוצג כאן לעניין הייצוג המטרואידי אינו אלא קצה הקרחון, ועוד רב הנסתר על הגלוי, והדברים, הידועים ושאינם ידועים, אינם למסגרת עבודה זו. עם זאת, חשוב היה להביא כאן את הדברים, גם אם בקצרה, הן כדי להמחיש את יתרונו של ייצוג מוכלל, במקרה זה – מטרואיד, והן כדי להראות שהייצוגים קשורים זה בזה ברמה הקומבינטורית העליונה המשותפת.

6. סיכום, מסקנות, והמשך מחקר

6.1. סיכום

בעבודה שהוצגה כאן, פותח לראשונה ייצוג איזומורפי, המבוסס על תורת הגרפים, למבנה מרובה אלמנטים, ובכללם אלמנטי כפיפה. ייצוג המבנה באמצעות ייצוג קומבינטורי שתכונותיו נחקרו כבר, פותח שער לאפשרויות רבות, שחלקן נוצלו בעבודה, כפי שיפורט להלן.

6.1.1. הבעיות שטופלו במסגרת העבודה

הבעיה המרכזית שבייצוג אלמנטי כפיפה (כגון קורות ומסגרות) היא כפולה: מבחינת הכוחות, כוח הגזירה באלמנט יוצר אי-שוויון בין מומנטי הקצוות, ובכך מונע יכולת לייצג את האלמנט באמצעות קשת פשוטה, דרכה זורם המומנט מצד אחד למשנהו. בהקבלה, מבחינת התזוזות, התזוזה הזוויתית בקצה אחד של האלמנט מוסיפה תזוזה קווית צידית בקצהו האחר, גם אם אין כלל עיווי באלמנט, ומשבשת בכך את יחס הקשיחות הישיר בין העיוויים לכוחות.

בעיה נוספת הקשורה למבנה בעל אלמנטי כפיפה היא, שלהבדיל מהייצוג שהיה קיים עד כה למסבך שבו יש זרימה מסוג אחד ופוטנציאל מסוג אחד, הייצוג של אלמנטי כפיפה מחייב הבחנה בין שני סוגי זרימות - כוחות ומומנטים, ושני סוגי פוטנציאלים - קווי וזוויתיים, בהתאמה.

בעיות אלה, ובפרט הבעיה הראשונה, נעקפו עד כה על ידי שימוש בטופולוגיה אלגברית, תוך התייחסות לשני קצות האלמנט כאל שני אלמנטים נפרדים. אמנם, ייצוג אלגברי זה משמש היטב לצורך אנאליזה, אך הוא אינו שומר על כל תכונותיו של המבנה, וחוסר האיזומורפיות בין הייצוג למערכת - משמעותו אבדן ידע. בעבודה זו, הגישה הייתה שבעיות כגון אלה שהוצגו הן תכונות טבעיות של המערכת, וכאלה - יש לבטאן בייצוג.

6.1.2. עיקרי התוצאות שהתקבלו בעבודה

במחקר זה הושקעה עבודה רבה כדי להטמיע בייצוג, באופן איזומורפי, את כל התכונות הטופולוגיות של המערכת. בעזרת קשתות מיוחדות, המייצגות את הקשרים הפנימיים המאפיינים את האלמנטים, נבנה גרף התנגדות מוכלל המייצג את המבנה.

בעבודה נעשה שימוש בשלשה מאפיינים עיקריים של הייצוג הקומבינטורי:

1. שימוש בידע המוטבע בייצוג - בעבודה התברר (פרק 2) כי דיאגרמות הכוחות והמומנטים של המבנה מוטבעות בייצוג, וניתן לקבלן באופן שיטתי על ידי הזרימה בקשתות הגרף.
2. שימוש בשיטות הקשורות לייצוג - השיטה שפותחה דרך הייצוג לניתוח הכוחות והתזוזות במבנה (פרק 4) מבוססת על שיטה ידועה, הנקראת שיטת המשתנים

המעורבים' (Mixed-Variable Method), ששימשה עד כה לפתרון רשתות חשמליות, והותאמה בעבודה זו לניתוח הייצוג, על מאפייניו הייחודיים.

3. שימוש במשפטים הקשורים לייצוג (פרק 5) – התברר כי מאחד המשפטים החשובים הקשורים לייצוג, משפט Tellegen, ניתן לקבל את השיטה הידועה לחישוב תזוזה של צומת, וכן, על בסיס הקשר הדואלי הקיים בייצוג, ניתן למצוא קורה דואלית שהתברר כי היא הקורה הצמודה – conjugate beam, שפותחה על ידי Mohr.

מעניין לתת את הדעת על כך שהדואליות לקורה, שפותחה בעבודה, היא המשכה של הדואליות בין מסבכים למכניזמים שדווחה כבר בספרות (Shai, 2000a), בכך שהיא מתייחסת לגרף עם שני מימדי זרימה ופוטנציאל, ומאפשרת גם למצוא קשרי דואליות במערכות עם זרימה המשתנה לאורך האלמנטים, כמו המומנט המשתנה לאורך אלמנט המבנה.

6.1.3. שימוש בקשרים בין ייצוגים

כיוון שמחקר זה הוא חלק ממחקר כולל יותר, שבו פותחו ייצוגים נוספים, ונחקרו ובוססו קשרים בין הייצוגים, נוצל אחד הקשרים בין ייצוג על ידי גרף התנגדות לבין ייצוג על ידי מטרואיד, ובכך נפתח ערוץ חדש לשימוש בידע שנצבר בתורת המטרואידים. נושא זה הוצג בקצרה בפרק 5, אולם בהחלט ניתן להסיק, על סמך התוצאות שנתקבלו מן השימוש בתורת הגרפים, כי רב הפוטנציאל הטמון גם בשימוש בתורת המטרואידים.

6.2. מסקנות והמשך מחקר

היעד הבסיסי בעבודה היה לפתח ייצוג איזומורפי למבנה, למרות שקיימים כבר ייצוגים טופולוגיים, שבעזרתם ניתן לבצע אנליזה מבנית, למרות שהם אינם איזומורפיים. אין ספק שבתחילת העבודה היה צורך להשקיע זמן רב בפיתוח הייצוג, ולהתגבר על מספר מכשלות. אולם, לאחר שהושג היעד ונמצא ייצוג איזומורפי, עולם חדש נפתח, כי בעזרתו אפשר להתחבר לתחום המתמטי הקשור לייצוג, ולהשתמש בידע הקיים בו. בעבודה התברר כי אמנם ההשקעה בהתחלה הייתה גדולה מאוד, אולם, בהתבסס על התוצאות הראשוניות שהוצגו, היא תשתלם לטווח ארוך.

להשגת היעד הבסיסי הוחלט בשלבים מוקדמים של העבודה לבחור בייצוגים קומבינטוריים, שהם ייצוגים מיוחדים בדידים שנחקרו כבר, כל אחד ותכונותיו, וכן הקשרים ביניהם. השימוש בייצוגים מיוחדים אלו מאפשר שימוש בידע שנצבר כבר בתחומים אחרים. החלטה זו התבררה כמוצדקת, למשל, כשעל בסיס עבודה שנעשתה כבר לגבי ייצוגים אלה שבה התגלה קשר בין מסבכים למכניזמים דרך דואליות בין הייצוגים, הורחב המחקר והייצוג הדואלי של קורה התברר כייצוג המתאים לקורה הצמודה הידועה בספרות.

מתוך היכרות עם הפוטנציאל הטמון בתורת הגרפים, הוחלט בעבודה שהייצוג הקומבינטורי יהיה מבוסס על תורה זו. אכן, בעזרתו ניתן היה לקשר בין הייצוג למבנה בהתאמה ברורה על ידי גרף התנגדות, ויתרה מזאת, ייצוג זה בר-קישור לייצוגים אחרים, שאחד מהם הוא הרחבה שלו - הייצוג המטרואיד. בנוסף לכך, ידוע מן הספרות, עוד מתקופת קירכהוף, כי מעגלים חשמליים ניתן לייצג באמצעות תורת הגרפים, ולכן הייצוג הגרפי מאפשר כעת לראות מבנים ומערכות חשמל בראייה אחידה וכוללת. התברר כי

הנגישות לידע מתורת הגרפים, שנסללה בעזרת הייצוג, פותחת מגוון רחב של אפשרויות, שמקצתן מובאות בעבודה, כמוזכר לעיל.

כל האמור עד כה, והמוצג בהרחבה בגוף העבודה, אינו אלא תחילתה של עבודה רחבה עוד יותר שקשה לחזות את היקפה. כאן הוצגו היסקים של מספר שיטות ידועות מתורת המבנים, אך בהמשך המחקר ניתן יהיה כפי הנראה להסיק בדרכים שונות עוד מספר רב של שיטות ידועות, ואפילו לפתח שיטות או משפטים חדשים בתורת המבנים מהידע המוטבע בייצוג.

היכולת הקיימת להרחבת הגישה לתחום מתמטי חדש יחסית עם פוטנציאל הנדסי, קרי – תורת המטורואידים, צפויה לפתוח אופקים חדשים של מחקר, שכן תורה זו מאפשרת פיתוח אלגוריתמים יעילים.

חיבורה של תורת המבנים עם תחומים שונים בהנדסה, גם הוא רק בתחילתו. בעבודה זו הודגמה היכולת של הייצוג לקשר בין תחומים שונים, כשבאמצעות הדואליות המוטבעת בייצוג נמצא קשר בין שתי מערכות שונות דרך גרף הזרימות. בהמשך המחקר ניתן יהיה לחפש משמעויות חדשות גם לדואליות של גרף התנגדות, ולהשתמש בכלים נוספים כדי למצוא קשרים חדשים בין תחומי ההנדסה השונים.

לסיום, ניתן להצביע גם על נושאים שהיו מעבר למסגרת המחקר בעבודה זו, אך יש להם נגיעה ברורה לעניין. לדוגמה, כיוון שייצוגים קומבינטוריים כבר נבחנו, ונמצאו יעילים בייצוג מערכות הנדסיות אחרות, כגון מערכות דינמיות חד מימדיות, מערכות חשמליות ומערכות קינמטיות, נפתחת אפשרות חדשה לייצוג מערכות משולבות באמצעות ייצוג כולל ואחיד, שבו ניתן להתייחס לכל המערכת כאחת, למרות שהיא מורכבת מאלמנטים הנדסיים מתחומים שונים, כמו: מכטרוניקה, MEMS ועוד. הייצוג ישמש אז כשפה עליונה משותפת למהנדסים מתחומים שונים, ואף ניתן יהיה בעזרתה להעביר ידע ושיטות מתחום אחד למשנהו. המחבר אף התנסה בכך באופן אישי, כשלאחר שפותח הייצוג המרכזי בעבודה, ניגש לעמיתו לעבודה, מהנדס אלקטרוניקה במקצועו, והראה לו ייצוג של קורה דרך גרף ההתנגדות, ומה גדולה הייתה ההפתעה כשזה ניתח ומצא בייצוג מאפיינים של בקרת זרם ומתח התואמים בדיוק את התכונות במבנה, ואף גילה סקרנות ועניין ב'מעגלי' החדש והמתוחכם שטרם נתקל בו.

מקורות

- Andrews G.C., 1977. A General Re-Statement of the Laws of Dynamics Based on Graph Theory, In *Problem Analysis in Science and Engineering*, Branin F.H.Jr. and Huseyin K. (eds.), Academic Press, New York, pp.1-40.
- Bearden T.E., 1995. *The Virtual Time*, <http://www.virtualtimes.com/writers/bearden/mageng/illist.htm>
- Bjørke Ø., 1995. *Manufacturing Systems Theory – A Geometric Approach to Connection*, Tapir Publishers, Norway.
- Chua L.O., Desoer C.A. and Kuh E.S., 1987. *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, Singapore.
- Diaz-Calderon A., 2000. *A Composable Simulation Environment to Support the Design of Mechatronic Systems*, Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.
- Fenves S.J. and Branin F.H.Jr., 1963. Network-Topological Formulation of Structural Analysis, *Journal of the Structural Division*, ASCE 89 (ST4), 483-514.
- Fenves S.J., Logcher R.D., Mauch S.P. and Reinschmidt K.F., 1964. *STRESS – A User's Manual*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Fenves S.J., 1996. Information Technologies in Construction: A Personal Journey, In *Construction on the Information Highway*, Turk Z. (ed.), E-Proceedings, <http://www.fagg.uni-lj.si/bled96/>
- Fleming J.F., 1989. *Computer Analysis of Structural System*, McGraw-Hill, New York.
- Fuchs M.B., 1992. The Explicit Expression of Internal Forces in Prismatic Member Structures, *Journal of Mechanical Structures and Machines*, 20(2), 169-194.
- Gerstle K.H., 1974. *Basic Structural Analysis*, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ.
- Hibbeler R.C., 1984. *Structural Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Kaveh A, 1974. *Application of Topology and Matroid Theory to the Analysis of Structures*, Ph.D. Thesis, London University.
- Kaveh A, 1995. *Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods*, 2nd Ed., Research Studies Press Ltd, Somerset.
- Kron G., 1962. Elastic Structures from the Point of View of Topological Network Theory, *RAAG Memoirs*, 3, 329-338.
- Kron G., 1963. *Diakoptics – A Piecewise Solution of Large-Scale Systems*, Macdonald, London.
- Langefors B., 1950. Improvement in Electric Computer Networks for some Elastic Structures, *SAAB Technical Notes*, TN1.
- Langefors B., 1959. Algebraic Topology and Networks, *SAAB Technical Notes*, TN43.
- Langefors B., 1961. Algebraic Topology for Elastic Networks, *SAAB Technical Notes*, TN49.
- Lovász L. and Yemini Y., 1982. On Generic Rigidity in the Plane, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods*, 3(1), 91-98.

- McGuire W. and Gallagher R.H., 1979. *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- McPhee J.J., 1997. A Unified Graph – Theoretic Approach to Formulating Multibody Dynamics Equations in Absolute or Joint Coordinates, *Journal of the Franklin Institute*, 334B(3), 431-445.
- Popov E.E., 1973. *Introduction To Mechanics Of Solids*, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.
- Recski A., 1989. *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Roth J.P., 1955. An Application of Algebraic Topology to Numerical Analysis: On the Existence of a Solution and the Network Problem, *Proceedings of the National Academy of Science*, 41(7), 518-521.
- Savage G.J. and Kesavan H.K., 1982. Discrete Analogues of Green's Identities Through the Graph-Theoretic Field Model, *Journal of the Franklin Institute*, 313(1), 17-39.
- Shai O., 2001a. The Duality Relation between Mechanisms and Trusses, *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 36(3), 343-369.
- Shai O., 2001b. The Multidisciplinary Combinatorial Approach and its Applications in Engineering, *Journal of AIEDAM – AI for Engineering Design, Analysis and Manufacturing*, 15(2), 109-144.
- Shai O., 2001c. Combinatorial Representations in Structural Analysis, *Journal Computing in Civil Engineering*, 15(3), 193-207.
- Shai O., 2001d. Deriving Structural Theorems and Methods Using Tellegen's Theorem and Combinatorial Representations, *The International Journal of Solids and Structures*, 38, 8037-8052.
- Shai O. and Rubin D., 2002. Graph-Theoretic Modeling and Analysis of Integrated Engineering Systems, Submitted to the *Journal of Engineering with Computers*.
- Simon, H. A., 1981. *The Sciences of the Artificial*, 2nd Ed., MIT Press, Cambridge.
- Southwell R.V., 1940. *Relaxation Methods in Engineering*, Oxford University Press, Oxford.
- Spillers W. R., 1963. Network Analogy for Linear Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of The ASCE*, 89 (EM4), 21-29.
- Swamy M.N.S. and Thulasiraman K., 1981. *Graphs, Networks, and Algorithms*, John Wiley & sons Inc., New York.
- Tellegen B.D.H., 1952. A General Network Theorem with Applications, *Philips Research Reports*, 7(4), 259-269.
- Trent H.M., 1955. Isomorphisms Between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems, *Journal of the American Society of America*, 27(3), 500-527.
- Wang K. and Bjørke Ø., 1991. Mechanical Networks Model for the Plane Frame System, *Journal of Computers In Industry*, 16, 113-128.
- Wojnarowski J. and Zawiślak S., 2001. Modeling of Mechanical System by Means of Matroids, *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 36, 717-724.

Table of Contents

List of Notations and Nomenclatures	vii
List of Figures	ix
List of Tables	xi

Chapter 1: Introduction **1**

1.1. Historical Background	1
1.1.1. Two Pioneers, Two ways	1
1.1.2. The Followers – Algebraic Topology	3
1.1.3. The Importance of Developing a General Isomorphic Representation	3
1.2. Research Objectives	5
1.3. Graph Theory - Theoretical Background	5
1.3.1. Graphs	5
1.3.2. Potential and Flow	6
1.3.3. Formulating Potential and Flow in Edge Terms	7
1.3.4. Algebraic Formulation of the Graph Representation	8
1.3.5. Relations between Flows and Potential-Differences in a Graph	14
1.3.6. Resistance Graph Representation	18
1.3.7. The Circuit Method	20
1.3.8. The Cut-set Method	21
1.3.9. Operations upon Graphs – Contraction and Deletion of Edges	22
1.3.10. The Dual Graph	23

Chapter 2: Flow-Graph Representation of a Bending Member **25**

2.1. The Problem in Representing Bending Members	25
2.1.1. Representing a Bending Member by a Graph Edge	25
2.1.2. Representing by Incidence Matrix	27
2.2. Developing the Flow Graph Representation of a Beam	31
2.2.1. Representing Free Body Equilibrium	31
2.2.2. Representing Equilibrium at Member's Ends	32
2.2.3. Beam Equilibrium Flow-Graph Representation, with its Primary Reduction	33
2.2.4. Advanced Reduction of Edges in Shear-Force Flow-Graph	34

2.2.5.	Reduction of Edges in Moment Flow-Graph – Option 1	35
2.2.6.	Reduction of Edges in Moment Flow-Graph – Option 2	35
2.2.7.	Reduction of Edges in Moment Flow-Graph – Option 3	36
2.2.8.	The Preferred Flow-Graph Representation of a Beam Member	36
2.2.9.	The Meaning of the Moment Compensation Edge in the Beam Member Representation	37
2.2.10.	Example of Representing a Beam by a Flow-Graph	39
2.3.	The Meaning of Flows - Drawing Force and Moment Diagrams of a Beam	40
2.3.1.	Interpretation of Edge Directions	40
2.3.2.	Shear Force Diagram	41
2.3.3.	Moment Diagram	42
2.4.	Analysis of a Determinate Beam through its Flow-Graph Representation	45
2.4.1.	Statically Determinate Beam – a Sample Problem	45
2.4.2.	Representing the Beam Problem by the Flow-Graph	45
2.4.3.	Choosing Spanning Trees for the Flow Law Formulation	46
2.4.4.	Deriving of the Flow Law from the Circuit Matrix	47
2.4.5.	Solving the Problem	48
2.5.	Summary and Conclusions Relating to Flow-Graph Representation	49
Chapter 3:	<u>Resistance Graph Representation of a Structure</u>	51
3.1.	Forces and Displacements in a Planar Structural Member	51
3.1.1.	End Forces – Equilibrium	51
3.1.2.	End Displacements and Deformations – Compatibility	52
3.1.3.	Internal Forces	54
3.1.4.	Relations between Deformations and Internal Forces	54
3.2.	Resistance Graph Representation of a Planar Structural Member	55
3.2.1.	Representing Displacements by Graph Vertex Potentials	55
3.2.2.	Representing Forces by Graph Edge Flows	58
3.2.3.	Merging Flows and Potentials into the Resistance Graph Representation	61
3.2.4.	Reestablishing the Relations Between Dependent Sources	61
3.2.5.	The Final Resistance Graph Representation of a Planar Structural Member	62
3.2.6.	Determining the Member's Angle, α	64
3.2.7.	Effects of Edge Direction Alternation in the Representation	65

3.3. Representing Fundamental Members	66
3.3.1. Representing Truss Rod	66
3.3.2. Representing Horizontal Beam Member	67
3.3.3. Representing Rectangular Frame Member	68
3.4. Example of Representing a Structure by a Resistance Graph	68
3.4.1. Preliminary steps – Choosing Vertices, Members and Directions	68
3.4.2. Representing the Structure Components	69
3.4.3. General Interpretation of Various Values in the Representation	70
3.4.4. Referring to a pin-joint between Members	71
3.5. Summary and Conclusions Relating to Resistance Graph Representation	72

Chapter 4: Analysis of the Graph Representation 73

4.1. The Mixed-Variable Method for Solving Resistance Graph Representation	75
4.1.1. Stage 1: Classification	76
4.1.2. Stage 2: Partition	77
4.1.3. Stage 3: Choosing the Spanning Tree	77
4.1.4. Stage 4: Fundamental Connection Formulation	77
4.1.5. Stage 5: Knowledge Hierarchy Construction	80
4.1.6. Stage 6: The Solution	83
4.2. Example 1 – Horizontal Beam	84
4.2.1. Choosing Vertices and Members for the Representation	84
4.2.2. Rules for Choosing Member Directions	84
4.2.3. Constructing the Resistance Graph Representation	86
4.2.4. Classifying the Resistance Graph Edges, and Choosing the Spanning Tree	87
4.2.5. Constructing the Matrices Corresponding to the Resistance Graph	87
4.2.6. Simplifying the Mixed-Variable Equation	89
4.2.7. Solving the Problem	90
4.2.8. The Effect of classifying Resistance Edges to E^d	91
4.3. Example 2 – A Rectangular Frame with a Truss Rod	94
4.4. Topological Derivation of the Mixed-Variable Equation	97
4.4.1. Algorithm 1: Representing a Structure by a Mixed-Variable Resistance Graph	97
4.4.2. Deriving the Mixed-Variable Equation Directly from the Graph	97
4.4.3. Algorithm 2: Topological Meaning of the Mixed-Variable Equation	100

Chapter 5: Applications and Expansions of the Graph Representation 105

5.1. Truss Analysis by means of its Graph Representation	105
5.1.1. Reduced Application of the Mixed-Variable Resistance Graph Representation	105
5.1.2. Reduced Mixed-Variable Equation for Solving the Graph Representation	105
5.1.3. Truss analysis through its Graph Representation – An Example	106
5.2. Derivation of the Conjugate-Beam Method from the Graph Dualism	107
5.2.1. The Dualism between Trusses and Mechanisms – Overview	107
5.2.2. The Difference between Truss Rod and Bending Member in Applying Dualism	108
5.2.3. Representing Continuous Beam by a Graph	110
5.2.4. The Dual Graph of Beam Graph Representation	112
5.2.5. The Dual Graph as a Representation of a Dual Beam	113
5.2.6. Primal Beam Displacements as Forces in its Dual Beam	114
5.3. Energy Methods as a Derivation of Tellegen's Theorem	117
5.3.1. Virtual Work Method for Determining Structural Displacements	117
5.3.2. Adjusting Tellegen's Theorem to a Structure Graph Representation	118
5.3.3. Solving Structure Forces through Flow-Graph Representation	121
5.3.4. Applying Tellegen's Theorem to a Beam	122
5.3.5. Applying Tellegen's Theorem to a Continuous Graph Representation	124
5.4. Expansion to other Representations – Matroid Representation	125
5.4.1. Theoretical Background in Matroid Theory	126
5.4.2. Representing a Structure by a Matroid	127

Chapter 6: Summary, Conclusions and Further Research 131

6.1. Summary	131
6.1.1. The Problems Confronted with in the Research Framework	131
6.1.2. Main Results Obtained in This Work	131
6.1.3. Applying Connections between Common Level Representations	132
6.2. Conclusions and Further Research	132

References

135

Abstract

In this thesis an isomorphic representation for compound structures containing frame, beam and truss members has been developed, on the basis of discrete mathematics, particularly on graph theory. Discrete Representations reported so far were targeted mainly to structural analysis, therefore, the matrices and analysis equations were built directly from the structure. In this research the aim was different. The main effort was directed to transforming the structure into an isomorphic combinatorial representation upon which all the subsequent investigation, including the development of analysis algorithms, theorems and applications, is performed.

The main representation developed in this work is based on graph theory. In this representation, flow is associated with each edge, potential is associated with each vertex and there are defined relations, referred to as resistances, between the potential differences and the flows. In this representation there are two types of flows, corresponding to forces and moments at the element, and two types of potentials, corresponding to the linear and angular displacements of a joint. When representing bending members, such as beams and frames, two peculiarities arise: the moment flow entering the tail vertex is not equal to the flow coming at the head vertex, and there is a coupling between the angular and the linear potentials of the end vertices of the edges. The combinatorial representation developed integrates both of these unique properties, among all other properties of the structure.

The representation developed in this research encompasses embedded knowledge, including theorems and algorithms from discrete mathematics in general, and from graph theory in particular and also relations to other combinatorial representations. Therefore, once a structure is represented by a graph, in addition to the topology and the engineering details of the given structure, its embedded knowledge becomes available. For example, the analysis method developed and applied in this work to multi-dimensional systems was derived from the well known method of graph theory called the Mixed-Variable Method, hitherto used to solve electrical circuits.

Moreover, a number of theorems and methods developed in structural mechanics were proved to be derivable from theorems and methods embedded in the representation. For example, a known method to compute joint displacements was derived from one of the fundamental theorems in network graph theory - Tellegen's theorem. In addition, the dual graph of a determinate beam was found to correspond to another determinate beam, known in the literature to be the Conjugate beam. Moreover, the duality process for revealing the conjugate beam was found to be an expansion of a previously reported duality between trusses and mechanisms.

On the basis of primary results of this research, it is concluded, that the theoretical foundation established in this work enables one to obtain a new and more general perspective on some topics in structural mechanics. Using this representation, structural theory can be studied by engineers from other disciplines, and vice versa. Knowledge and methods can be transferred between disciplines, and new connections between theory of structures and other topics in engineering can be established on the basis of the connections between their combinatorial representations. The Applicability of a unified representation to integrated engineering systems will facilitate a comprehensive analysis and design by representing the system as a whole in the global system level called The Common Combinatorial Level.

TEL AVIV UNIVERSITY

THE IBY AND ALADAR FLEISCHMAN FACULTY OF ENGINEERING

Department of Solid Mechanics, Materials and Systems

**STRUCTURAL ANALYSIS THROUGH
COMBINATORIAL REPRESENTATIONS**

Thesis submitted toward the degree of

Master of Science in Mechanical Engineering

in Tel-Aviv University

by

Nevo Ta'aseh

This research work was carried out at Tel-Aviv University
in the Department of Solid Mechanics, Materials and Systems,

Faculty of Engineering

under the supervision of Dr. Offer Shai

February 2002

This work was carried out under the devoted and careful supervision of

Dr. Offer Shai