

אוניברסיטת תל – אביב

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן

**מציאת מצבים מתים של מכניזמים באמצעות עיקרון
הדואליות בתורת הגרפים**

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסה מכנית

על ידי

אירינה פולנסקי

תשרי תשס"ה

אוניברסיטת תל – אביב

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן

המחלקה למכניקה, חומרים ומערכות

מציאת מצבים מתים של מכניזמים באמצעות עיקרון הדואליות בתורת הגרפים

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסה מכנית

על ידי

אירינה פולנסקי

העבודה נעשתה במחלקה למכניקה, חומרים ומערכות

בהנחיית ד"ר עופר שי

תשרי תשס"ה
תודה

תודה לדרי' עופר שי, על המחקר המעניין והמאתגר, על הסבלנות והנכונות תמיד לתת לי להתבטא. במשך כל שלושת השנים, בהם עבדנו יחד, הרגשתי שאתה מאמין בי ומשוכנע שמעבר להצלחה במחקר שלי, אשפיע גם על מחקרים אחרים.

תודה לחברי קבוצת המחקר: דניאל, דר' יפים, נמרוד, נבו, רומן, אנטון, פיודור, נואל, על אווירה טובה ועזרה בעבודה.

תודה ליאן, בעלי, הבן אדם הכי קרוב, וזה אומר הכל.

תודה לאימא ואבא, שכל שבי – מהם.

תקציר

מטרת התיזה הייתה לפתח שיטה ברת מיחשוב למציאת כל המצבים המתים (מצבים בהם חוליית הכניסה אינה יכולה לנוע) של מכניזם בהינתן הטופולוגיה בלבד. בתיזה פותחו שתי שיטות חדשות למציאת מצבים מתים של מכניזמים, שתיהן מבוססות על קשר הדואליות מתורת הגרפים הקיים בין מכניזמים למסבכים שדווח בשנת 2001. לפי קשר זה לכל מכניזם קיים מסבך דואלי ולהיפך, כאשר כוחות במוטות המסבך מתאימים למהירויות יחסיות של חוליות המכניזם. בתיזה הורחב הקשר ודווח לראשונה על כיוון חדש בו תזוזות יחסיות של מוטות במסבך מתאימות לכוחות הפועלים בחוליות המתאימות במכניזם, דהיינו, המכניזם נמצא במצב מת.

השיטה הראשונה המדווחת בתיזה ומכונה שיטת התזוזות, מבוססת על הכיוון החדש בדואליות, לפיו העתקת התזוזות היחסיות במסבך הדואלי למכניזם המקורי מגדירה מצב בו במכניזם המקורי נוצרים כוחות, כלומר מגדירה מצב מת של המכניזם.

השיטה השנייה שפותחה בתיזה, מבוססת על משתנה כוח חדש - כוח בפאה (Face Force -FF), שדווח בספרות ב-2002, שאף הוא נובע מתכונת הדואליות בין מסבכים למכניזמים. למשתנה זה, למרות שהינו משתנה מסוג כוח יש תכונה גם של פוטנציאל, תכונה אשר נעשה בה שימוש נרחב בתיזה למציאת המצבים הסינגולריים. כוח בפאה קיים בכל מערכת סטטית ובוודאי גם במכניזם במצב מת. מתברר כי תזוזות הצמתים של המסבך הדואלי שבוצעו בשיטת התזוזות, מתאימות לכוחות בפאות המכניזם, כאשר המכניזם נמצא במצב מת. זה היה הבסיס לפיתוח שיטת הכוחות בפאות, שיטה שמופעלת ישירות על המכניזם. תכונות של כוחות בפאות מאפשרות לגלות את הקשרים הטופולוגיים והגיאומטריים הקיימים בין חוליות המכניזם אשר גורמים למכניזם להיות במצב מת. השיטה מפעילה כוחות בקונפיגורציות שונות של פאות המכניזם ומאפיינת את התנאים שהחוליות צריכות לקיים כדי שאכן יתפתחו כוחות בפאות האלה, לדוגמא: תנאי של חוליות מקבילות; תנאי של מפגש המשכי שלוש חוליות בנקודה אחת; תנאי של שלוש או יותר נקודות להיות על קו אחד.

היתרון של שיטת הכוח בפאה על פני שיטת התזוזות הוא באפשרות לקבל אפיון התנאים שהחוליות מקיימות כדי שמכניזם יהיה במצב מת. יתרון נוסף של שיטה זו ביחס לשיטות אחרות שדווחו בספרות שהיא קלה למיחשוב, תוך שימוש באלגוריתמים ידועים מתורת הגרפים, דבר המאפשר הפעלתה על מכניזמים בעלי מספר גדול של חוליות. בנוסף לכך, מובא בתיזה שיטה להורדה משמעותית של מספר המצבים שיש לבדוק וכל זאת בלי לקבל מצבים שמהווים מקרים פרטיים של מצבים שכבר אותרו. בתיזה הופעלו השיטות על מכניזמים ידועים שעבורם דווח בספרות כולל הפעלת השיטה על מכניזם מסוג Double Butterfly, הידוע כבעייתי בגלל הקושי במציאת מרכזי הסיבוב הרגועים שלו.

על סמך התוצאות שהתקבלו בתזה, ניתן להסיק כי לגישה זו יש חשיבות הן מעשית והן תיאורטית. בתחום המעשי התקבלה גישה יעילה וברת מיחשוב, הנותנת פתח להרחיב אותה לתחומים נוספים כמו רובוטים ועוד. בתחום התיאורטי, מהעובדה כי הבסיס התיאורטי שלה מבוסס על קשרים מתמטיים בין תחומי ההנדסה השונים שפותחו לאחרונה, מצביעה על האפשרות כי תוצאות חדשות ונוספות יתקבלו בהמשך המחקר.

תוכן העניינים

v	רשימת סימונים
vi	רשימת איורים
ix	רשימת טבלאות

1 פרק 1: מבוא

1	1.1 הקדמה
3	1.2 מטרת המחקר
4	1.3 הגדרות למצב מת של מכניזם הקיימות בספרות
5	1.4 סיכום עבודות בנושא מצב מת של מכניזם
7	1.5 שימושים של מצב מת של מכניזמים וחשיבותו

11 פרק 2: תשתית מתמטית עליה מבוססת התיזה

11	2.1 תשתית מתורת הגרפים
14	2.2 פוטנציאל זרימה
17	2.3 גרף זרימות
17	2.4 ייצוג של כוחות במסבך כגרף זרימות
18	2.5 גרף פוטנציאלים
19	2.6 ייצוג של מהירויות במכניזם כגרף פוטנציאלים
20	2.7 גרף דואלי
21	2.8 קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים

פרק 3: מציאת מצבים מתים (Dead Centers) של מכניזם באמצעות שיטת תזוזת

23 הצמתים

23	3.1 ייצוג של תזוזות במסבך מסוים סטטית כגרף פוטנציאלים
25	3.2 ייצוג של כוחות במכניזם במצב מת כגרף זרימות
26	3.3 שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזמים
26	3.3.1 קשר הדואליות בין כוחות במכניזם במצב מת לתזוזות במסבך
30	3.3.2 תיאור השיטה
32	3.3.3 הסבר איכותי על שיטת התזוזות מתורת הסטטיקה
32	3.3.3.1 קשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך
	3.3.3.2 הקשר בין השיטה המוצעת לשיטת הקורה המצומדת
35	(Conjugate beam)

	3.3.4 הוכחת ההתאמה בין כל מצב מת של מכניזם לתזוזות צמתים
37	במסבך הדואלי
37	3.3.5 השוני בין מצבים מתים שונים של מכניזם
39	3.4 סיכום של שיטת תזוזת הצמתים

פרק 4: הכוח בפאה (Face Force) ותכונותיו

40	4.1 תיאור הכוח בפאה
	4.1.1 כוח בפאה במסבך - משתנה שמתאים למהירות של צומת
40	במכניזם הדואלי
	4.1.2 כוח בפאה - הרחבה רב ממדית של זרם חוגים (mesh current)
42	במעגל חשמלי
43	4.2 תיאור קו שווה מומנט ודיאגרמת קווים שווי מומנט
43	4.2.1 קו שווה מומנט (EquiMomental Line - EML)
	4.2.2 דיאגרמת קווים שווי מומנט
45	(EquiMomental Line Diagram - EMLD)

פרק 5: מציאת מצבים מתים (Dead Centers) טופולוגיים של מכניזם

בשיטת כוח בפאה

	5.1 תזוזה (פוטנציאל) של צומת במסבך דואלי שקולה לכוח (זרימה) בפאה
51	במכניזם תקוע
52	5.2 הגדרת קונפיגורציה חוקית של פאות עבור שיטת הכוח בפאה
53	5.3 קבלת תנאים גיאומטריים הקיימים במכניזם במצב תקוע
53	5.3.1 בניית דיאגרמת קווים שווי (EMLD) מומנט של מכניזם
54	5.3.2 תנאי של חוליות מקבילות
55	5.3.3 תנאי של חיתוך המשכי שלוש חוליות בנקודה אחת
56	5.3.4 תנאי של שלוש או יותר נקודות להיות לאורך קו אחד
57	5.3.5 מציאת כיוון הכוח המופעל על ידי חוליית כניסה
58	5.4 שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים של מכניזמים
58	5.5 הוכחת יחידות הפתרון של שיטת הכוח בפאה
59	5.6 דוגמאות להפעלת השיטה
59	דוגמא מס' 1 - הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם ארבע חוליות
60	דוגמא מס' 2 - הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם שתי דיאדות

67	דוגמא מס' 3 הפעלת השיטה על מכניזם Watt II
77	5.7 הורדת מספר קונפיגורציות (הורדת סיבוכיות)
80	5.8 דוגמאות למציאת מינימום מקרים בשיטת הכוח בפאה
80	דוגמא מס' 4 - הפעלת השיטה על מכניזם Stephenson II
88	דוגמא מס' 5 - הפעלת השיטה על מכניזם Stephenson III
95	דוגמא מס' 6 - הפעלת השיטה על מכניזם Watt I
102	דוגמא מס' 7 - הפעלת השיטה על מכניזם Stephenson I
106	דוגמא מס' 8 - הפעלת השיטה על מכניזם Double Butterfly

112 פרק 6: סיכום, מסקנות והמשך מחקר

112	6.1 סיכום
113	6.2 מסקנות והמשך מחקר


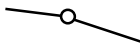
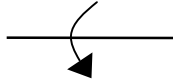
115 נספחים

115	נספח א – הגדרות מתורת המכונות
118	נספח ב – שיטה של Yan and Wu למציאת מצבים מתים של מכניזם






128 מקורות

רשימת סימונים

איורים במכניזם או מסבך

חוליה במכניזם או מוט במסבך	_____
מוט במסבך לאחר דפורמציה
סמך ניח	
חיבור צירי	
חוליית כניסה במכניזם	
קו שווה מומנט	- - - - -

איורים בגרף

צומת	
צומת ייחוס	
קשת	
מקור הפרש פוטנציאליים	
מקור זרימה	

סימונים וקיצורים

* ערך או מרכיב בגרף דואלי	
EML (EquiMomental Line) קו שווה מומנט	
EMLD דיאגרמת קוים שווי מומנט (EquiMomental Line Diagram)	
PGR ייצוג באמצעות גרף פוטנציאליים (Potential Graph Representation)	
FGR ייצוג באמצעות גרף זרימות (Flow Graph Representation)	

אותיות

A	מטריצת הסמיכויות של גרף
B	מטריצת המעגלים של גרף
E	קבוצת קשתות בגרף
e	מספר הקשתות בגרף
f	מספר הפאות במסבך או מכניזם
f	ווקטור כוח בפאה
F(e)	או ווקטור ווקטור זרימות בקשת כוחות הפועל במוט או חוליה
G	גרף
h	צומת ראש של קשת
I_{ij}	i - j מרכז סיבוב רגעי בין חוליות
m_{ij}	i - j קו שווה מומנט של כוחות
P	ווקטור כוח חיצוני הפועל על מסבך
Q	מטריצת החתכים בגרף
t	צומת זנב של קשת
v	מספר הצמתים בגרף
v	ווקטור מהירות מוחלטת של צומת
V	ווקטור מהירות יחסית של חוליה במכניזם
$\Delta(e)$	ווקטור הפרש פוטנציאליים בין קצוות קשת e
$\pi(v)$	בגרף v ווקטור פוטנציאל של צומת

רשימת איורים וטבלאות

עמוד	מס' איור
1	איור 1.1 : דוגמא לבעיה גיאומטרית של מצב מת למכניזם ארבע חוליות
2	איור 1.2 : מכניזם Stephenson III במצבים שונים
4	איור 1.3 : הדגמת מצב גבולי של מכניזם ארבע חוליות
7	איור 1.4 : מכניזם ארבע חוליות
7	איור 1.5 : דוגמאות לתכונות מיוחדות של מכניזם במצב מת
8	איור 1.6 : שימוש במצב מת של מכניזם – פלאייר
9	איור 1.7 : דוגמא לשימוש במצב מת של מכניזם להגבר כוח – מכניזם מסוג toggle
9	איור 1.8 : שימוש במצב מת של מכניזם - מושב של Ford Mustang משנת 1986
11	איור 2.1 : דוגמאות לגרפים
12	איור 2.2 : דוגמאות לגרף מישורי ולא מישורי
12	איור 2.3 : דוגמא לחלוקה של קשתות הגרף לענפי עץ פורס וקישורים
13	איור 2.4 : דוגמאות למעגלים בסיסיים וחתכים בסיסיים
14	איור 2.5 : פוטנציאל בצמתים והפרש פוטנציאליים על קשת
15	איור 2.6 : דוגמא לקביעת צומת ייחוס בגרף
15	איור 2.7 : זרימה בקשת
16	איור 2.8 : חישוב ערך הזרימה בקשת
16	איור 2.9 : מציאת פאות בגרף, קביעת זרימה בפאות וקביעת פאת ייחוס
18	איור 2.10 : דוגמא לייצוג כוחות במסבך על ידי גרף זרימות
19	איור 2.11 : דוגמא לייצוג מהירויות במכניזם על ידי גרף פוטנציאליים
20	איור 2.12 : דוגמא לבניית גרף דואלי
21	איור 2.13 : הדגמה של קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים
22	איור 2.14 : הדגמה לקבלת משתנה כוח חדש – כוח בפאה מתוך דואליות בין מסבכים למכניזמים
23	איור 3.1 : דוגמא 1 לייצוג תזוזות במסבך באמצעות גרף פוטנציאליים
24	איור 3.2 : דוגמא 2 לייצוג תזוזות במסבך באמצעות גרף פוטנציאליים
25	איור 3.3 : דוגמא לייצוג של כוחות במכניזם במצב מת באמצעות גרף זרימות
27	איור 3.4 : בניית מכניזם, הדואלי למסבך מאיור 3.1, במצב מת
28	איור 3.5 : מכניזם מאיור 3.3 (א) עם כיוונים שונים של חוליית הכניסה 1
29	איור 3.6 : בניית מכניזם, הדואלי למסבך מאיור 3.2 (א), במצב מת
31	איור 3.7 : דוגמא להפעלת השיטה על מכניזם Double Butterfly
32	איור 3.8 : דוגמא 1 לקשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך
33	איור 3.9 : דוגמא 2 לקשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך
34	איור 3.10 : פרוק של התזוזה היחסית של מוט במסבך לרכיב מקביל ורכיב מאונך למוט
36	איור 3.11 : מציאת המסבך המצומד
38	איור 3.12 : קבלת מצבים מתים ידועים של מכניזם Stephenson III באמצעות שיטת תזוזת הצמתים

39	איור 3.13 : דוגמא למכניזם במצב מת, המתקבל מהפעלת שיטת התזוזות
40	איור 4.1 : הדגמת הקשר בין מהירות של צומת במכניזם לכוח בפאה במסבך
41	איור 4.2 : הדגמת הקשר בין מהירות יחסית של חוליה במכניזם לכוח הפועל במוט במסבך
42	איור 4.3 : כוח בפאה זה הרחבה רב ממדית של זרם חוגים במעגל חשמלי
43	איור 4.4 : בניית קו שווה מומנט (m_{12}) של שני כוחות f_1 ו f_2
44	איור 4.5 : הדגמה של טענה 4.1
46	איור 4.6 : דוגמא למציאת כל EML של הכוחות במסבך בעזרת EMLD
48	איור 4.7 : הוכחה כי לכל מעגל ב - EMLD מתאים חתך במסבך
50	איור 5.1 : דוגמא למכניזם Stephenson II במצב מת, המתקבל מהפעלת שיטת התזוזות
52	איור 5.2 : דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות
54	איור 5.3 : דוגמא לתנאי של חוליות מקבילות
55	איור 5.4 : דוגמא לקבלת תנאי של חיתוך המשכי שלוש חוליות של מכניזם בנקודה אחת
56	איור 5.5 : דוגמא לקבלת תנאי שלוש נקודות צריכות להיות על קו אחד
57	איור 5.6 : דוגמא לקבלת תנאי לסינגולריות תוך מציאת כיוון פעולת הכוח המופעל על ידי חוליית הכניסה
59	איור 5.7 : מכניזם ארבע חוליות עם פאות מסומנות
59	איור 5.8 : הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם ארבע חוליות
60	איור 5.9 : מכניזם שתי דיאדות עם פאות מסומנות
61	איור 5.10 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
62	איור 5.11 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 2 של פאות
63	איור 5.12 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 3 של פאות
64	איור 5.13 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
65	איור 5.14 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 2 של פאות
66	איור 5.15 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 3 של פאות
67	איור 5.16 : מכניזם Watt II עם פאות מסומנות
68	איור 5.17 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
69	איור 5.18 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציות 2 ו 3 של פאות
70	איור 5.19 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 4 של פאות
70	איור 5.20 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 5 של פאות
71	איור 5.21 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 6 של פאות
71	איור 5.22 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 7 של פאות
72	איור 5.23 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 8 של פאות
73	איור 5.24 : מכניזם מאיור 5.16, חוליית הכניסה מורכבת מחוליות 3, 4 ו 5
74	איור 5.25 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 1 ו 2 של פאות
75	איור 5.26 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 4 ו 6 של פאות
76	איור 5.27 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 8 ו 10 של פאות

77	איור 5.28 : דוגמאות למכניזם במצב מת ובתוכו תת מכניזם במצב מת
	איור 5.29 : בדיקה של דרגת החופש לפי גרובלר של תת מכניזם עבור קונפיגורציות שונות של הפאות של מכניזם מאיור 5.24
79	
80	איור 5.30 : מכניזם Stephenson II עם פאות מסומנות
	איור 5.31 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.30
81	
	איור 5.32 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.30 (המשך)
82	
83	איור 5.33 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.30 עבור קונפיגורציה 1 של פאות
84	איור 5.34 : מכניזם נתון עם פאות מסומנות
	איור 5.35 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.34
85	
	איור 5.36 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.34 (המשך)
86	
87	איור 5.37 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.34 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
88	איור 5.38 : דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות
	איור 5.39 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.38
89	
90	איור 5.40 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.38 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
91	איור 5.41 : דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות
	איור 5.42 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.41
92	
93	איור 5.43 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.41 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
94	איור 5.44 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.41 עבור קונפיגורציות 6 ו- 8 של פאות
95	איור 5.45 : מכניזם Watt I עם פאות מסומנות
	איור 5.46 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.45
96	
97	איור 5.47 : המשך של איור 5.46
98	איור 5.48 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.45 עבור קונפיגורציות 1 ו- 19 של פאות
99	איור 5.49 : מכניזם Watt I עם פאות מסומנות
	איור 5.50 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.49
99	
100	איור 5.51 : המשך של איור 5.50
101	איור 5.52 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.49 עבור קונפיגורציות 1 ו- 19 של פאות
102	איור 5.53 : מכניזם Stephenson I עם פאות מסומנות
	איור 5.54 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.53
103	
104	איור 5.55 : המשך של איור 5.54

105	איור 5.56 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.53 עבור קונפיגורציות 1 ו- 19 של פאות
106	איור 5.57 : מכניזם Double butterfly עם פאות מסומנות
	איור 5.58 : חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות
108	המכניזם מאיור 5.57
109	איור 5.59 : המשך של איור 5.58
110	איור 5.60 : המשך של איור 5.59
111	איור 5.61 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.57 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות
116	איור א.1 : מערכת קינמטית ומכניזם בעלי ארבע חוליות
116	איור א.2 : שתי מערכות קינמטיות אפשריות בעלות 6 חוליות
117	איור א.3 : הפיכות קינמטיות של מערכות Watt – Stephenson ו- Watt
117	איור א.4 : מכניזם שנקרא "Double Butterfly"
119	איור ב.1 : מהירות של נקודה A כאשר היא שייכת לחוליית הכניסה או לחוליית היציאה
121	איור ב.2 : מציאת מרכזים רגועים של המכניזם ארבע חוליות
122	איור ב.3 : דוגמא להפעלת השיטה על מכניזם ב.2 (א)
123	איור ב.4 : מציאת חלק מהמרכזים הרגועים של המכניזם מסוג Stephenson III
124	איורים ב.5 – ב.8 : דוגמא להפעלת השיטה למציאת מצב מת של מכניזם ב.4 (א)

עמוד

מס' טבלה

51	טבלה 5.1 : קשרי הדואליות עליהם מבוססת שיטת תזוזת הצמתים
	טבלה 5.2 : הקונפיגורציות חוקיות (אפור) בתוך כל הקונפיגורציות האפשריות של פאות
52	המכניזם מאיור 5.2
59	טבלה 5.3 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.7
60	טבלה 5.4 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.9
64	טבלה 5.5 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3
67	טבלה 5.6 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.16
73	טבלה 5.7 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.24
80	טבלה 5.8 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.30
84	טבלה 5.9 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.3
88	טבלה 5.10 : כל הקונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.38
91	טבלה 5.11 : כל הקונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.41
95	טבלה 5.12 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.45
102	טבלה 5.13 : קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.53
106	טבלה 5.14 : קונפיגורציות חוקיות (1-35) של פאות של מכניזם מאיור 5.57
107	טבלה 5.15 : קונפיגורציות חוקיות (36-89) של פאות של מכניזם מאיור 5.57

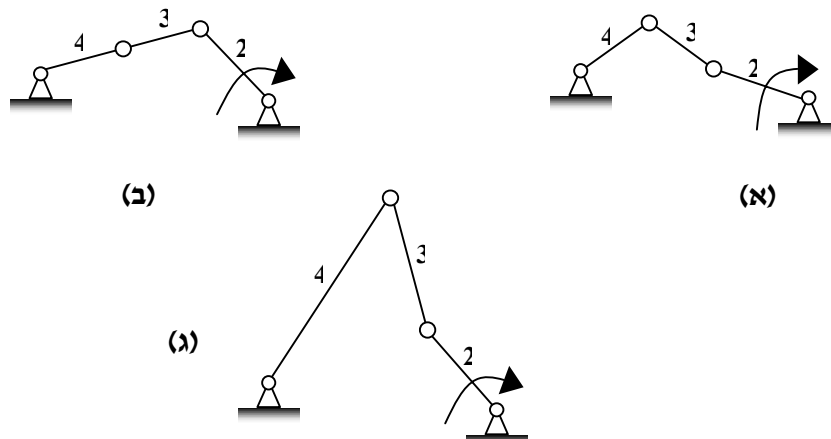
פרק 1

מבוא

פרק זה מתאר את החשיבות והשימושים של מצב מת של מכניזם. המטרה העיקרית של העבודה הזו היא למצוא ולאפיין את הסיבות שגורמות למכניזם בעל טופולוגיה מסוימת להיות במצב מת. עבודות שונות שנעשו ודווחו בספרות בתחום מוצגות בפרק.

1.1. הקדמה

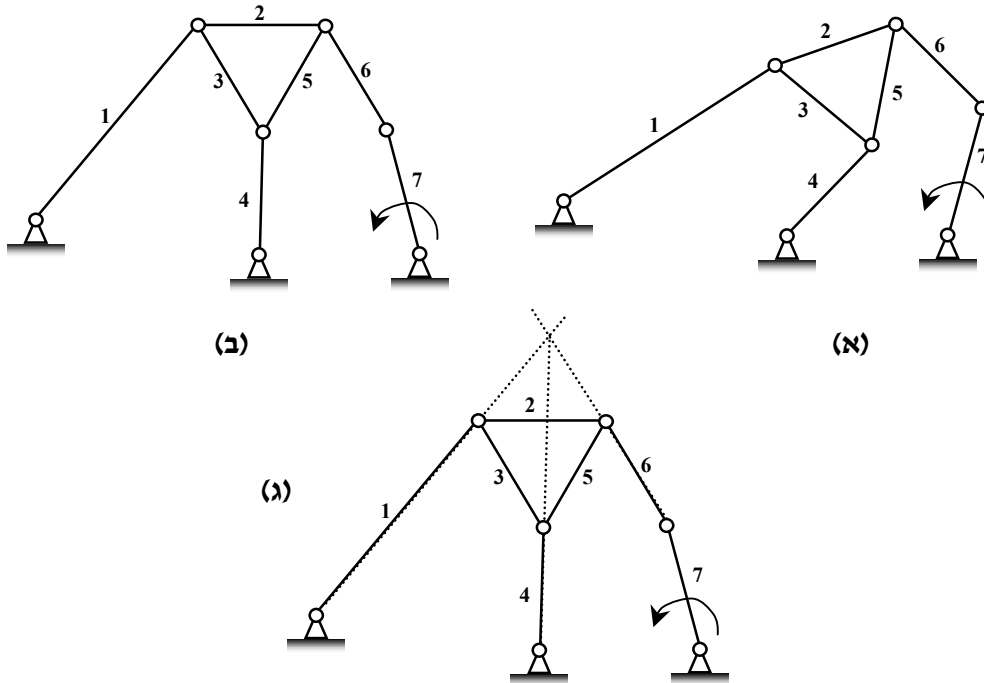
כידוע, החוליות במכניזם נעות במסלולים מוגדרים ומהירותן נקבעת על ידי מהירותה של חוליית הכניסה. נתייחס למצב מיוחד של המכניזם, אשר בו חוליות המכניזם מסתדרות בצורה כזו, שלא מאפשרת לחוליית הכניסה לבצע תנועה. מצב זה נקרא מצב מת של המכניזם או בחלק ממקורות הספרות המצב סינגולרי (סוג שני) (Gosselin and Angeles, 1990), (Hernández, et al., 2003). ניתן להתייחס אל מצב מת כאל בעיה טופולוגית או בעיה גיאומטרית. הבעיה הגיאומטרית היא בהינתן גיאומטריית המכניזם (האורכים של החוליות) לדעת האם מכניזם זה יגיע למצב מת. לדוגמא, מכניזם מאיור 1.1 (א), הנקרא מכניזם ארבע חוליות יגיע למצב מת, כאשר יגיע למצב המתואר באיור 1.1 (ב). לעומת זאת, אותו מכניזם, בגיאומטריה אחרת, כמתואר באיור 1.1 (ג), לעולם לא יגיע למצב זה. הבעיה הטופולוגית היא לדעת את מספר המצבים המתים שיכולים להיות למכניזם מסוים ומה מאפיין אותם. לדוגמא, למכניזם ארבע חוליות יכול להיות רק מצב מת אחד, המאופיין על ידי כך שחוליות 3 ו-4 מקבילות.



איור 1.1: דוגמא לבעיה גיאומטרית של מצב מת למכניזם ארבע חוליות (א) מכניזם במצב רגיל. (ב) מצב מת של המכניזם 1.1 (א). (ג) מכניזם ארבע חוליות שלא יגיע למצב מת.

דוגמא נוספת לבעיה גיאומטרית וטופולוגית מוצגת באיור 1.2. נתון מכניזם, הנקרא מכניזם Stephenson III (איור 1.2 (א)). אם נעשה סימולציה של התנועה של המכניזם, נקבל כי במצב שבאיור 1.2 (ב), חוליית הכניסה תעצור ומכניזם יהיה במצב מת. אם נשנה אורך של אחת החוליות, כדי לבדוק

אם המכניזם יגיע למצב מת נצטרך לעשות סימולציה שוב. מצד שני, אם ניקח את הטופולוגיה של המכניזם באיור 1.2 (א) ונבדוק את המצבים המתים הטופולוגיים האפשריים, נגלה כי ישנו מצב מת אחד למכניזם זה, שהמאפיין שלו הוא כי חיתוך המשכי החוליות 1, 4 ו- 6 נפגשים בנקודה אחת. (איור 1.2 (ג)).



איור 1.2: מכניזם Stephenson III במצבים שונים

(א) מכניזם מצב עבודה רגיל. (ב) מצב מת שהתקבל לאחר סימולציה של תנועת המכניזם 1.2 (א). (ג) המאפיין של מצב מת בטופולוגיה הנתונה הוא שהמשכי החוליות 1, 4 ו- 6 נפגשים בנקודה אחת.

לסיכום: בעיה גיאומטרית: הגיאומטריה של המכניזם נתונה והשאלה היא כמה מצבים סינגולריים יהיו למכניזם ספציפי זה ומה מיקום של כל החוליות בכל אחד מהמצבים. לעומת זאת, בעיה טופולוגית היא לדעת כמה מצבים סינגולריים יכולים להיות למכניזם עם טופולוגיה נתונה ומה הסיבה לכל מצב כזה.

המטרה העיקרית של העבודה הזו היא מציאת כל המצבים המתים הטופולוגיים של מכניזם נתון. בנוסף, עבודה זה מביאה נקודת מבט שונה מהמקובלת על הסינגולריות של מכניזם דרך המערכת הדואלית לו – המסבך.

1.2. מטרת המחקר

מטרה של העבודה הזו היא פיתוח שיטה למציאת כל המצבים המתים הטופולוגיים. שיטה זו תהיה תקפה גם למכניזמים, אשר יש קושי רב במציאת מרכזים רגעים, בניגוד לשיטות ידועות (Yan and Wu, 1989).

כדי שאפשר יהיה להפעיל את השיטה על מכניזמים עם מספר רב של חוליות, הושם דגש רב על פיתוח שיטה ברת מיחשוב. לכן המודלים המתמטיים שפותחו בעבודה זו מבוססים על תורת הגרפים, אחד הנושאים העיקריים ממתמטיקה בדידה, הידועה כבסיס מתמטי של מדעי המחשב. כיוון שמדובר על ייצוגים טופולוגיים, המטרה היא לאפיין את המצבים המתים, וכל זאת תוך כדי קבלת שיטה יעילה ובדיקת מספר מינימלי של מצבים. עבודה זו מבוססת על קשרים מתמטיים חדשים שפותחו לאחרונה, כגון הקשר הקיים בין מסבכים למכניזמים וכל זאת כדי למצוא את המצבים המתים במכניזם בעזרת המסבך הדואלי. שיטה למציאת מצבים מתים טופולוגיים של מכניזם תוכל לשמש את המתכנן יחד עם שיטות אחרות שעובדות על טופולוגיה. לדוגמא, השוואה בין מערכות קינמטיות שונות מבחינת קשיחות (rigidity), או מבחינת מרחב העבודה (workspace) (Rao, 1998), או מבחינת parallelism (Rao, 2004). במילים אחרות, מתכנן יוכל לבחור בין שני מכניזמים על בסיס מספר מצבים מתים פוטנציאליים והתנאים המאפיינים את אותם המצבים.

1.3. הגדרות למצב מת של מכניזם הקיימות בספרות

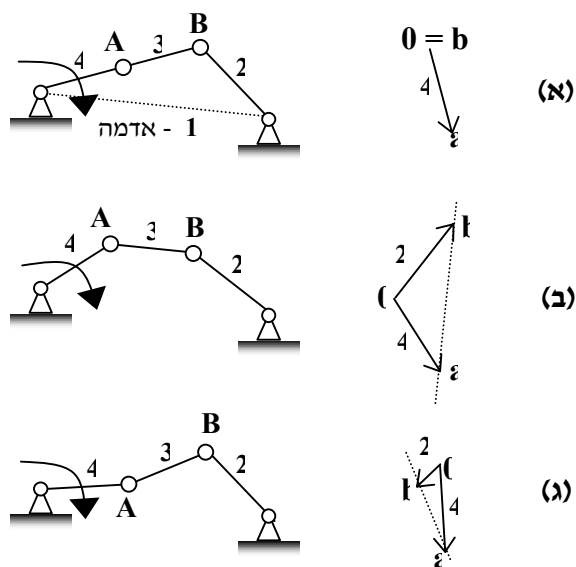
עבודה זו משתמשת במספר מונחים ידועים מתורת המכונות (פסן ו – שביט, 1975), (אלפרוביץ, 1970), (Bogelsack, et al., 1983).

כידוע, החוליות במכניזם נעות במסלולים מוגדרים ומהירותן נקבעת על ידי מהירותה של חוליית הכניסה (ראה נספח א). ברגע כלשהו, אחת החוליות של מכניזם יכולה להיעצר. ישנם מספר אפשרויות להגדרה של מצב זה של המכניזם:

מצב גבולי (Limit position) - מצב בו אחת החוליות של המכניזם נמצאת במצב גבולי.

מצב גבולי של חוליה (Limit position of a link) - מיקום של חוליה בו קואורדינטה המתארת את מיקומה ביחס לחוליה סמוכה היא מקסימלית או מינימלית.

לדוגמא, באיור 1.3 (א) המהירות של חוליה 2 היא 0 (לפי בבואת מהירות). ניתן להראות שחוליה 2 נמצאת במצב גבולי כי קצת לפני (איור 1.3 (ב)) וקצת אחרי (איור 1.3 (ג)), הסימן של מהירות של חוליה 2 משתנה.



איור 1.3: הדגמת מצב גבולי של מכניזם ארבע חוליות

חוליה 2 נמצאת (א) במצב גבולי ולפי בבואת מהירות מהירותה שווה לאפס. (ב) לפני מצב גבולי. (ג) אחרי מצב גבולי. ניתן לראות שסימן של מהירותה של חוליה 2 משתנה, ב – (ב) הכיוון הוא עם כיוון השעון וב – (ג) הכיוון הוא נגד כיוון השעון.

מצב מת (Dead-center position) - אם החוליה שנמצאת במצב גבולי הינה חוליית הכניסה של המכניזם, מצב זה נקרא מצב מת (Yan and Wu, 1989) של המכניזם. בחלק ממקורות הספרות מכניזם במצב מת נקרא גם **מכניזם תקוע (locked mechanism)** או מכניזם במצב סינגולרי (Gosselin and Angeles, 1990), (Hernández, et al., 2003).

הגדרה נוספת למצב מת של מכניזם היא: הנגזרת של מיקום של חוליית היציאה ביחס למיקום של חוליית הכניסה שווה לאפס (Hunt, 1978).

ניתן להגדיר מצב מת של מכניזם גם בעזרת תועלת מכנית.

תועלת מכנית (Mechanical Advantage) (Nayler, 1996) זהו יחס רגעי בין מומנט מתקבל לבין המומנט המושקע או בין מהירות זוויתית בכניסה לבין מהירות זוויתית ביציאה:

$$1.1 \quad MA = \frac{T_o}{T_i} = \frac{\omega_i}{\omega_o}$$

כאשר המכניזם נמצא במצב מת, המומנט המתקבל בחוליית היציאה הוא אפס. לכן ניתן לומר שלמכניזם תקוע תועלת מכנית שווה לאפס. בנספח ב מתוארת שיטה המבוססת על עובדה זו ועל שיטת המרכזים הרגועים (Yan and Wu, 1989) למציאת כל מצבים מתים של מכניזם מישורי.

כאשר שתיים (או יותר) חוליות של מכניזם נעות במהירות שווה, מצב זה נקרא **קונפיגורציה נייחת (סטציונרית)** (stationary configuration) של המכניזם (Yan and Wu, 1988). כמובן, שאם הראשונה מהחוליות האלה היא האדמה והשנייה היא חוליית הכניסה, זה מצב מת של המכניזם.

בחלק ממקורות הספרות מוגדר כי המכניזם אשר צריך לעבור דרך מצב מת במהלך עבודתו סובל מ- branch defect (Chase and Mirth, 1993). סוג שני של סינגולריות, שזה בעצם מצב מת של מכניזם, מוגדר כמצב, בו בזמן שחוליית הכניסה נעולה, חוליית היציאה יכולה לזוז (Gosselin and Angeles, 1990).

1.4. סיכום עבודות בנושא מצב מת של מכניזם

כפי שנאמר בהקדמה, ניתן להתייחס למצב מת של מכניזם כבעיה גיאומטרית או בעיה טופולוגית. בשלב זה נתייחס לעבודות הקשורות לפתרון בעיה גיאומטרית.

בסקירה שנערכה בשנת 2002 על ידי Balli and Chand (Balli and Chand, 2002) ניתן ללמוד על מחקרים שנערכו בשנים 1967-2002 בתחום של בעיות שונות שקיימות במכניזמים והדרכים למנוע את אותן בעיות עוד בזמן תכנון של המכניזם. בתחילת הפרק העוסק ב- branch defect, הם מצוטטים את Mirth and Chase (Mirth and Chase, 1995):

”No general rules are known for developing the description of the circuit and branch of an arbitrary single degree of freedom planar mechanism. It is necessary to describe the motion attributes of any particular mechanism on case by case basis.”

ישנם מספר מחקרים שבאים לענות על השאלה, האם מכניזם בעל גיאומטריה נתונה יגיע למצב מת, או במילים אחרות יסבול מ- branch defect : למכניזם מסוג Stephenson (Ting and Dou, 1996),

למכניזם בעל חמש חוליות, כאשר שניים מהחוליות הינן גלגלי שיניים (Ting and Dou, 1996), למכניזמים מורכבים תוך פרוק המכניזמים לתת קבוצות (Ting and Dou, 1998), תוך אנליזת תנועה אפשרית של חוליית הכניסה (BeloIU and Gupta, 1997).

בשנת 2000 הוצעה שיטה אנליטית למציאת נקודות בעייתיות (מצבים מתים בפרט) של מכניזם בעל גיאומטריה נתונה (Pan, *et al.*, 2000). שיטה לאנליזה קינמטית של מכניזם נתון, הכוללת חישוב דרגת חופש (כלומר, בדיקת סינגולריות) בכל צעד בעזרת מטריצה גיאומטרית (Geometric Matrix) הוצעה בשנת 2003 (Altuzarra, *et al.*, 2003), (Hernández, *et al.*, 2003).

בשנת 1990 נמצאה שיטה, המבוססת על יעקוביאן (Gosselin and Angeles, 1990) למציאת ובדיקת סוג הסינגולריות בשרשרת קינמטית. אבל, לפי (Hernández, *et al.*, 2003), שיטה זו אינה אפקטיבית למכניזמים בעלי מספר גדול של חוליות.

ניתן להשתמש בשיטות אלו בתכנון ממחושב, כאשר כל שלב הוא ניתוח של המכניזם עם מידות אחרות ואם נמצא שיש למכניזם branch defect, אזי ניתן לעבור לשלב הבא ולא לנתחו.

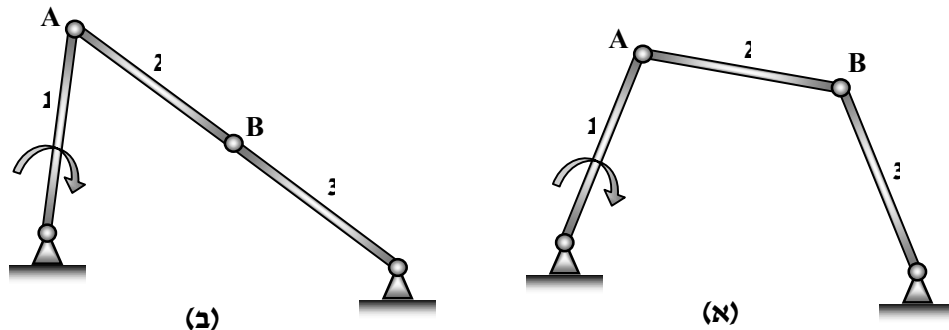
ישנם גם שיטות אנליטיות לתכנון מכניזם עם טופולוגיה נתונה בצורה כזו שלא יגיע למצב מת, לדוגמא, מכניזמים מסוג Watt I או Watt II (Mirth and Chase, 1993).

בשנת 1997 Gosselin and Wang הציעו אלגוריתם למציאת מצבים סינגולריים מסוג ראשון ושני ב – Parallel manipulators עם צמתי סיבוב. הפתרונות הם בצורת פולינום ורק במקרים פשוטים, ניתן לראות מה התנאים הגיאומטריים (כמו חוליות מקבילות או חיתוך של שלוש חוליות בנקודה אחת) הגורמים למצב הסינגולרי.

הפתרון של בעיה טופולוגית, כלומר השיטה לאפיון כל המצבים המתים הטופולוגיים במכניזם נתון הוצעה לראשונה על ידי Yan (Yan and Wu, 1989). השיטה מבוססת על מרכזי סיבוב רגועים והגדרה של מצב מת באמצעות תועלת מכנית (ראה סעיף 1.3). בנספח ב ישנו פרוט של השיטה עם הסבר ודוגמאות. בשנת 1988, נמצאה שיטה למציאת הקונפיגורציות הסטציונריות (טופולוגיות) של מערכת קינמטית מישורית (Yan and Wu, 1988). שיטה זו גם היא מבוססת על מרכזים רגועים.

1.5. שימושים של מצב מת של מכניזמים וחשיבותו

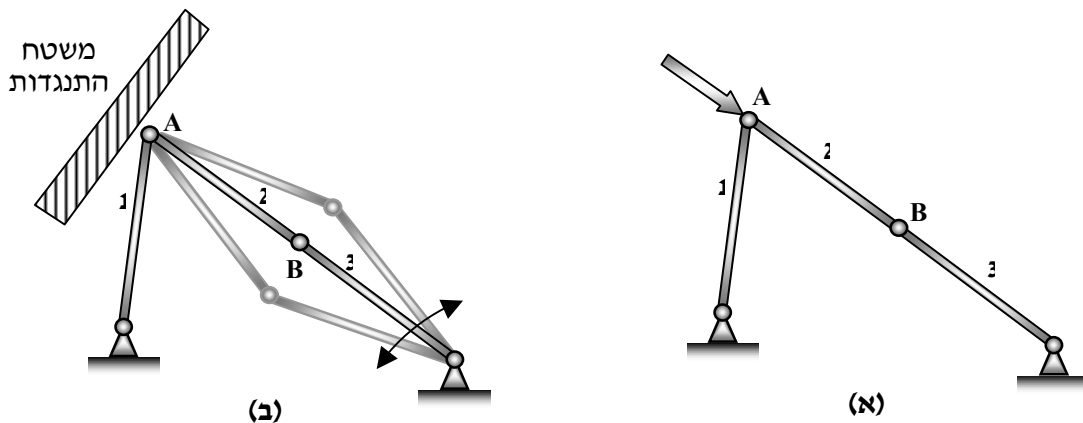
נסתכל על מכניזם ארבע חוליות מאיור 1.4.



איור 1.4: מכניזם ארבע חוליות
(א) במצב רגיל (ב) במצב מת.

נתייחס למספר תכונות של המכניזם (לדוגמא ניקח מכניזם מאיור 1.4) במצב מת:

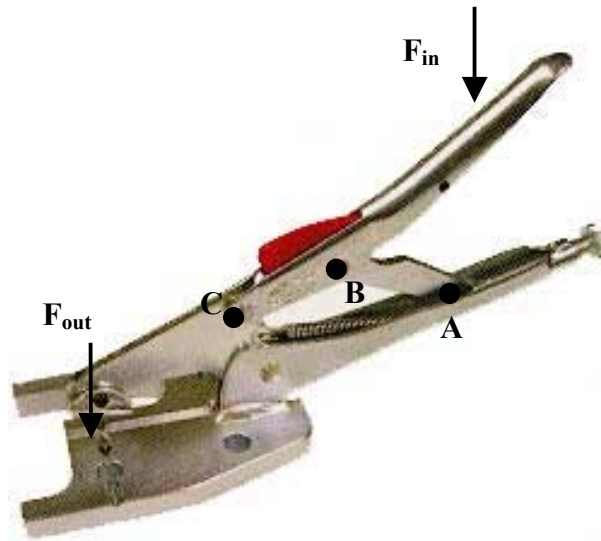
- אם נפעיל כוח כדי להניע את חולייה 1, כוח זה יפעל על נקודה A ויעבור דרך חוליות 2 ו-3 במילים אחרות ניתן להפעיל כוח על המכניזם (בנקודה A) והמכניזם יתנהג כמסבך (איור 1.5 (א)).



איור 1.5: דוגמאות לתכונות מיוחדות של מכניזם במצב מת
(א) מתנהג כמסבך – תכונה 1 (ב) הגבר כוח – תכונה 2.

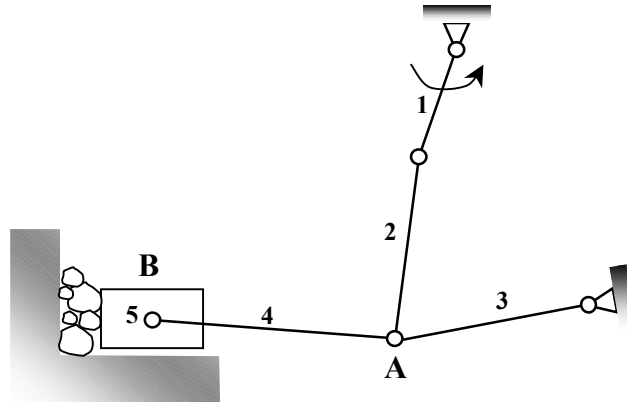
- אם ניתן תנועה קטנה לחוליה 3 (איור 1.5 (ב)), נקודה A עדיין תישאר במקומה. אם נשים משטח התנגדות בנקודה A, אז כל עוד A לא תזוז נקבל כוח אינסופי בנקודה זו. הסיבה לכך היא חוק שימור ההספק: מכפלה של כוח במהירות חייבת להיות גודל קבוע (אם אין משקל לחוליות וגם אין חיכוך בין החוליות). לכן, אם מהירות של חוליה 1 היא אפס אזי הכוח שהיא מפעילה הוא אינסופי. ניתן גם להגיד, כי כדי להניע את חוליות המכניזם, צריכה חוליה 1 להפעיל כוח אינסופי.
- אם נהפוך את חוליה 3 לחוליית הכניסה, מכניזם יצא ממצב מת ויחזור להיות מכניזם במצב רגיל. במילים אחרות ברגע שמכניזם הגיע למצב מת, ניתן להחליף את החולית הכניסה ולהחזיר את המכניזם למצב רגיל.

יש שימושים רבים לכל אחת משלושת התכונות של המכניזם שנמצא במצב מת. שימוש של תכונה 2 הוא הגבר כוח. מכניזמים המשתמשים בתכונה זו נקראים מכניזמים מסוג toggle (Chironis, 1965). ברור כי בפועל יש משקל עצמי לחוליות ויש ביניהן חיכוך והכוח שיתקבל בנקודה A לא יהיה אינסופי. אבל בכל זאת נקבל הגבר של כמה סדרי גודל. דוגמא אופיינית להגבר כוח תוך שימוש במצב מת של מכניזם הוא פלאייר (ראה איור 1.6). כאשר שלושת הנקודות A, B ו-C יהיו על קו אחד, היחס בין כוח ביציאה (F_{out}) לכוח בכניסה (F_{in}) יהיה מקסימלי.



איור 1.6: שימוש במצב מת של מכניזם - פלאייר.
 כאשר שלושת הנקודות A, B ו-C יהיו על קו אחד, היחס בין כוח ביציאה (F_{out}) לכוח בכניסה (F_{in}) יהיה מקסימלי.

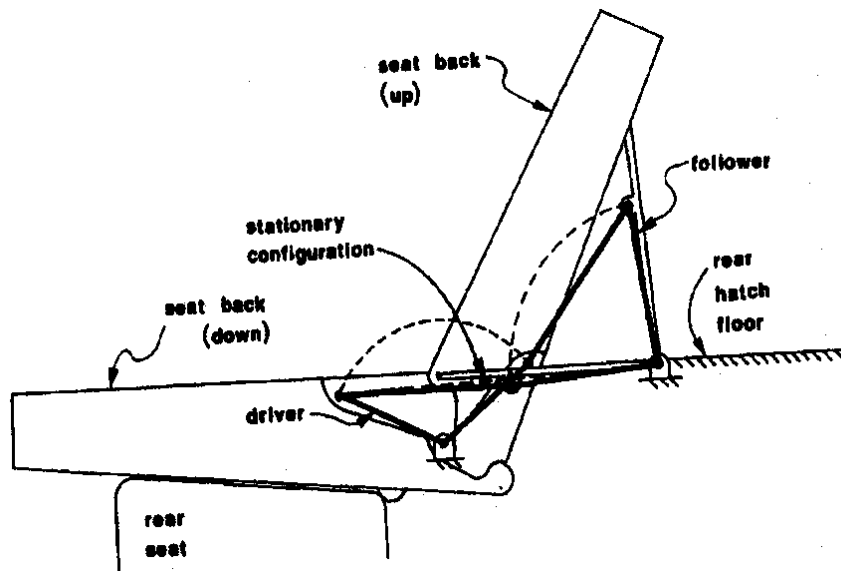
לדוגמא נוספת להגבר כוח ראה איור 1.7. נסתכל על מצב בו חולייה 1 מקבילה לחוליה 2. כמו באיור 1.6, התזוזה של נקודה A קטנה מאוד. באותו אופן, בגלל שגם חוליה 3 מקבילה לחוליה 4, התזוזה של נקודה B היא קטנה מאוד. לכן הכוח שנקודה B מפעילה על משטח ההתנגדות הוא גדול מאוד (ביחס לכוח שמופעל כדי להניע את חוליה 1). בדוגמא זו המכניזם משמש כמגרסת אבנים, אבל הוא יכול לשמש גם כמסחטת תפוזים, מפצח אגוזים וכו'.



איור 1.7: דוגמא לשימוש במצב מת של מכניזם להגבר כוח – מכניזם מסוג toggle כאשר חולייה 1 מקבילה לחולייה 2 תנועה של נקודה A קטנה מאוד. בגלל שגם חולייה 3 מקבילה לחולייה 4, התנועה של נקודה B היא קטנה מאוד, לכן הכוח שנקודה B מפעילה על משטח ההתנגדות הוא גדול מאוד (ביחס לכוח שמופעל כדי להניע את חולייה 1). בדוגמא זו המכניזם משמש כמגרסת אבנים.

המשמעות של תכונה 3 היא שאם המכניזם נמצא במצב מת, ניתן להחליף את חולית הכניסה והמכניזם יחזור למצב רגיל. יש שימושים רבים בתכונה זאת, כגון: מנעולים.

באיור 1.8 משורטט מושב של Ford Mustang משנת 1986 (Mirth and Chase, 1993), אשר מותקן על מכניזם ארבע חוליות. מכניזם זה תוכנן בצורה כזו שכאשר המושב יורד, מכניזם מגיע למצב מת וננעל, אחר כך משנים את חוליית הכניסה והמכניזם מעלה את המושב ושוב ננעל.



איור 1.8: שימוש במצב מת של מכניזם - מושב של Ford Mustang משנת 1986 המכניזם שמוריד ומעלה את המושב (מכניזם ארבע חוליות) תוכנן בין שני מצבים מתים.

דוגמא נוספת היא כן נסע של מטוס. כאשר המטוס נוחת, מכניזם נמצא במצב רגיל עד שהגלגל יורד למטה. ברגע שהגלגל ירד, המכניזם ננעל ולכן ניתן להפעיל עליו כוחות (שימוש בתכונה 1 האומרת שניתן להפעיל כוח על מכניזם במצב מת). לאחר הנחיתה מכניזם זה נושא את המשקל של המטוס.

כאשר המטוס ממריא, ניתן "לשבור" את הנעילה על ידי שינוי של חוליית הכניסה ואז המכניזם חוזר למצב רגיל ומעלה את הגלגל.

שימושים פרקטיים נוספים במכניזם במצב מת ניתן למצוא באטלס של Chironis (1965) Chironis וב – (Shigley and Uicker, 1995).

בעולם האקדמי ישנם דוגמאות לתכנון של מכניזם בין הנקודות המתות שלו, למשל עבודתם של Balli and Chand (2001) Balli and Chand (העוסקת בתכנון מכניזם בעל חמש חוליות (עם שתי דרגות חופש) בין נקודות הקיצוניות. עבודה נוספת שלהם בנושא שפורסמה בשנת 2003 (Balli and Chand, 2003) כוללת תכנון של מכניזם בעל שבע חוליות בין נקודות הקיצוניות שלו, כאשר הם משתמשים בנקודות המתות של מכניזם בעל שש חוליות מעבודתם של Yan and Wu (1989).

שימושים נוספים בעובדה שהמכניזם נתקע ונהיה מסבך רבים גם בתעשיית החלל כגון מבנים נפרסים (Pellegrino, S., et al., 2000).

עד עכשיו ראינו שימושים במצב מת של מכניזם. מצד שני צריך לציין, שכאשר נדרשת תנועה רציפה של כל החוליות במכניזם, נקודה מתה היא מצב לא רצוי וצריך למנוע אותו בזמן התכנון. אם המכניזם חייב לעבור דרך נקודה מתה במהלך עבודתו, ניתן לתכנן אותו בצורה כזו, שבמעבר עצמו תהיה לחוליית הכניסה אינרציה מקסימלית (Mirth, 1994), ולשם כך, צריך לדעת את המצבים המתים האפשריים של המכניזם.

כל האמור ל"על הוא עדות לחשיבות נושא המחקר הן באקדמיה והן בתעשייה.

פרק 2

תשתית מתמטית עליה מבוססת התיזה

פרק זה מתאר את הבסיס המתמטי לפיתוח השיטה למציאת מצבים מתים במכניזם דרך קשר הדואליות מתורת הגרפים שקיים בין מכניזמים למסבכים. קשר זה מבוסס על ייצוג של מכניזמים ומסבכים כמודלים מתמטיים המבוססים על תורת הגרפים: גרף זרימות (Flow Graph Representation - FGR) וגרף פוטנציאליים (Potential Graph Representation - PGR). שני מודלים אלו הוכחו להיות דואליים, לכן כל שתי מערכות הנדסיות המיוצגות ע"י מודלים אלו הן דואליות. כיוון שהוכח כי מסבכים מסוימים סטטית ניתנים להיות מיוצגים ע"י גרף זרימות ואילו מכניזמים ע"י גרף דואלי, התקבל הקשר הדואלי בין מסבכים למכניזמים.

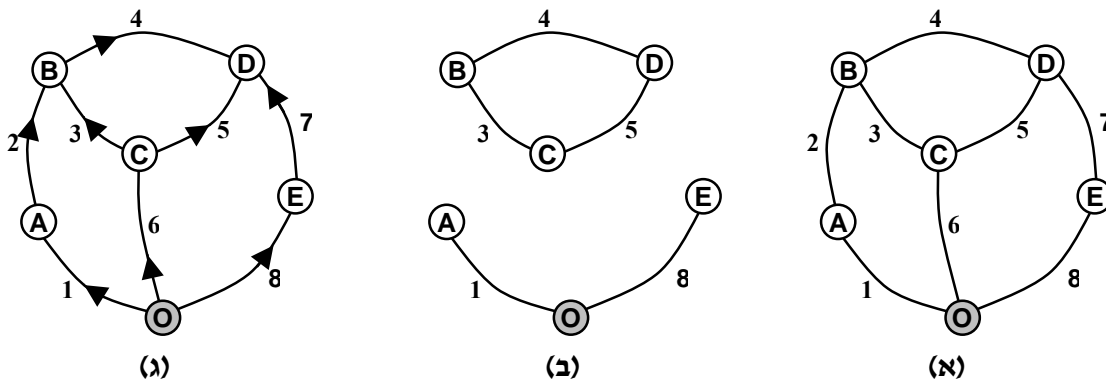
2.1. תשתית מתורת הגרפים

בסעיף זה מובא רקע תיאורטי בסיסי בתורת הגרפים, מקוצר וערוך לפי צורך העבודה. להרחבה בנושאים המצוינים כאן, ניתן להיעזר בכל ספר בסיסי בתורת הגרפים, כגון (Swamy and Thulasiraman, 1981).

גרף הוא אוסף של צמתים (nodes או vertices), שמספרם יסומן ב- v , המקושרים ביניהם על ידי קשתות (edges), שמספרן יסומן ב- e .

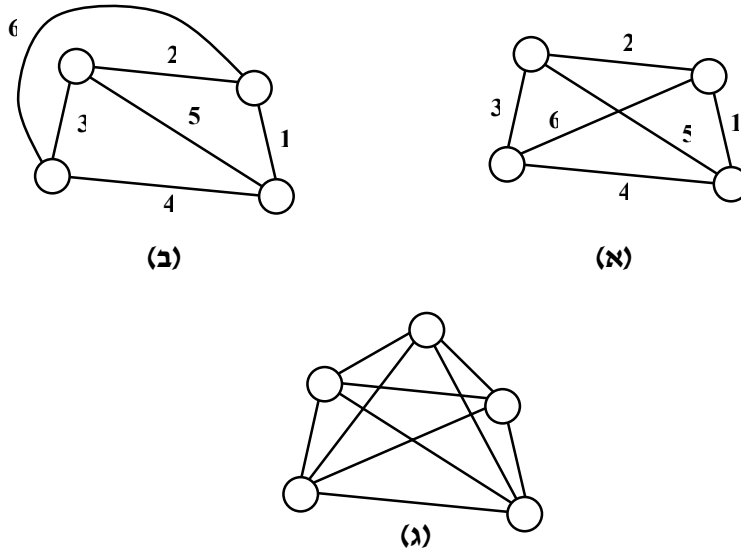
אם כל זוג צמתים בגרף מחובר במסלול קשתות, זאת אומרת שמכל צומת i ניתן להגיע לכל צומת j באמצעות הקשתות הקיימות בגרף, הגרף הוא גרף קשיר (connected graph). לדוגמה ראה גרפים מאיור 2.1: (א) קשיר (ב) לא קשיר.

ניתן לייחס כיוון לקשת: לציין אחד מצמתי הקצה של הקשת כצומת זנב (tail vertex), שממנו יוצאת הקשת, ואת צומת הקצה עליו נכנסת הקשת – כצומת הראש (head vertex). אם לכל קשת בגרף מיוחס כיוון, אזי הגרף הוא גרף מכוון (directed graph). גרף מאיור 2.1 (ג) הוא גרף מכוון.



איור 2.1: דוגמאות לגרפים
(א) קשיר, לא מכוון (ב) לא קשיר, לא מכוון (ג) מכוון.

גרף שניתן לצייר אותו בלי שהקשתות שלו נחתכות ביניהן, נקרא **גרף מישורי** (planar graph).

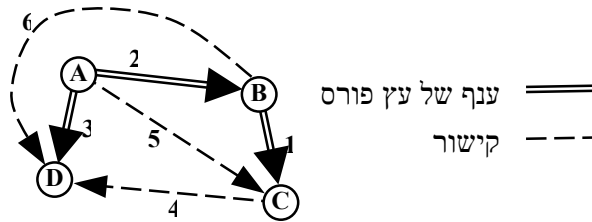


איור 2.2: דוגמאות לגרף מישורי ולא מישורי
 (א) זהו גרף מישורי כי כפי שניתן לראות ב- (ב) ניתן לצייר אותו כך שלא יהיה חיתוך בין קשתותיו. (ג) גרף לא מישורי כי אין אפשרות לצייר אותו כך שהקשתות שלו לא נחתכות.

מסלול (path) זוהי סדרה של צמתים וקשתות. דוגמא למסלול בין צמת o לצמת k :

$$P = \{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k\}$$

עץ (tree) גרף קשיר חסר מעגלים. **עץ פורס** – עץ שמכיל את כל צמתי הגרף. לאחר שנמצא את העץ הפורס בגרף נתון, כל הקשתות בגרף יתחלקו לענפי העץ (branch) וקישורים (chord). לדוגמא, קשתות 1, 2 ו-3 מאיור 2.3 הינן ענפי עץ פורס, וקשתות 4, 5 ו-6 קישורים.



איור 2.3: דוגמא לחלוקה של קשתות הגרף לענפי עץ פורס וקישורים

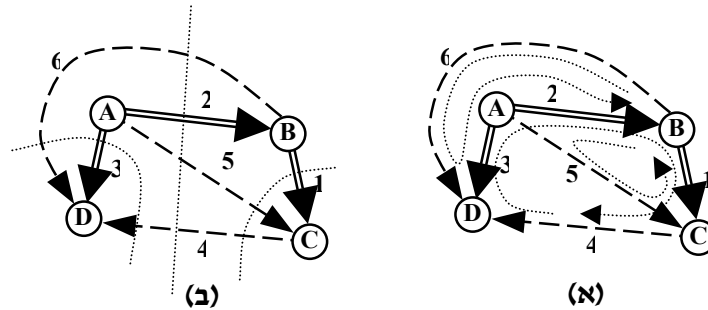
מעגל (circuit) זהו מסלול שבו צומת ההתחלה וצומת הסוף הם אותו צומת. מעגל אשר בו כל הקשתות חוץ מקשת אחת הן ענפים בעץ פורס, נקרא **מעגל בסיסי**. כל קישור מגדיר מעגל בסיסי אחד ויחיד, לדוגמא ראה איור 2.4 (א).

חתך (cutset) זוהי קבוצת קשתות בגרף, המקיימת:

1. הורדת קשתות של הקבוצה מהגרף הופכת אותו ללא קשיר

2. כל תת קבוצה שלה אינה מקיימת את תכונה 1.

חתך אשר רק אחת מהקשתות שלו הינה ענף בעץ פורס נקרא **חתך בסיסי**. כל ענף מגדיר חתך בסיסי אחד ויחיד, לדוגמא ראה איור 2.4 (ב).



איור 2.4: דוגמאות למעגלים בסיסיים וחתכים בסיסיים

(א) מעגלים בסיסיים: מעגל המוגדר על ידי קישור 4 כולל קשתות 1, 2, 3 ו-4. מעגל המוגדר על ידי קישור 5 כולל קשתות 1, 2 ו-5. מעגל המוגדר על ידי קישור 6 כולל קשתות 2, 3 ו-6. (ב) חתכים בסיסיים: חתך המוגדר על ידי ענף 1 כולל קשתות 1, 4 ו-5. חתך המוגדר על ידי ענף 2 כולל קשתות 2, 4 ו-5. חתך המוגדר על ידי ענף 3 כולל קשתות 3, 4 ו-6.

מטריצת מעגלים B (Circuit Matrix) מתארת את המעגלים הבסיסיים של הגרף. מספר העמודות של המטריצה שווה למספר הקשתות בגרף $(e(G))$ ומספר השורות בה שווה למספר הקישורים בגרף. איבר $[B_{ij}]$ יכול להיות +1, 0 או -1. איבר זה יהיה +1 אם קשת j נמצאת במעגל המוגדר על ידי קישור i וכיוונה בכיוון המעגל, -1 אם כיוונה מנוגד לכיוון המעגל ו-0 אם היא לא נמצאת במעגל. בנוסחה (2.1) ניתן לראות את מטריצת המעגלים של הגרף מאיור 2.3.

מטריצת החתכים Q (Cutset Matrix) מתארת את החתכים הבסיסיים של הגרף. מספר העמודות של המטריצה שווה למספר הקשתות בגרף $(e(G))$ ומספר השורות בה שווה למספר הענפים בעץ פורס $(v(G)-1)$. איבר $[Q_{ij}]$ יכול להיות +1, 0 או -1. איבר זה יהיה +1 אם קשת j נמצאת בחתך המוגדר על ידי ענף i וכיוונה בכיוון החתך, -1 אם כיוונה מנוגד לכיוון החתך ו-0 אם היא לא נמצאת בחתך. בנוסחה (2.1) ניתן לראות את מטריצת החתכים של הגרף מאיור 2.3.

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} bc \\ ab \\ ad \end{matrix} & \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 \qquad
 \begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} dc \\ ac \\ bd \end{matrix} & \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

אחת הדרכים המקובלות לייצוג טופולוגית הגרף (אילו צמתים מקושרים ביניהם) במחשב היא **מטריצת סמיכויות A** (Adjacency matrix) (Even, 1979).

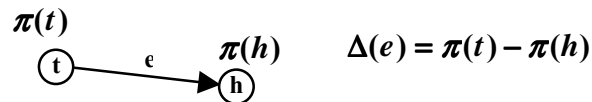
2.2. פוטנציאל וזרימה

סעיף 2.1 תיאר את הקשרים הטופולוגיים הקיימים בין אלמנטים בגרף. במילים אחרות, מהגרף או מהמטריצות המתארות אותו (למשל מטריצת החתכים או מטריצת המעגלים), ניתן ללמוד אילו צמתים מקושרים ביניהם על ידי קשתות או אילו קשתות מקושרות ביניהן על ידי צמתים. כדי לתאר מערכת הנדסית באמצעות גרף, לא די לייצג רק את הטופולוגיה שלה, אלא יש צורך בייצוג של ערכים פיסיקליים (כמו מהירויות, כוחות) ויחסים ביניהם (סכום של כוחות בחתך שווה לאפס או סכום מהירויות יחסיות במסלול סגור שווה לאפס). לכן, בנוסף לקשרים טופולוגיים, ישנם ערכי פוטנציאל וזרימה, שניתן לייחס לצמתים וקשתות של גרף ואז מתקבל ייצוג שיתאר את התנהגות המערכת המוצגת בצורה מלאה.

ניתן לייחס לכל צומת בגרף ערך **פוטנציאל** אופייני (π), שאחת המשמעותות שלו הוא מיקום הצומת במרחב הקשור לגרף. לדוגמא, אם הגרף מייצג רשת חשמלית, המרחב הקשור אליו הוא מרחב הפוטנציאל החשמלי. לכן, כל צומת יאופיין בפוטנציאל החשמלי של הנקודה ברשת שאותה הוא מייצג. מרחב זה הוא חד מימדי, ולכן הפוטנציאל המיוחס לצומת הוא סקלרי. אם המרחב הוא רב מימדי, פוטנציאל הצומת יהיה וקטור ערכים. פוטנציאל בצומת יכול לייצג תזוזה, מהירות, מחיר, וכו'.

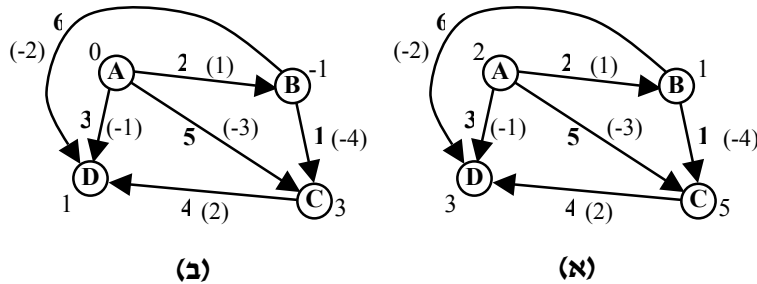
כל עוד שדה הפוטנציאל בגרף אינו תלוי בגורמים אחרים, פוטנציאל הצומת יכול להיקבע שרירותית, מבלי להשפיע על הפוטנציאלים של יתר הצמתים. מצד שני, לא ניתן להשפיע על פוטנציאל של צומת על ידי שינוי הפוטנציאלים של יתר הצמתים.

ההפרש בין פוטנציאלים של צמתים נקרא '**הפרש פוטנציאלים**' (Δ). הפרש פוטנציאלים על פני קשת הוא ההפרש בין פוטנציאל צומת הזנב לבין פוטנציאל צומת הראש (ראה איור 2.5).



איור 2.5: פוטנציאל בצמתים והפרש פוטנציאלים על קשת

בדרך כלל, משמעות ערך הפוטנציאל של צומת נקבעת לפי יחסו לפוטנציאלים של צמתים אחרים. לכן, ניתן לקבוע צומת אחד בגרף כצומת ייחוס שהפוטנציאל שלו הוא אפס, ואז לקבוע את הפרשי הפוטנציאלים של שאר הצמתים ביחס לצומת ייחוס (ראה איור 2.6).



איור 2.6: דוגמא לקביעת צומת ייחוס בגרף

ערכי הפוטנציאל רשומים ליד כל צומת, הפרשי הפוטנציאלים בקשתות רשומים בסוגריים ליד כל קשת. (א) פוטנציאלים של כל הצמתים נקבעו באופן שרירותי. הפרשי הפוטנציאלים בקשתות מחושבים לפי פוטנציאל בצומת הזנב פחות פוטנציאל בצומת הראש. (ב) צומת A בגרף 2.6 (א) נבחר כצומת ייחוס. כפי שניתן לראות באיור, לא חל כל שינוי בהפרשי הפוטנציאלים של הקשתות.

מלבד ערכי הפוטנציאל, שניתן לייחס לצמתי הגרף, ניתן לייחס לגרף גם זרימה (F). זרימה יכולה לייצג זרם חשמלי (חד מימדי), כוח, אנשים, וכו'.

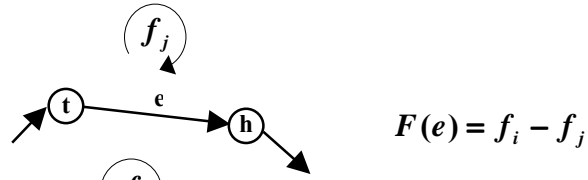
הזרימה היא מעבר של ערכים דרך קשתות הגרף, כך שבכל קשת זורם ערך אופייני מצומת הזנב לצומת הראש. זרימה היא תופעת רצף, ולא ניתן לקבוע זרימה לאורך קשת, או לאורך קטע כלשהו, מבלי לקבוע מסלול משלים דרכו תחזור הזרימה מצומת הראש לצומת הזנב (איור 2.7).



איור 2.7: זרימה בקשת

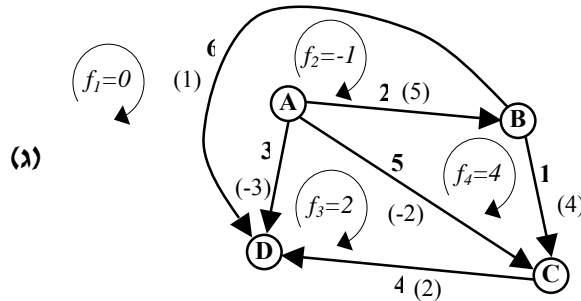
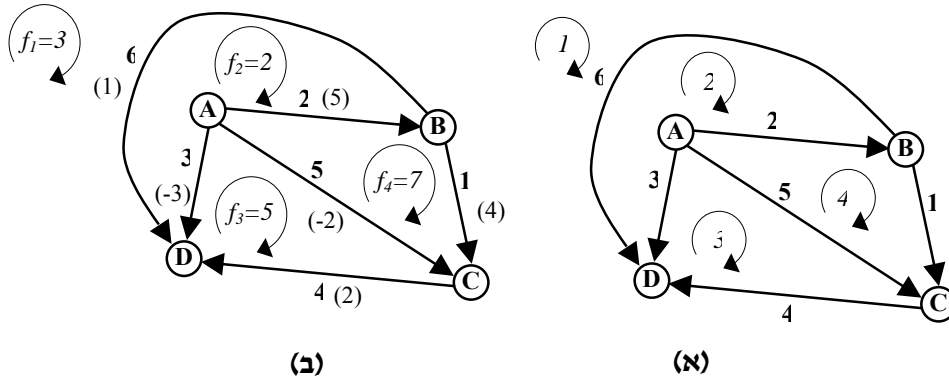
למעשה, כדי ליזום באופן שרירותי זרימה של ערך בגרף יש לציין מסלול סגור שבו יזרום הערך או במילים אחרות מעגל. ניתן למצוא בגרף מעגלים רבים, אך יש קבוצה מינימלית של מעגלים שהיא בלתי תלויה, ז"א ניתן לקבוע זרימה בכל אחד ממעגלי הקבוצה מבלי להשפיע על הזרימה בשאר המעגלים. מצד שני, גם לא ניתן להשפיע על ערך זרימה בכל אחת ממעגלי הקבוצה על ידי שינוי ערכי הזרימה ביתר המעגלים.

קבוצת המעגלים הבלתי תלויים הפשוטה ביותר בגרף מישורי היא קבוצת פאות הגרף (איור 2.9 (א)). פאה (face) זהו מעגל ללא קשתות פנימיות (קשתות שחותכות אותו למעגלים קטנים יותר). ניתן להראות כי הזרימה בקשת שווה להפרש ווקטורי בין זרימות בשתי הפאות הסמוכות לקשת (ראה איור 2.8).



איור 2.8: חישוב ערך הזרימה בקשת

באיור 2.9 (א) מסומנות פאות בגרף, כאשר: פאה 1 היא פאה חיצונית הכוללת קשתות 1, 4 ו-6, פאה 2 כוללת קשתות 2, 3 ו-6, פאה 3 כוללת קשתות 3, 4 ו-5 וכ"ו. ניתן לקבוע פאה אחת בגרף כפאת ייחוס שזרימה בה היא אפס, ואז לקבוע את הזרימות בשאר פאות ביחס לפאת ייחוס (ראה איור 2.9 (ב-ג)).



איור 2.9: מציאת פאות בגרף, קביעת זרימה בפאות וקביעת פאת ייחוס

(א) מציאת הפאות בגרף. (ב) ערכי הזרימה בפאות רשומים בכל פאה, ערכי הזרימה בקשתות רשומים בסוגריים ליד כל קשת. זרימות בכל הפאות נקבעו באופן שרירותי. ערכי הזרימה בקשתות מחושבים לפי הפרש ווקטורי בין הפאות הסמוכות. (ב) פאה 1 בגרף 2.9 נבחרה כפאת ייחוס. כפי שניתן לראות באיור, לא חל כל שינוי בערכי הזרימה בקשתות.

2.3. גרף זרימות

גרף זרימות (Flow Graph) (Shai, 2001a) הוא גרף, שמתייחסים רק לזרימות בו והזרימות בו מקיימות כמובן את חוק הזרימות. לפי **חוק הזרימות**, סכום ווקטורי של הזרימות בכל בחתך בגרף שווה לאפס. חוק זה הינו הכללה רב ממידית של חוק הזרמים של קירכהוף (KCL – Kirchoff's Current Law). חוק הזרימות בצורה מטריציאית: $Q \cdot F = 0$, כאשר F הינו ווקטור זרימות.

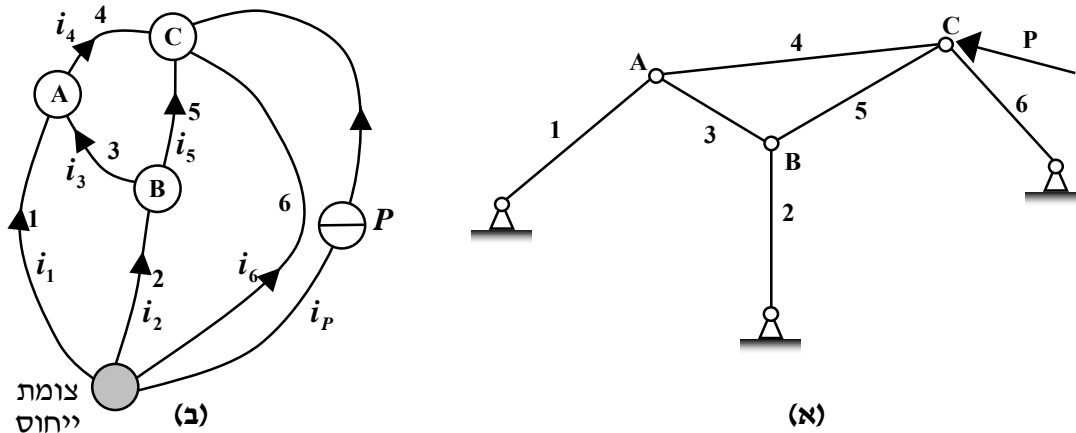
2.4. ייצוג של כוחות במסבך כגרף זרימות

ניתן לייצג את הכוחות הפועלים במסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות (Shai, 2001a), (Shai, 2001b). בניגוד לזרמים במעגל חשמלי, כוחות במוטות המסבך הם דו או תלת ממדיים. לכן, הזרימות בקשתות הגרף, המייצג את המסבך, יהיו גם דו או תלת ממדיים. לפי חוק הזרימות, סכום ווקטורי של הזרימות בכל חתך בגרף שווה לאפס. כוחות במוטות המסבך מקיימים את חוק הזרימות, כידוע מסטטיקה: סכום ווקטורי של כוחות סביב כל צומת שווה לאפס.

תהליך בניית גרף זרימות לייצוג של כוחות במסבך:

1. לכל צומת במסבך צייר צומת בגרף.
2. לכל מוט במסבך צייר קשת בגרף, המחברת בין שני צמתים, המייצגים את צמתי הקצה של המוט במסבך. לכל קשת בגרף, המייצגת מוט, התאם ווקטור יחידה ששווה לכיוון הכוח הפועל באותו מוט.
3. צייר צומת ייחוס בגרף המייצג אדמה.
4. ייצג כל כוח חיצוני על ידי קשת עם מקור זרימה שכיוונה מצומת ייחוס אל הצומת המייצג את הנקודה עליה מופעל הכוח.

דוגמא לייצוג כוחות במסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות מוצגת באיור 2.10.



איור 2.10: דוגמא לייצוג כוחות במסבך על ידי גרף זרימות (א) מסבך מסוים סטטית (ב) ייצוג של הכוחות הפועלים במוטות המסבך באמצעות גרף זרימות.

חשוב לציין שגרף זרימות, שמייצג את הכוחות במסבך מסוים סטטית, שומר גם על הקשרים הטופולוגיים וגם על גיאומטריה של המסבך. קשרים טופולוגיים מתארים איזה מוטות מחוברים לאיזה צמתים (למשל בעזרת מטריצת סמיכויות). הגיאומטריה של המסבך במקרה זה הם השיפועים של כל המוטות ושל הכוח החיצוני.

ניתן גם לייצג את המסבך כגרף התנגדות (Shai, 2001b), כאשר הזרימות בגרף שוות לכוחות במוטות ופוטנציאלים של צמתים שווים לתזוזות צמתי המסבך.

2.5. גרף פוטנציאלים

גרף פוטנציאלים (Potential Graph) (Shai, 2001a) הוא גרף, שמתייחסים רק לפוטנציאלים בו והפוטנציאלים בו מקיימים, כמובן, את חוק הפוטנציאלים. לפי חוק הפוטנציאלים, סכום של הפרשי הפוטנציאלים על הקשתות בכל אחת ממעגלי הגרף שווה לאפס. חוק זה הינו הכללה רב ממידית של חוק הפוטנציאלים של קירכהוף (KVL – Kirchoff's Voltage Law). חוק הפוטנציאלים בצורה מטריציונית: $B \cdot \Delta = 0$, כאשר Δ הינו וקטור הפרשי הפוטנציאלים.

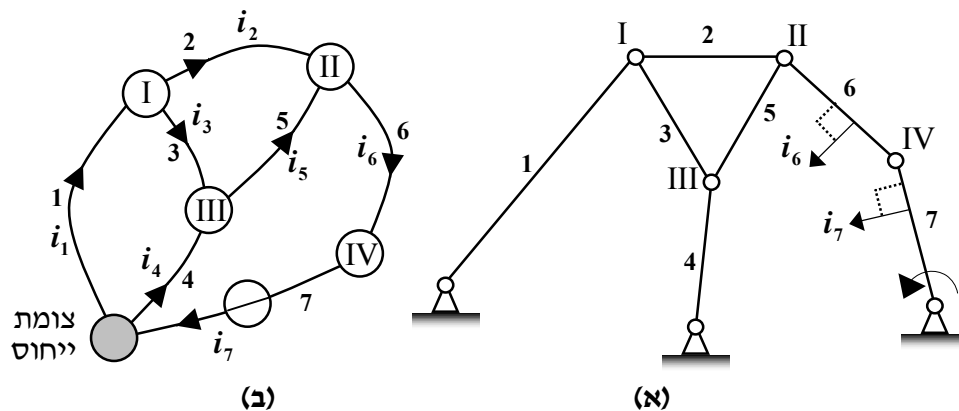
2.6. ייצוג של מהירויות במכניזם כגרף פוטנציאלים

ניתן לייצג את המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם בעל דרגת חופש אחת באמצעות גרף פוטנציאלים (Shai, 2001a), (Shai, 2001b). בניגוד לפוטנציאלים במעגל חשמלי, מהירויות של חוליות המכניזם הן דו או תלת ממדיות. לכן, הפוטנציאלים בצמתי הגרף המייצג את המסבך יהיו גם דו או תלת ממדיים. לפי חוק הפוטנציאלים, סכום ווקטורי של הפרשי הפוטנציאלים בכל מעגל בגרף שווה לאפס. המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם מקיימות את חוק הפוטנציאלים – כידוע מקינמטיקה: סכום ווקטורי של המהירויות היחסיות של חוליות בכל מעגל שווה לאפס. כידוע מקינמטיקה, אם חוליה של מכניזם היא קשיחה, אז כיוון המהירות היחסית של החוליה מאונך לכיוון החוליה.

תהליך בניית גרף פוטנציאלים לייצוג של מהירויות במכניזם:

1. לכל צומת במכניזם צייר צומת בגרף
2. לכל חוליה במכניזם צייר קשת בגרף, המחברת בין שני צמתים, המייצגים את צמתי הקצה של החוליה במכניזם. לכל קשת בגרף, המייצגת חוליה, תתאים ווקטור יחידה ששווה לכיוון המהירות של אותה חוליה. כיוון זה יהיה מאונך לכיוון החוליה.
3. צייר צומת ייחוס בגרף המייצג אדמה.
4. ייצג את חולית הכניסה על ידי קשת עם מקור הפרש פוטנציאלים.

דוגמא לייצוג מהירויות במכניזם באמצעות גרף פוטנציאלים מוצגת באיור 2.11.



איור 2.11: דוגמא לייצוג מהירויות במכניזם על ידי גרף פוטנציאלים
(א) מכניזם בעל דרגת חופש אחת (ב) ייצוג של מהירויות של חוליות המכניזם באמצעות גרף פוטנציאלים.

חשוב לציין שגרף פוטנציאלים, שמייצג את המהירויות במכניזם, שומר גם על הקשרים הטופולוגיים וגם על גיאומטריה של המכניזם. קשרים טופולוגיים מתארים איזה חוליות מחוברות לאיזה צמתים (מטריצת סמיכויות). הגיאומטריה של המכניזם במקרה זה הם השיפועים של כל החוליות.

2.7. גרף דואלי

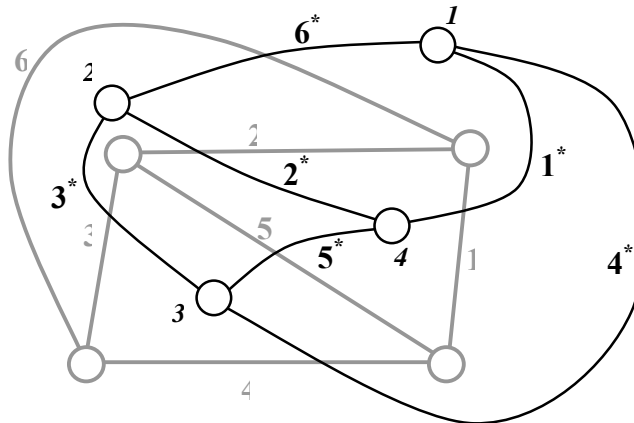
לסיום רקע תיאורטי על תורת הגרפים יוצג כלי טופולוגי חשוב – הגרף הדואלי (dual graph)) (Gibbons, 1985). הגרף הדואלי הוא עוד ביטוי לסימטריה חזקה שיש בין התנהגות הפוטנציאלים והתנהגות הזרימות בגרף.

גרף דואלי ניתן לבנות לכל גרף מישורי. הגרף המקורי ייקרא 'הגרף הפרימאלי'.

תהליך בניית גרף דואלי (לגרף לא מכוון):

1. מצא את כל הפאות בגרף פרימאלי.
2. לכל פאה בגרף הפרימאלי, כולל פאת הייחוס, צייר צומת בגרף הדואלי.
3. לכל קשת בגרף הפרימאלי, המבדילה בין שתי פאות, צייר קשת בגרף הדואלי, המחברת בין הצמתים המתאימים לשתי הפאות.

איור 2.12 מראה את בניית הגרף הדואלי לגרף 2.2 (ב).



איור 2.12: דוגמא לבניית גרף דואלי

אם הגרף הפרימאלי הוא גרף פוטנציאלים, הרי שערך הפוטנציאל של צומת בגרף הפרימאלי יהיה שקול לערך הזרימה בפאה המתאימה בגרף הדואלי, ולהיפך. לכן, ערך הזרימה בקשת בגרף הפרימאלי הוא ערך הפרש הפוטנציאלים בקשת המתאימה בגרף הדואלי ולהיפך. לכן, הגרף הדואלי של גרף זרימות שומר על חוק הפוטנציאלים ואילו גרף דואלי של גרף פוטנציאלים שומר על חוק הזרימות. בצורה מטריציאית, אם גרף G הוא גרף זרימות וגרף G^* הוא גרף דואלי אזי:

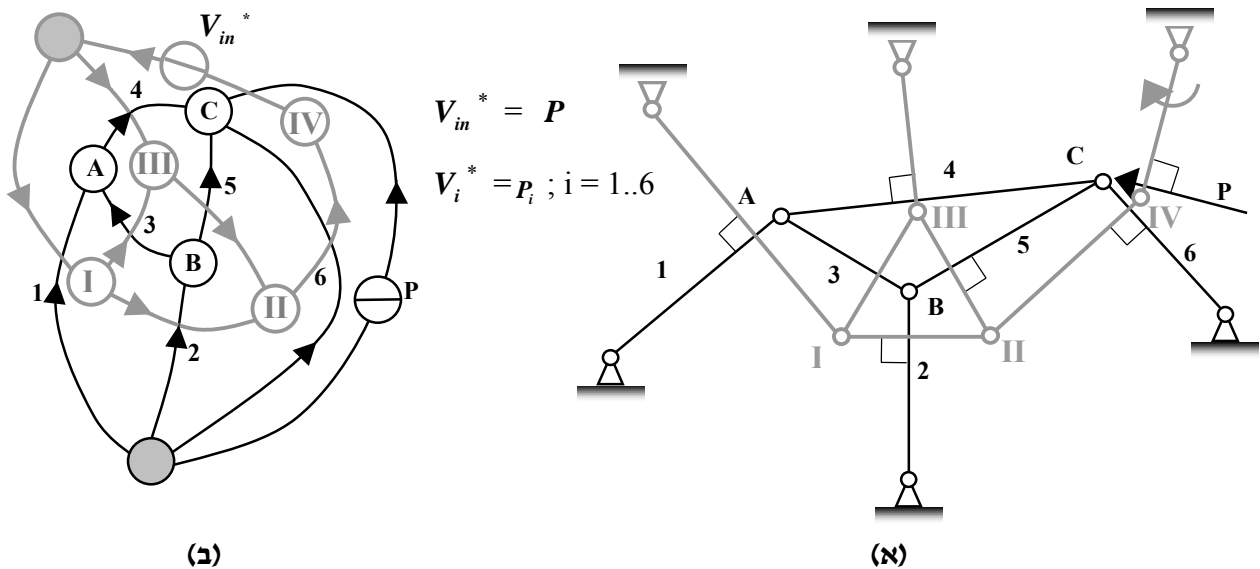
$$B(G^*) = Q(G)$$

$$\Delta(G^*) = F(G)$$

2.2

2.8. קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים

כפי שצוין בסעיף 2.6, ניתן לייצג את תמונת המהירויות היחסיות של חוליות במכניזם בעל דרגת חופש אחת באמצעות גרף פוטנציאלים. מצד שני, לפי סעיף 2.4, ניתן לייצג את תמונת הכוחות במוטות של מסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות. מכיוון שייצוג פוטנציאלים וייצוג זרימות הם שני ייצוגים דואליים, זה מוכיח דואליות בין שתי המערכות: מכניזם בעל דרגת חופש אחת ומסבך מסוים סטטית. אם נסתכל על הייצוגים הגרפיים של מסבך באיור 2.10 ומכניזם באיור 2.11 נראה ששני המערכות האלו הינן מערכות דואליות (ראה איור 2.13). במילים אחרות לכל מכניזם בעל דרגת חופש אחת ניתן לבנות מסבך דואלי כך, שהכוחות במסבך הדואלי יהיו שווים (גם מבחינת ערכים וגם מבחינת כיוונים) למהירויות יחסיות של החוליות במכניזם. הוכחות והסבר מפורט יותר ניתן למצוא (Shai, 2001a) – ב.

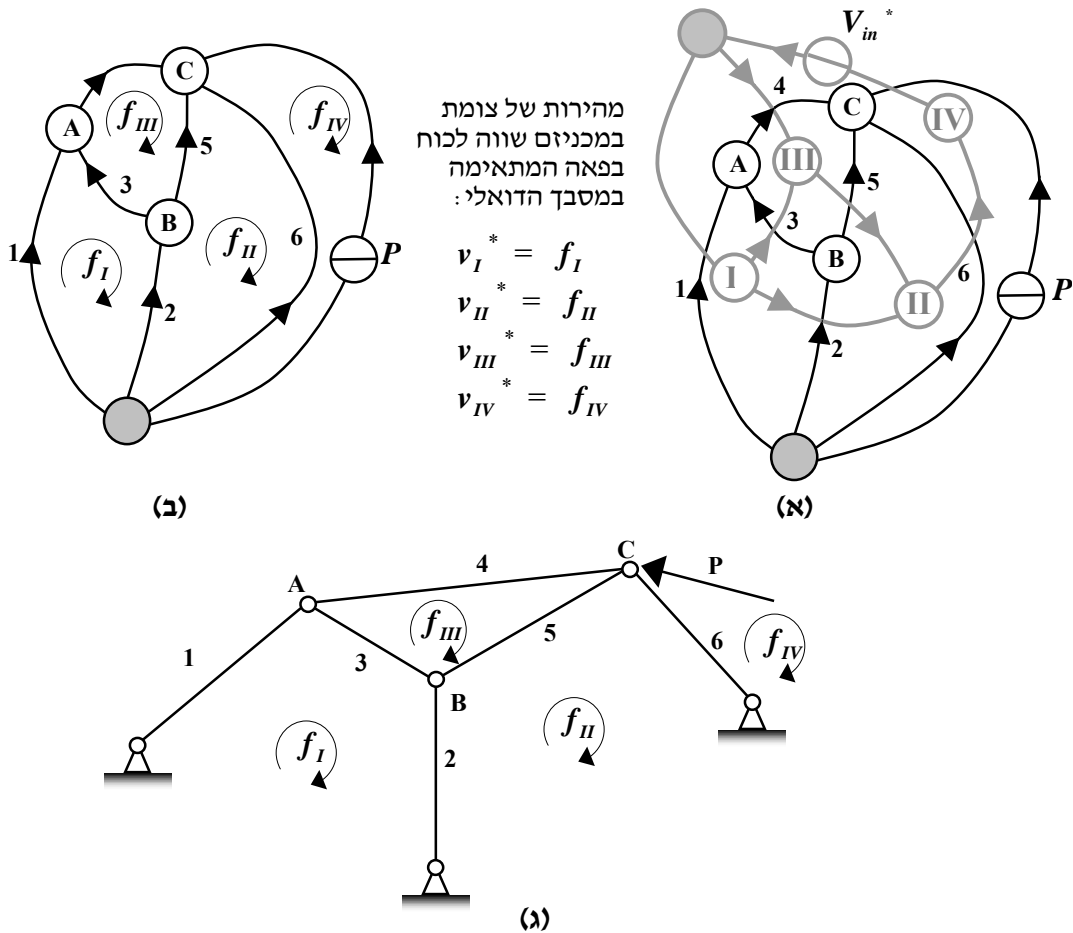


איור 2.13: הדגמה של קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים

(א) שתי המערכות דואליות: המסבך (שחור) והמכניזם (אפור). חוליות המכניזם מאונכות למוטות מתאימים של המסבך, כי מהירות יחסית של חוליה מאונכת לכיוון החוליה. מהירות יחסית של חוליה במכניזם שווה לכוח במוט המתאים במסבך הדואלי. (ב) שני גרפים דואליים כאשר הגרף השחור מייצג את הכוחות במוטות במסבך והגרף האפור מייצג את תמונת המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם.

מצד שני, לפי כלל הדואליות של תורת הגרפים (Gibbons, 1985), לכל פאה בגרף מקורי מתאים צומת בגרף הדואלי. לזרימה בפאה של הגרף המקורי (גרף זרימות), המייצג את הכוחות במוטות המסבך) מתאים פוטנציאל בצומת של הגרף הדואלי (גרף פוטנציאלים), המייצג את המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם). פוטנציאל בצומת במקרה זה שווה למהירות המוחלטת של צומת במכניזם. הזרימה בפאה בגרף זרימות מייצגת כוח הפועל בפאה! לכן המשמעות של המהירות המוחלטת של צומת במכניזם היא כוח הפועל בפאה של המסבך הדואלי (ראה איור 2.14). כך התגלה משתנה כוח חדש שנקרא **כוח בפאה** (Shai, 2002).

כוח בפאה הינו כלי חשוב בעבודה זו, כי כוח בפאה קיים בכל מערכת סטטית, וכפי שנאמר בסעיף 1.5, מכניזם במצב מת הינו מערכת סטטית.



איור 2.14: הדגמה לקבלת משתנה כוח חדש – כוח בפאה מתוך דואליות בין מסבכים למכניזמים
(א) שני גרפים דואליים מאיור 2.13 (ב). (ב) זרימות בפאות של גרף זרימות שוות לפוטנציאלים בצמתים של
הגרף הדואלי (ג) זרימות בפאות של גרף הזרימות מייצגות את הכוחות הפועלים בפאות של המסבך.

נסכם את קשר הדואליות הזה במשפט הבא: לכל מכניזם בעל דרגת חופש אחת ניתן למצוא מסבך דואלי, כך שתמונת מהירויות של החוליות במכניזם תהיה זהה לתמונת הכוחות במוטות של המסבך הדואלי.

מעכשיו ניתן לתרגם את כל השיטות הקיימות למציאת כוחות במסבך לשיטות למציאת מהירויות במכניזם דואלי. ישנם מקרים בהם קשה לראות תכונה מסוימת במסבך, אך ניתן לראות אותה במכניזם הדואלי או להיפך (Shai, 2001a).

פרק 3

מציאת מצבים מתיים (Dead Centers) של מכניזם באמצעות שיטת תזוזת הצמתים

עד כה ראינו כי לכל מסבך מסוים סטטית קיים מכניזם דואלי ולהיפך, כאשר כוח במוט במסבך מתאים למהירות יחסית של חוליה המתאימה במכניזם הדואלי. כעת, על בסיס התשתית מתורת הגרפים יורחב הקשר וידווח פה לראשונה על הקשר החדש בין תזוזות צמתי המסבך והכוחות הנוצרים במכניזם הדואלי. מתי יש במכניזם כוחות? כאשר הוא תקוע. מכאן, פותחה שיטת תזוזת הצמתים, שעל בסיס תזוזות במסבך הדואלי מאתרת את הקונפיגורציות של המכניזם, בהן יש כוחות, דהיינו, הוא במצב מת.

3.1. ייצוג של תזוזות במסבך כגרף פוטנציאלים

כפי שנאמר בסעיף 2.2, הפוטנציאלים בגרף יכולים לייצג תזוזות. בייצוג של תזוזות המסבך באמצעות גרף פוטנציאלים, הפוטנציאל של צומת בגרף מייצג את התזוזה המוחלטת של הצומת המתאימה של המסבך. הפרש הפוטנציאלים על קשת בגרף מייצג את התזוזה היחסית של המוט המתאים במסבך, שזהו בעצם הפרש ווקטורי בין תזוזות של קצוות של אותו המוט.

חוק הפוטנציאלים מתקיים, כמובן, כי לפי חוק הקומפטיביליות (תאימות) (Compatibility Law) (Au and Christiano, 1993), סכום הפרשי התזוזות היחסיות בכל מעגל שווה לאפס.

להלן תהליך בניית גרף פוטנציאלים לייצוג של תזוזות במסבך:

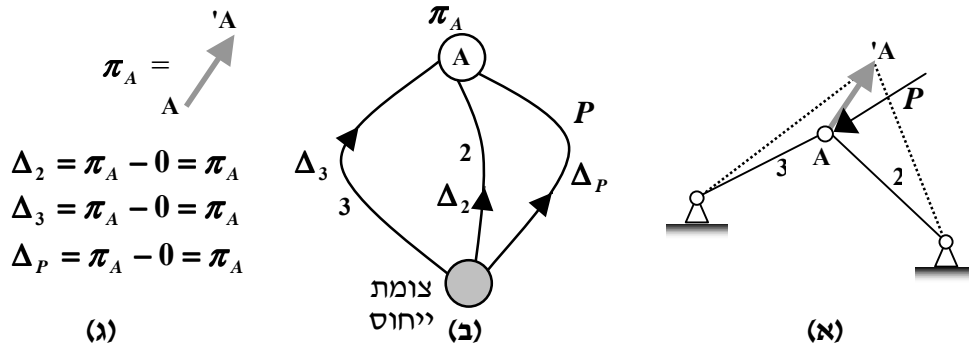
1. לכל צומת במסבך צייר צומת בגרף.

2. לכל מוט במסבך צייר קשת בגרף, המחברת בין שני צמתים, המייצגים את צמתי הקצה של המוט במסבך. לכל קשת בגרף, המייצגת מוט, תתאים ווקטור יחידה ששווה לכיוון התזוזה היחסית של אותו המוט.

3. צייר צומת ייחוס בגרף המייצג את האדמה.

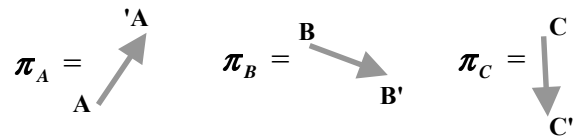
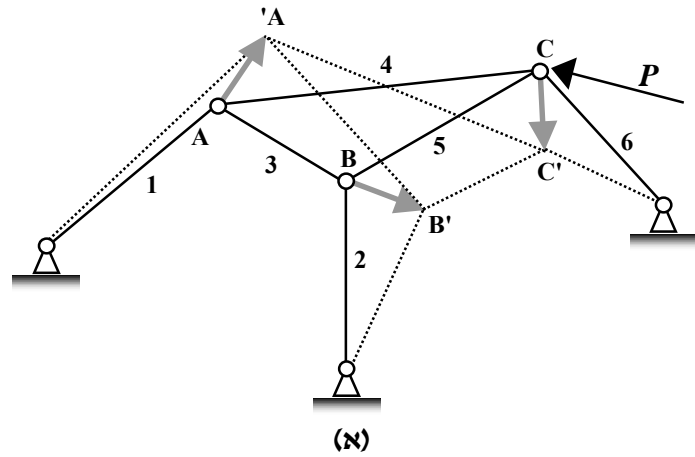
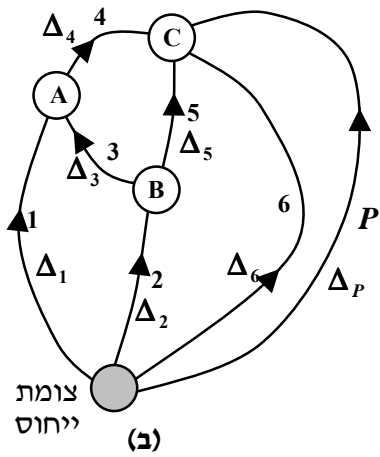
הפוטנציאל של צומת הייחוס שווה, כמובן לאפס.

דוגמא לייצוג תזוזות במסבך באמצעות גרף פוטנציאלים מוצגת באיורים 3.1 ו- 3.2.



איור 3.1: דוגמא 1 לייצוג תזוזות במסבך באמצעות גרף פוטנציאלים

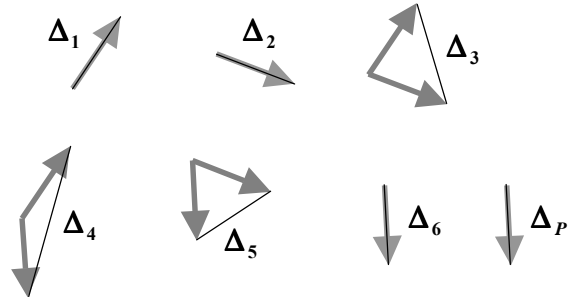
(א) מסבך מסוים סטטית, כאשר לצומת A ניתנה תזוזה שרירותית. (ב) ייצוג של תזוזות המסבך 3.1 (א) ע"י גרף פוטנציאלים. (ג) חישוב של הפרשי הפוטנציאלים על גבי קשתות הגרף שמייצגות את ההזזות היחסיות של מוטות מתאימים.



(ג)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \pi_A \\ \Delta_2 &= \pi_B \\ \Delta_3 &= \pi_A - \pi_B \\ \Delta_4 &= \pi_A - \pi_C \\ \Delta_5 &= \pi_B - \pi_C \\ \Delta_6 &= \pi_C \\ \Delta_P &= \pi_C \end{aligned}$$

חישוב של הפרש פוטנציאלים על הקשתות:



איור 3.2: דוגמא 2 לייצוג תזוזות במסבך באמצעות גרף פוטנציאלים

(א) מסבך מסוים סטטית אשר לכל אחד מהצמתים שלו ניתנה תזוזה. (ב) ייצוג של תזוזות המסבך 3.2 (א) ע"י גרף פוטנציאלים. (ג) חישוב של הפרשי הפוטנציאלים על גבי קשתות הגרף שמייצגות את ההזזות היחסיות של מוטות מתאימים.

3.2. ייצוג של כוחות במכניזם במצב מת כגרף זרימות

כפי שהוסבר בסעיף 1.5, מכניזם במצב מת הופך למסבך. חוליית הכניסה אינה יכולה להניע את שאר החוליות, לכן היא מפעילה עליהן כוח. כוח זה יעבור דרך החוליות האחרות לאדמה כמו דרך מוטות המסבך. בסעיף 2.4 מתואר תהליך ייצוג כוחות במסבך על ידי גרף זרימות. מכיוון שמכניזם במצב מת הופך למבנה, ייצוג הכוחות בו על ידי גרף זרימות דומה לייצוג כוחות במסבך.

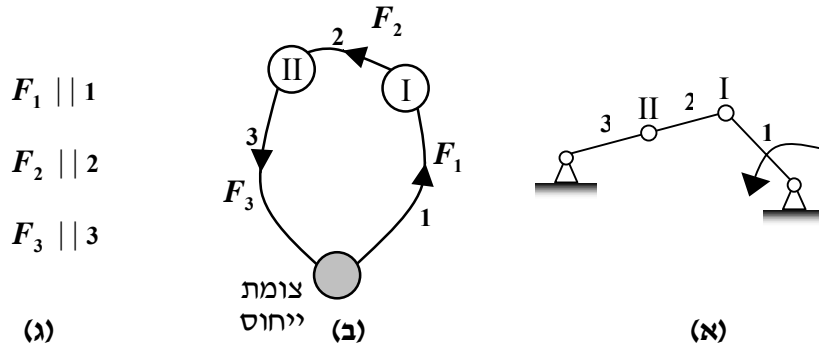
להלן תהליך בניית גרף זרימות לייצוג של כוחות במכניזם במצב מת:

1. לכל צומת במכניזם צייר צומת בגרף.

2. לכל חוליה במסבך צייר קשת בגרף, המחברת בין שני צמתים, המייצגים את צמתי הקצה של החוליה במכניזם. לכל קשת בגרף, המייצגת חוליה, תתאים ווקטור יחידה ששווה לכיוון הכוח הפועל בחוליה. לקשת, שמייצגת את החוליה הכניסה, תתאים ווקטור יחידה ששווה לכיוון הכוח שחוליה זו מפעילה על המכניזם.

3. צייר צומת ייחוס בגרף המייצג אדמה.

ניקח מכניזם ארבע חוליות במצב מת, ונציג את הכוחות בו כגרף זרימות (ראה איור 3.3).



איור 3.3: דוגמה לייצוג של כוחות במכניזם במצב מת באמצעות גרף זרימות

(א) מכניזם במצב מת (ב) ייצוג של כוחות בחוליותיו באמצעות גרף זרימות (ג) חישוב ווקטורי יחידה של קשתות הגרף המייצגות את החוליות.

ברור שכיוון הכוח העובר דרך חוליה במכניזם במצב מת זהה לכיוון החוליה (חוץ מהמקרה של חוליית הכניסה, כאשר כיוון הזרימה בקשת המתאימה לה בגרף שווה לכיוון הכוח שחוליה זו מפעילה על שאר חוליות המכניזם). לכן בהינתן גרף זרימות המייצג את הכוחות הפועלים לאורך חוליות המכניזם, אפשר לבנות את המכניזם.

3.3. שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזמים

3.3.1 קשר הדואליות בין כוחות במכניזם במצב מת לתזוזות במסבך

כפי שראינו בסעיף 3.1, ניתן לייצג תזוזות במסבך כגרף פוטנציאלים. מצד שני, לפי סעיף 3.2, ניתן לייצג כוחות במכניזם במצב מת כגרף זרימות. שני ייצוגים אלה הם ייצוגים דואליים (לפי 2.7). מכאן נובע קשר דואליות גם בין תזוזות במסבך וכוחות במכניזם במצב מת. כלומר, עבור כל מצב הזזות יחסיות של מוטות המסבך ניתן לבנות מכניזם במצב מת, כך שהתזוזה היחסית במוט של מסבך תהיה שווה לכוח בחוליה מתאימה של המכניזם.

נוכיח את זה בצורה מטריציונית:

ניקח מסבך מסוים סטטית וניתן תזוזות לכל הצמתים. כמובן, לפי חוק הקומפטיביליות (תאימות) (Au and Christiano, 1993), סכום הפרשי התזוזות בכל מעגל שווה לאפס. נייצג פעולה זו כגרף פוטנציאלים ונקבל גרף שהפרשי הפוטנציאלים בו מתאימים לתזוזות היחסיות של מוטות המסבך, ומקיימים את חוק הפוטנציאלים. נקרא למטריצת החתכים של הגרף מטריצה \mathbf{B} (ראה סעיף 2.1).

נרשום את חוק הפוטנציאלים לפי סעיף 2.5: $\mathbf{B}\Delta = \mathbf{0}$, כאשר Δ הינו ווקטור הפרשי הפוטנציאלים המייצג את התזוזות היחסיות של מוטות המסבך. ניתן לרשום את חוק הפוטנציאלים גם בצורה

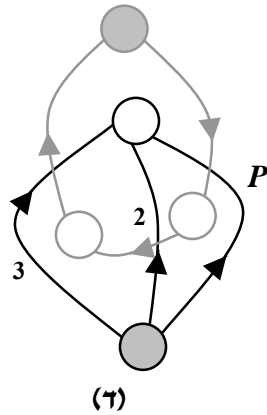
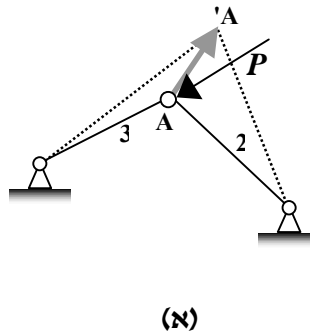
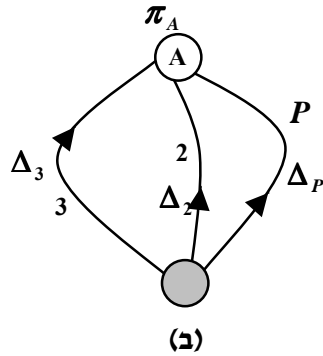
הבאה: $\mathbf{B}\hat{\Delta} = \mathbf{0}$, כאשר $\hat{\Delta}$ מייצג את ווקטורי היחידה או את הכיוונים של הפרשי הפוטנציאלים על הקשתות ו- Δ מייצג את גודלם. נבנה גרף דואלי לגרף פוטנציאלים ונקבל גרף זרימות עם מטריצת מעגלים \mathbf{Q}^* , כאשר $\mathbf{Q}^* = \mathbf{B}$ (לפי 2.7). זרימות של הגרף הדואלי מקיימות את חוק הזרימות:

$\mathbf{Q}^* \mathbf{F} = \mathbf{0}$. ניתן לרשום את חוק הזרימות בצורה הבאה: $\mathbf{Q}^* \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$, כאשר $\hat{\mathbf{F}}$ מייצג את ווקטורי היחידה או את הכיוונים של הזרימות בקשתות ו- \mathbf{F} מייצג את גודלן.

אם נבנה את המכניזם הדואלי כך, שכיוונים של חוליותיו יהיו שווים לכיוונים של תזוזות יחסיות במוטות מתאימים במסבך, נבטיח כי: $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\Delta}$. לכן גם גודל של כוח בחוליה של מכניזם דואלי יהיה שווה לגודל הפרש הפוטנציאלים במוט מתאים במסבך.

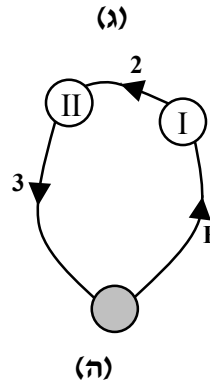
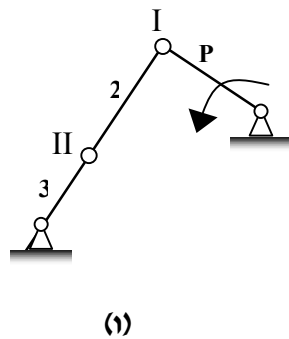
$$3.1 \quad \begin{matrix} \mathbf{B}\hat{\Delta} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^* \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} \mathbf{B} = \mathbf{Q}^* \\ \hat{\Delta} = \hat{\mathbf{F}} \end{matrix} \rightarrow \Delta = \mathbf{F}$$

ניקח לדוגמא את המסבך מאיור 3.1 ומתזוזות יחסיות שלו נבנה מכניזם דואלי במצב מת (איור 3.4).



$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \pi_A - 0 = \pi_A \\ \Delta_3 &= \pi_A - 0 = \pi_A \\ \Delta_P &= \pi_A - 0 = \pi_A \end{aligned} \quad \pi_A = \begin{matrix} \nearrow \\ A \end{matrix}$$

כיוון של חוליית המכניזם הדואלי שווה לכיוון של תזוזה יחסית של מוט מתאים במסבך: $F_i = \Delta_i$

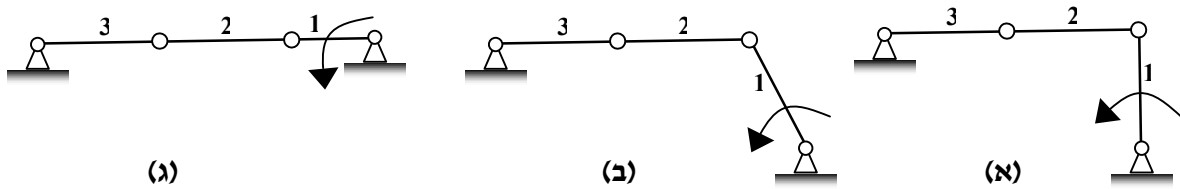


איור 3.4: בניית מכניזם, הדואלי למסבך מאיור 3.1, במצב מת

(א) מסבך מאיור 3.1, אשר לצומת A שלו ניתנה תזוזה שרירותית. (ב) ייצוג תזוזות של המסבך 3.4 (א) כגרף פוטנציאלים. (ג) חישוב תזוזות יחסיות של כל המוטות של המסבך. (ד) בניית גרף דואלי לגרף 3.4 (ב). (ה) גרף זרימות המתקבל ב- 3.4 (ד), אשר מתאר את הטופולוגיה של המכניזם הדואלי. (ו) המכניזם הדואלי למסבך 3.4 (א), כאשר כיווני הכוחות בחוליות המכניזם שווים לכיווני התזוזות היחסיות של המוטות המתאימים במסבך. מכניזם זה תקוע, כי חוליות 2 ו- 3 מקבילות. כיוון של חוליית הכניסה לא משנה, רק ניתן לראות כי כיוון הכוח שהיא תפעיל על שאר החוליות במכניזם יהיה מקביל לחוליות 2 ו- 3.

קיבלנו מכניזם במצב מת, כמו המכניזם מאיור 3.3 (א), והתנאי למכניזם זה להיות במצב מת הוא שחוליות 2 ו- 3 יהיו מקבילות. הכוח שחוליה 1 (חוליית הכניסה) יכולה להפעיל על המכניזם שווה לכוח העובר דרך חוליות 2 ו- 3. כדי שחוליה 1 תפעיל בדיוק כוח כזה, היא צריכה להיות מאונכת לחוליות 2 ו- 3. מצד שני, לפי 1.3, במצב מת של מכניזם אין משמעות לכיוונה של חוליית הכניסה,

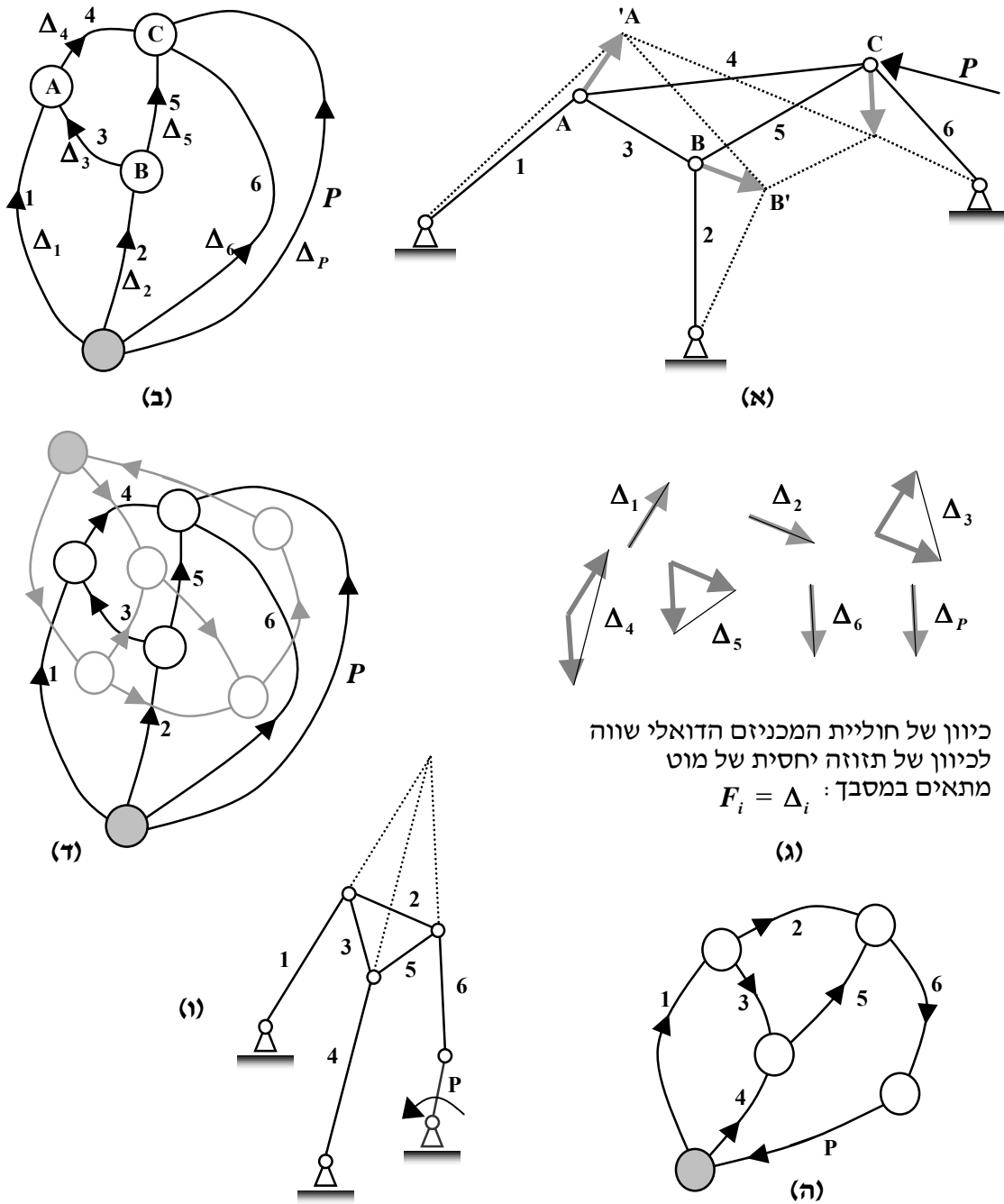
וממבט ראשון זה נראה נוגד את הייצוג של מכניזם כגרף זרימות. התשובה לכך היא כדלקמן: כיוון חוליית הכניסה יכול להיות כל כיוון בתנאי שלוקטור הכוח שהיא תפעיל על המכניזם יהיה רכיב ששווה לכיוון הכוח המתקבל מגרף זרימות. אם לא יהיה רכיב כזה, אזי חוליה 1 תהיה מקבילה לחוליות 2 ו-3 ומצב זה לא יהיה מצב מת של המכניזם (ראה איור 3.5).



איור 3.5: מכניזם מאיור 3.3 (א) עם כיוונים שונים של חוליית הכניסה 1
 (א) חוליה 1 מאונכת ל-2 ו-3, לכן כל הכוח שהיא מפעילה עובר דרך החוליות האלה (ב) חוליה 1 לא מאונכת, אבל לוקטור הכוח שהיא מפעילה יש רכיב בכיוון החוליות 2 ו-3, לכן מכניזם במצב מת (ג) חוליה 1 מקבילה לחוליות 2 ו-3, לכן אין רכיב לוקטור הכוח בכיוון החוליות הללו, וזהו לא מצב מת של המכניזם.

בפרק 5 נלמד למצוא את כיוון הכוח שחוליית הכניסה מפעילה, כאשר המכניזם נמצא במצב מת.

באיור 3.6 מתואר תהליך קבלת מצב מת של מכניזם הדואלי למסבך מאיור 3.2, כאשר ניתנה תזוזה לכל צמתי המסבך.



כיוון של חוליית המכניזם הדואלי שווה לכיוון של תזוזה יחסית של מוט מתאים במסבך: $F_i = \Delta_i$

איור 3.6: בניית מכניזם הדואלי למסבך מאיור 3.2 (א), במצב מת

(א) מסבך מאיור 3.2 (א) אשר לכל הצמתים שלו ניתנה תזוזה שרירותית. (ב) ייצוג תזוזות של המסבך 3.6 (א) כגרף פוטנציאליים. (ג) חישוב תזוזות יחסיות של כל המוטות של המסבך. (ד) בניית גרף דואלי לגרף 3.6 (ב). (ה) גרף זרימות המתקבל ב- 3.6 (ד), אשר מתאר את הטופולוגיה של המכניזם הדואלי. (ו) המכניזם הדואלי למסבך 3.6 (א), כאשר כיווני הכוחות בחוליות המכניזם שווים לכיווני התזוזות היחסיות של המוטות המתאימים במסבך. מכניזם זה תקוע, כי המשכי חוליות 1, 4, 6 נפגשים באותה נקודה. כיוון של חוליית הכניסה לא משנה, רק ניתן לראות כי כיוון הכוח שחוליה זו תפעיל על שאר חוליות במכניזם יהיה מקביל לחוליה 6.

3.3.2 תיאור השיטה

כפי שנראה בהמשך (סעיף 3.3.5), כדי לקבל את כל המצבים המתים של מכניזם נתון, צריך לבדוק הזזות של כל קונפיגורציות (קבוצות) אפשריות של צמתים במסבך הדואלי.

להלן התיאור הכללי של שיטת תזוזת הצמתים למציאת מצבים מתים במכניזם:

1. בנה גרף, המתאר את טופולוגיית המכניזם וגרף דואלי, המתאר את טופולוגיית המסבך הדואלי.

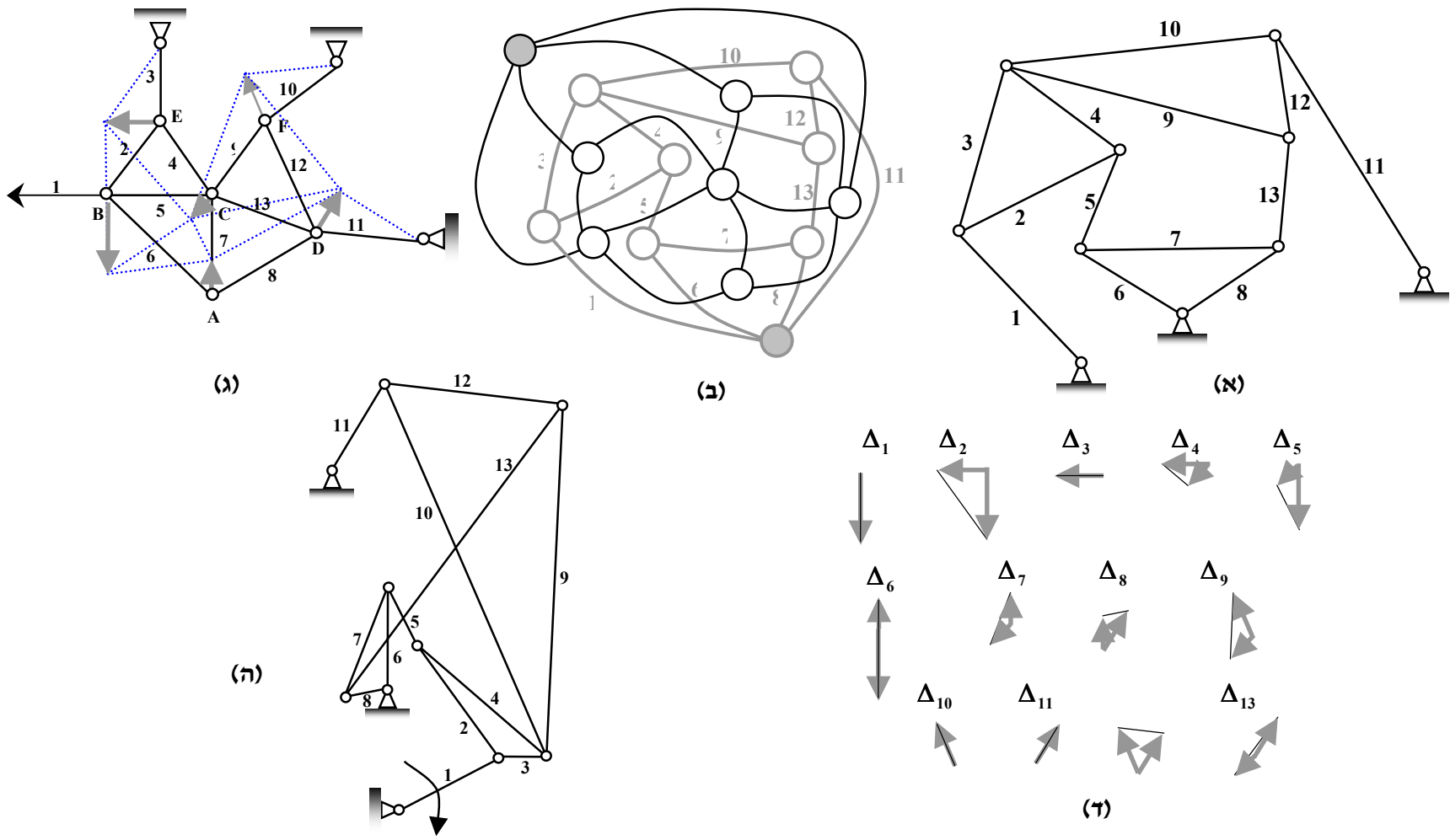
מתוך הגרף בנה מסבך דואלי, כאשר כיווני כל המוטות שרירותיים

2. תניח הזזות של כל קונפיגורציה של צמתים במסבך הדואלי. עבור כל קונפיגורציה חשב את התזוזות היחסיות של כל המוטות.

3. מתוך גרף שמתאר את טופולוגיית המכניזם בנה את המכניזם כך, שכיוון כל חוליה יהיה מקביל לכיוון התזוזה היחסית של מוט מתאים במסבך הדואלי.

נדגים את הפעלת השיטה (איור 3.7) על מכניזם Double Butterfly (ראה נספח א).

המכניזם שהתקבל באיור 3.7 (ה) הוא מכניזם תקוע. אין אפשרות להבחין בעובדה זו ממבט ראשון, ללא אנליזה. בפרק 5 נלמד לאפיין את התנאים שעל חוליות המכניזם לקיים כדי שהמכניזם יהיה במצב מת.



איור 3.7: דוגמא להפעלת השיטה על מכניזם Double Butterfly

(א) מכניזם נתון (ב) גרף המתאר את טופולוגיית המכניזם (אפור) וגרף המתאר את טופולוגיית המסבך הדואלי (שחור). (ג) המסבך הדואלי, כאשר לכל אחד מהצמתים שלו ניתנה תזוזה שרירותית. (ד) חישוב תזוזות יחסיות של מוטות המסבך 3.7 (ג). בניית מכניזם 3.7 (א) במצב מת, כאשר כיווני הכוחות בחוליותיו שווים לכיווני התזוזות היחסיות במוטות המתאימים במסבך הדואלי שמתואר ב- 3.7 (ג).

3.3.3 הסבר איכותי על שיטת התזוזות מתורת הסטטיקה:

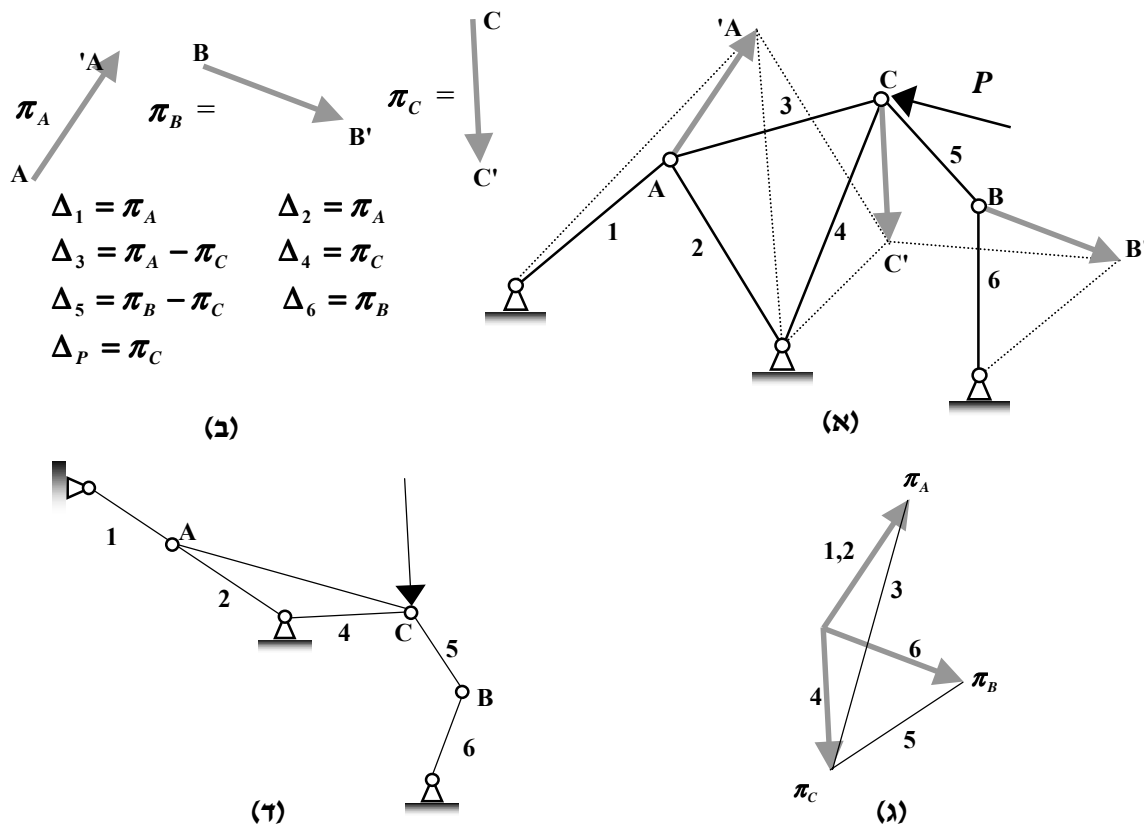
3.3.3.1 קשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך

לפי סעיף 2.8, כוחות במוטות של מסבך מסוים סטטית מתאימים למהירויות יחסיות של חוליות במכניזם הדואלי. אם המסבך הוא לא יציב, אזי מתקבל מכניזם דואלי במצב מת, כי הרי אם במערכת יש תכונה מיוחדת, גם במערכת הדואלית תהיה תכונה מיוחדת. לכן, בעיית מציאת מצבים מתים של מכניזם שקולה לבעיית מציאת מצבים לא יציבים של המסבך הדואלי.

בשלב זה נראה כי לכל תמונת הזזות של מסבך מתאים מצב לא יציב של אותו מסבך. כלומר, מתמונת התזוזות של המסבך ניתן לקבל גיאומטריה של מסבך עם אותה טופולוגיה, אבל הפעם במצב לא יציב. ואם ישנו קשר כזה בין תמונת התזוזות של מוטות למצב מיוחד (לא יציב) של המסבך, טבעי שיהיה קשר בין תמונת התזוזות של המוטות למצב מיוחד של מערכת הדואלית – המכניזם.

ניקח מסבך מסוים סטטית כלשהו (ראה איור 3.8 (א)). ניתן תזוזה שרירותית לכל הצמתים במסבך (חוץ מאדמות) ונחשב תזוזה יחסית של כל מוט (ראה 3.8 (ב) ו- (ג)).

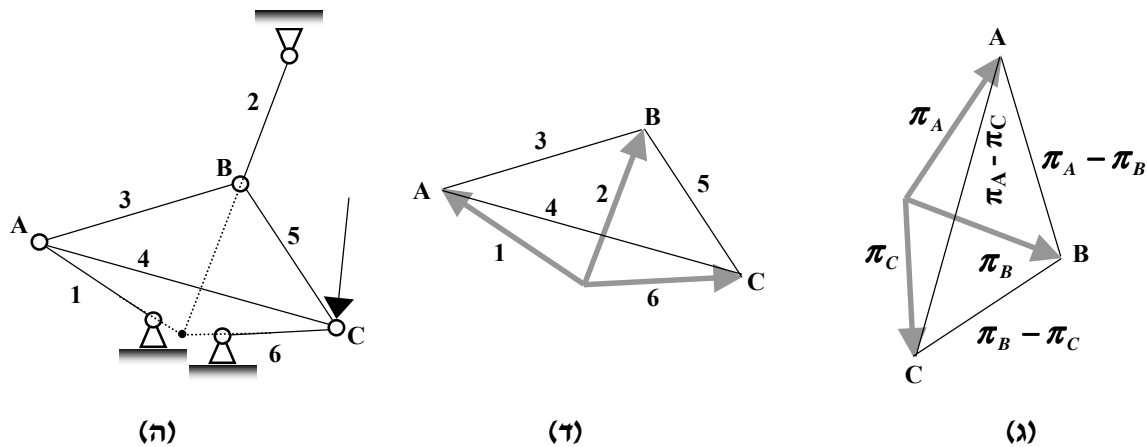
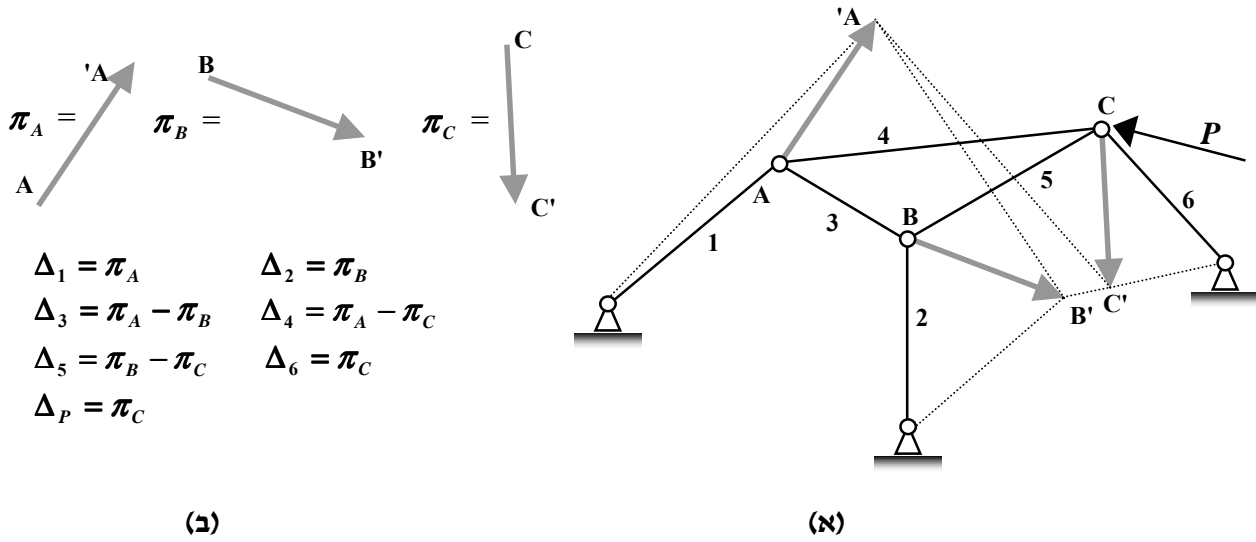
טענה 3.1: אם נמקם את המוטות של המסבך בצורה כזו שכיוון של כל מוט יהיה מאונך לתזוזה היחסית שלו, נקבל מסבך לא יציב (ראה 3.8 (ד)).



איור 3.8: דוגמא 1 לקשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך

(א) מסבך נתון, כאשר ניתנה תזוזה לכל צמתיו. (ב) חישוב תזוזה יחסית של כל מוט. (ג) תמונת התזוזות של מוטות המסבך 3.8 (א). (ד) מסבך לא יציב שהתקבל לאחר שכל מוט מוקם במאונך לתזוזה יחסית שמתאימה לו בתמונת התזוזות 3.8 (ג). מסבך זה הוא לא יציב בגלל שמוטות 1 ו- 2 מקבילים.

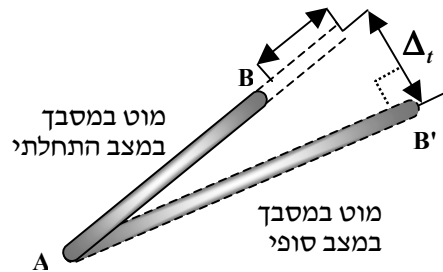
לפני ההוכחה, נראה דוגמא נוספת (איור 3.9). לכל הצמתים של המסבך זה ניתנה תזוזה שרירותית ולכל מוט חושבה תזוזה יחסית (3.9 ב). תמונת ווקטורי התזוזות מורכבת ב- 3.9 ג), תמונה זו מסובבת ב- 90° (3.9 ד). המסבך שהתקבל לאחר מיקום המוטות לפי 3.9 ד) מוצג ב- 3.9 ה). מסבך זה נמצא במצב לא יציב כי המשכי החוליות 1, 2 ו- 6 נפגשים בנקודה אחת.



איור 3.9: דוגמא 2 לקשר בין תזוזות במסבך למצב לא יציב של אותו מסבך
 (א) מסבך אשר כל צמתיו מוזזות באופן שרירותי. (ב) חישוב תזוזה יחסית של כל מוט. (ג) תמונת ווקטורי התזוזות שחושבו ב- (ב). (ד) תמונה ב- (ג) מסובבת ב- 90° . (ה) מיקום של מוטות המסבך לפי כיוונים ב- (ד). המסבך שהתקבל נמצא במצב לא יציב, בגלל שהמשכי המוטות 1, 2 ו- 6 נפגשים בנקודה אחת.

הוכחת טענה 3.1 :

ניתן לפרק את וקטור התזוזה היחסית של המוט לשני רכיבים (ראה איור 3.10) :
 התארכות או התקצרות של המוט (רכיב בכיוון המוט - Δ_L) וסיבוב של המוט (רכיב מאונך לכיוון המוט - Δ_t , בדומה לחוליה קשיחה במכניזם, שהתזוזה (או המהירות) היחסית שלה מאונכת לכיוון החוליה).



איור 3.10: פרוק של התזוזה היחסית של מוט במסבך לרכיב מקביל ורכיב מאונך למוט התזוזה היחסית של המוט במסבך מורכבת משני חלקים: רכיב בכיוון המוט (התארכות או התקצרות) ורכיב המאונך לכיוון המוט (סיבוב).

את רכיב ההתארכות (Δ_L) של המוט ניתן למצוא מחוק הוק :

3.2
$$\Delta_L = \frac{FL}{EA}$$

כאשר :

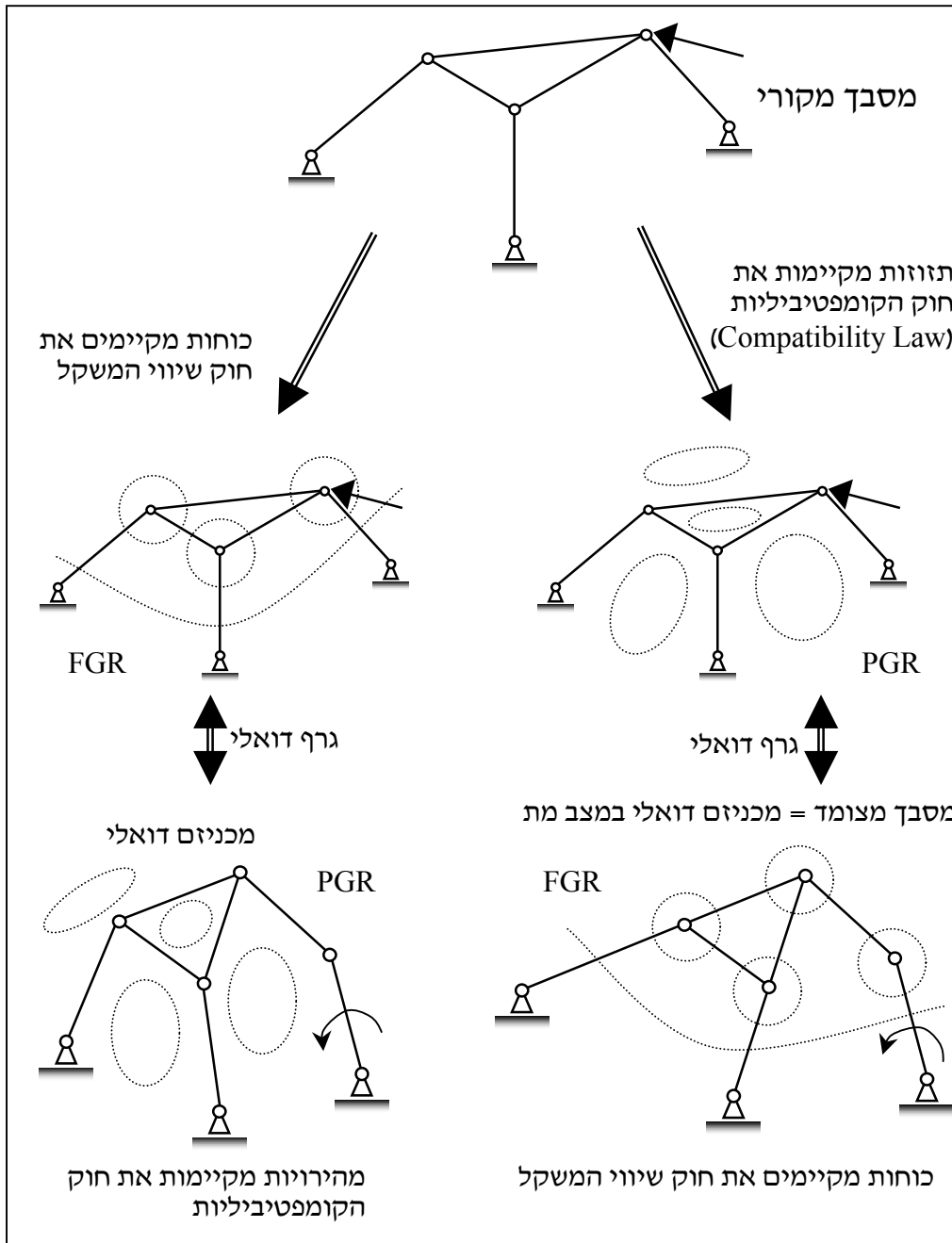
F - כוח הפועל במוט, L - אורך המוט ו EA - קשיחות המוט (שטח החתך מוכפל במודול יאנג)

כידוע מסטטיקה, כאשר המסבך הוא לא יציב, כוחות במוטות המסבך שווים לאפס. ואם כוח במוט שווה לאפס, אזי לפי נוסחה 3.2, רכיב ההתארכות של שווה לאפס. לכן, התזוזה היחסית של המוט במקרה זה מורכבת רק מרכיב הסיבוב, בדומה לתנועתה של חוליה קשיחה במכניזם.
 נניח והזזנו צמתים של המסבך היציב וחישבנו תזוזה יחסית של כל המוטות. סט של תזוזות יחסיות שהתקבל הוא סט תזוזות אפשרי של המסבך הנתון, והוא נכלל בין אינסוף סטים של תזוזות אפשריות של המסבך. הסט שיתקיים במציאות תלוי, כמובן, בכוחות הפועלים במוטות, בגיאומטריית המוטות ובמינימום אנרגיית העיבורים של המוטות, כאשר עיבור המוט תלוי, כמובן, ברכיב ההתארכות.
 אם נשנה את הכיוונים של מוטות המסבך כך, שכיוון של כל מוט יהיה מאונך לתזוזה יחסית שלו, נקבל מסבך שבו קיים סט של תזוזות יחסיות שכוללות רק סיבובים של המוטות, ללא עיבורים. סט כזה ייתן מינימום אנרגיה של העיבורים, כי אם אין עיבורים, אזי אנרגיית העיבורים שווה לאפס. לכן, סט זה יתקיים במציאות והתזוזות היחסיות של מוטות המסבך יהיו מאונכות למוטות ובאף מוט לא יהיה עיבור, כל מוט יסתובב כגוף קשיח, במילים אחרות, המסבך לא יהיה יציב.

3.3.3.2 הקשר בין השיטה המוצעת לשיטת הקורה המצומדת (Conjugate beam)

אחד מהרעיונות לעבודה זו התקבל בהמשך לתרגום שיטת הקורה המצומדת (Laurson, 1969), (Au and Christiano, 1993), שיטה ידועה מתורת המבנים, לשיטה בתורת הגרפים (תעשה, 2002). בשנת 2002 (תעשה, 2002) דווח על ייצוג של אלמנט קורה באמצעות גרף התנגדות. ייצוג זה איפשר, בין היתר (Ta'aseh and Shai, 2002), העברה של שיטת הקורה המצומדת לתורת הגרפים. התברר כי גרף, המייצג את הקורה המצומדת דואלי לגרף, המייצג את הקורה המקורית! שיטת הקורה המצומדת, לכל קורה נתונה ניתן למצוא קורה אחרת (מצומדת) שבה כוח גזירה יהיה מתאים לשיפוע בקורה המקורית ומומנט פנימי יהיה מתאים לשקיעה בקורה המקורית. במושגים של תורת הגרפים, קורה מקורית וקורה מצומדת הן שתי מערכות דואליות, כאשר הזרימות בייצוג של הקורה המצומדת שווים לפוטנציאלים בייצוג של הקורה המקורית. מאחר ושיטת הקורה המצומדת הועברה לשיטה בתורת הגרפים, ניתן להפעיל אותה גם על מסבך ולקבל את המסבך המצומד. הרעיון הוא (איור 3.11) שהתזוזות של המסבך המקורי (פוטנציאלים) מתאימות לכוחות במסבך המצומד (זרימות). הגרף שמייצג את המסבך המצומד צריך להיות דואלי לגרף שמייצג את המסבך המקורי. אבל לפי סעיף 2.8, גרף הדואלי לגרף שמייצג מסבך הוא גרף שמייצג את המכניזם הדואלי! כלומר, המסבך המצומד הוא בעצם מכניזם הדואלי למסבך והכוחות במכניזם זה שווים לתזוזות של המסבך המקורי והעובדה שפועלים במכניזם זה כוחות מעידה על כך שהוא נמצא מצב מת.

שיטת הקורה המצומדת משתמשת בזרימות (כוחות ומומנטים) של קורה מצומדת כדי לקבל פוטנציאלים (שקיעות וסיבובים) בקורה מקורית. אבל בעבודה זו נשתמש בפוטנציאלים (תזוזות) של המסבך המקורי כדי למצוא זרימות (כוחות) במסבך המצומד (שהוא בעצם מכניזם דואלי במצב תקוע).



איור 3.11: מציאת המסבך המצומד

לפי הערוץ הראשון של קשר הדואליות, שדווח בספרות, כוחות במסבך מקיימים את חוק שיווי המשקל וניתן לייצגם באמצעות גרף זרימות. הגרף הדואלי (גרף פוטנציאלים) ייצג את המהירויות היחסיות של החוליות במכניזם הדואלי, כאשר מהירויות אלה תמיד יקיימו את חוק הקומפטיביליות. הערוץ החדש של קשר הדואליות, שמוצג בעבודה זו, הוא שתזוזות יחסיות במסבך מקיימות את חוק הקומפטיביליות וניתן לייצגן באמצעות גרף פוטנציאלים. גרף דואלי (גרף זרימות) ייצג את הכוחות במכניזם דואלי, כאשר כוחות אלה תמיד יקיימו את חוק שיווי המשקל. והעובדה שיש כוחות במכניזם מעידה על מצב תקוע של אותו המכניזם.

3.3.4 הוכחת ההתאמה בין כל מצב מת של מכניזם לתזוזות צמתים במסבך הדואלי

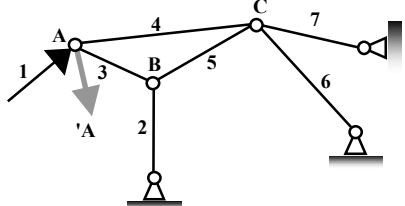
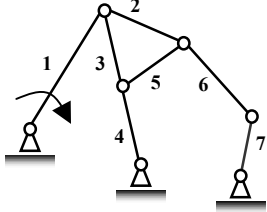
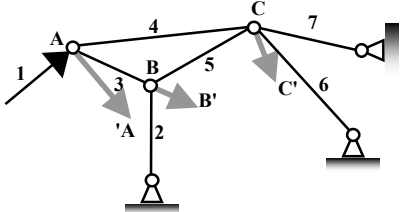
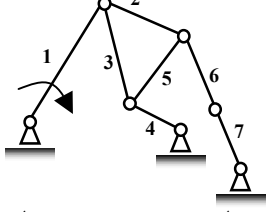
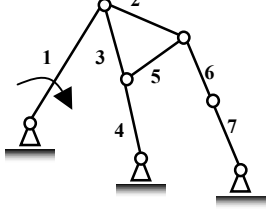
טענה 3.2: ניתן לקבל כל מצב מת של מכניזם באמצעות שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזם בעזרת המסבך הדואלי. הוכחה בשלילה:

נניח מכניזם במצב מת, שלא ניתן לקבלו באמצעות השיטה. לפי ההגדרה של מצב מת של מכניזם, חוליית הכניסה יכולה להפעיל כוח על שאר החוליות. כתוצאה מכך, בשאר חוליות המכניזם מתפתחים כוחות, וכך המכניזם הופך להיות מסבך, אשר כוחות בו מקיימות את משוואות שיווי המשקל. לכן את הכוחות במכניזם ניתן לייצג כגרף זרימות. לגרף זרימות זה ניתן לבנות גרף דואלי שיהיה גרף פוטנציאלים והפרשי הפוטנציאלים על הקשתות של הגרף הדואלי יהיו שווים לזרימות בקשתות של הגרף המקורי. הגרף הדואלי ייצג את טופולוגיית המסבך הדואלי למכניזם, לפי קשר הדואליות שקיים בין מסבכים למכניזמים שפורט בסעיף 2.8. הפרשי הפוטנציאלים בגרף הדואלי יכולים לייצג תזוזות יחסיות של מוטות, והפוטנציאלים בצמתים יכולים לייצג תזוזות צמתי המסבך (לפי 2.2 או 3.1). לכן, ניתן היה לתת לצמתי המסבך את אותן התזוזות, לקבל תזוזות יחסיות של כל המוטות, לייצג אותן כגרף פוטנציאלים, לבנות גרף דואלי ולבנות את המכניזם במצב מת. זה סותר את הנחת השלילה כי לא ניתן לקבל את המצב הזה של המכניזם באמצעות השיטה.

3.3.5 השוני בין מצבים מתים שונים של מכניזם

כפי שנאמר בסעיף 1.5, מצב מת של מכניזם זהו מצב בו חוליית הכניסה לא יכולה להניע את שאר החוליות, אלא יכולה להפעיל עליהן כוח. שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזם בעזרת המסבך הדואלי, מספקת תמונת כוחות הפועלים לאורך חוליות המכניזם ומאפשרת לבנות את המכניזם מתוך כיווני הכוחות. למכניזם כלשהו יכול להיות יותר ממצב מת אחד וכפי שיוכח בפרק 5, כדי לקבל אותו, יש להזיז קבוצה שונה של צמתים במסבך הדואלי. באיורים 3.4, 3.6 ו- 3.7 ראינו מצבים מתים של מכניזמים המתקבלים מתזוזות כל הצמתים במסבכים הדואליים. במקרה שניתנת תזוזה רק לחלק מהצמתים, אפשרי לקבל כוח שווה לאפס בחלק מחוליות המכניזם, בזמן שלאורך חוליות אחרות פועל כוח שונה מאפס. במקרה כזה רק לכיוון החוליות שלאורכן פועל הכוח יש משמעות, בזמן שחוליות שלא פועלים בהן כוחות יכולות להיות ממוקמות שרירותית. לדוגמא, נראה באיור 3.12 את כל המצבים המתים של מכניזם מסוג Stephenson III עם חוליית הכניסה 1, כפי שדווחו בספרות (Yan and Wu, 1989) ונראה את התזוזות של צמתים במסבך הדואלי שיתנו את המצבים האלו בהפעלת שיטת תזוזות הצמתים. המקרה הראשון באיור התקבל כתוצאה מהזזת צומת A, בזמן שצמתים B ו- C נשארו במקום. כתוצאה מהזזת צומת A במסבך הדואלי, התקבלה תזוזה יחסית ששונה מאפס רק במוטות 2 ו- 3. לכן רק בחוליות 2 ו- 3 של המכניזם יפעלו כוחות. הכיוונים של שאר החוליות יכולות להיבחר באופן שרירותי. בפרק 5, נוכיח כי במקרה שרק בחלק מהחוליות הכוח שונה מאפס, חוליות אלו מרכיבות תת מכניזם שנמצא במצב מת ותת מכניזם זה מתקבל כאשר

מוחקים מהמכניזם ההתחלתי את החוליות, שלאורכן לא פועל כוח. במקרה זה (איור 3.12, מקרה 1) התת מכניזם הוא מכניזם ארבע חוליות והוא נמצא, כמובן, במצב מת. המקרה השני באיור 3.12 מתקבל כאשר ניתנת תזוזה לכל הצמתים של המסבך הדואלי. המקרה השלישי הוא בעצם מקרה פרטי של מקרה ראשון, כי במקרה הראשון חוליות 2 ו-3 מקבילות, וכיוונן של שאר החוליות לא משנה.

תזוזות מתאימות של צמתים במסבך הדואלי	מצב מת של מכניזם	מס' 1
 <p data-bbox="337 783 873 821">נשארים במקום C ו- B זז, צמתים A רק צומת</p>	 <p data-bbox="922 758 1203 793">חוליות 3 ו-4 מקבילות</p>	1
 <p data-bbox="505 1073 711 1108">כל הצמתים זזים</p>	 <p data-bbox="922 1052 1203 1087">חוליות 6 ו-7 מקבילות</p>	2
<p data-bbox="358 1230 857 1297">זהו מקרה פרטי של מקרה מס' 1, בו חוליות 2,5,6,7 ממוקמות באופן שרירותי</p>	 <p data-bbox="922 1346 1203 1404">חוליות 3 ו-4 מקבילות חוליות 6 ו-7 מקבילות</p>	3

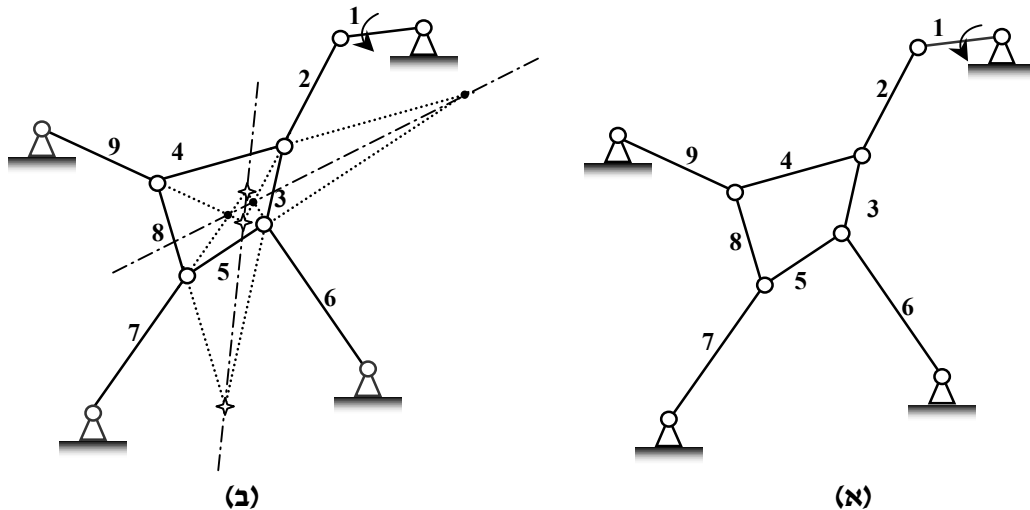
איור 3.12: קבלת מצבים מתים ידועים של מכניזם Stephenson III באמצעות שיטת תזוזות הצמתים בצד ימין ניתן לראות את המצבים המתים של מכניזם, עם חוליית הכניסה 1, ובצד שמאל רואים את התזוזות המתאימות של הצמתים במסבך הדואלי.

3.4. סיכום של שיטת תזוזת הצמתים

שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזם בעזרת המסבך הדואלי מאפשרת קבלת מצב מת של מכניזם מהר, ללא חישובים אנליטיים, ללא צורך במציאת מרכזים רגועים. אין צורך בהנחות גיאומטריות והפעלת השיטה לא תלויה באורך המוטות.

החיסרון העיקרי של השיטה הוא שלא תמיד ניתן להבין למה המכניזם תקוע. במילים אחרות, השיטה לא נותנת מידע מיוחד על המצב הטופולוגי. לדוגמא, במכניזם באיור 3.13 (א), שהתקבל מהפעלת שיטת התזוזות, אי אפשר לראות מה התנאים שחוליות של המכניזם מקיימות שמביאים את המכניזם למצב מת. באיור 3.13 (ב) ניתן לראות את הסיבה בקונפיגורציה זו: חיתוכים של 2 ו-9, גם 3 ו-8, 6 ו-7, 5 ו-4, 6 ו-2 וגם חיתוכים של 2 ו-6, 5 ו-7, 9 ו-1 נמצאים על קו אחד. גם במקרה של מכניזם Double Butterfly מאיור 3.7 קשה לדעת למה המכניזם תקוע, כי כפי שצוין בנספח א, אין אפשרות להפעיל את שיטת המרכזים הרגועים על מכניזם זה.

בפרק 5 נדע להעריך כמה מצבים מתים יש למכניזם, נוכיח כי כדי לקבל מצב שונה צריך להזיז קבוצה אחרת של צמתים במסבך הדואלי, נקבל את התנאים שמאפיינים כל מצב מת. לצורך זה, על בסיס שיטת התזוזות פותחה שיטה חדשה נוספת – שיטת הכוח בפאה, שמתוארת בפרק 5.



איור 3.13: דוגמא למכניזם במצב מת, המתקבל מהפעלת שיטת התזוזות
 (א) מכניזם במצב תקוע. אין אפשרות לדעת אילו תנאים מתקיימים במצב זה. (ב) התנאים שמתקבלים לאחר שימוש בכוחות בפאות של המכניזם הזה (ראה פרק 5). התנאים הם: חיתוכים של 2 ו-9, 3 ו-8, 6 ו-7, 5 ו-4, 6 ו-2 וגם חיתוכים של 2 ו-6, 5 ו-7, 9 ו-1 נמצאים על קו אחד.

פרק 4

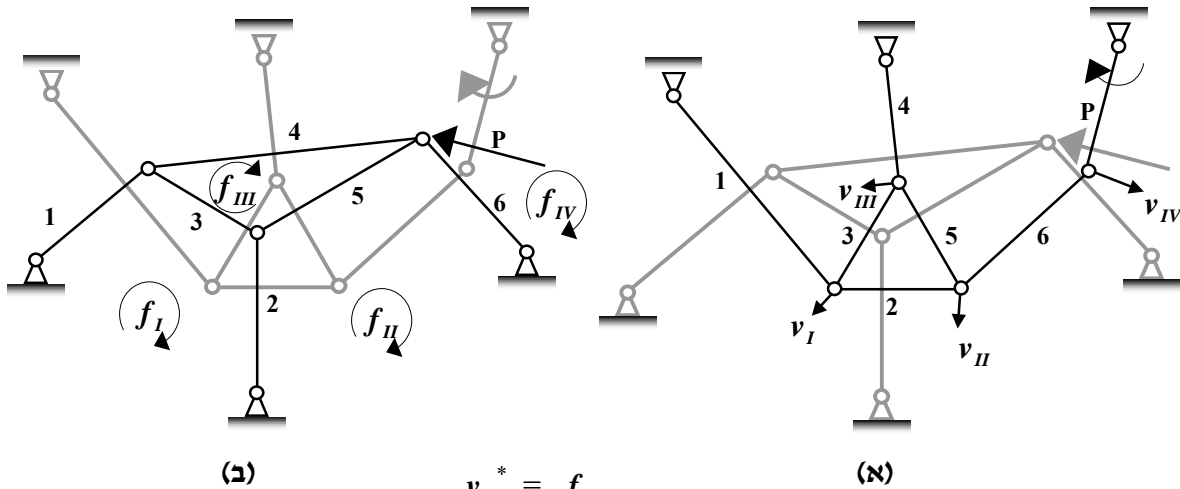
הכוח בפאה (Face Force) ותכונותיו

כדי לאפיין את הגיאומטריה המיוחדת בה נמצא המכניזם במצב מת, מוצג בפרק זה משתנה כוח חדש – כוח בפאה (Face Force -FF), שהוכח ודווח כבר בספרות, שהינו האלמנט המתאים למהירות המוחלטת של צומת במכניזם הדואלי. בפרק זה נלמד את התכונות המאפיינות שלו, כיצד ניתן לאפיין אותו גיאומטרית באמצעות קווים שווי מומנט (EquiMomental Lines - EML), ועוד תכונות מיוחדות.

4.1. תיאור הכוח בפאה

4.1.1 כוח בפאה במסבך - משתנה שמתאים למהירות של צומת במכניזם הדואלי

כפי שצוין בסעיף 2.6, באמצעות גרף פוטנציאלים ניתן לייצג את תמונת המהירויות היחסיות של חוליות במכניזם בעל דרגת חופש אחת. מצד שני, לפי (2.4) באמצעות גרף זרימות ניתן לייצג את תמונת הכוחות במוטות של מסבך מסוים סטטית. מכיוון שייצוג פוטנציאלים וייצוג זרימות הם שני ייצוגים דואליים, זה מוכיח דואליות בין שתי המערכות (סעיף 2.8): מכניזם בעל דרגת חופש אחת ומסבך מסוים סטטית. לדואליות זו ישנם שני צדדים: מצד אחד המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם שוות לכוחות הפועלים במוטות המתאימים במסבך הדואלי. מצד שני, המהירות המוחלטת של צומת במכניזם שווה לכוח הפועל בפאה המתאימה במסבך הדואלי. באיור 4.1 ניתן לראות דוגמא למכניזם ומסבך דואלי שלו ולהתאמה בין מהירויות הצמתים של מכניזם לכוחות בפאות במסבך הדואלי.

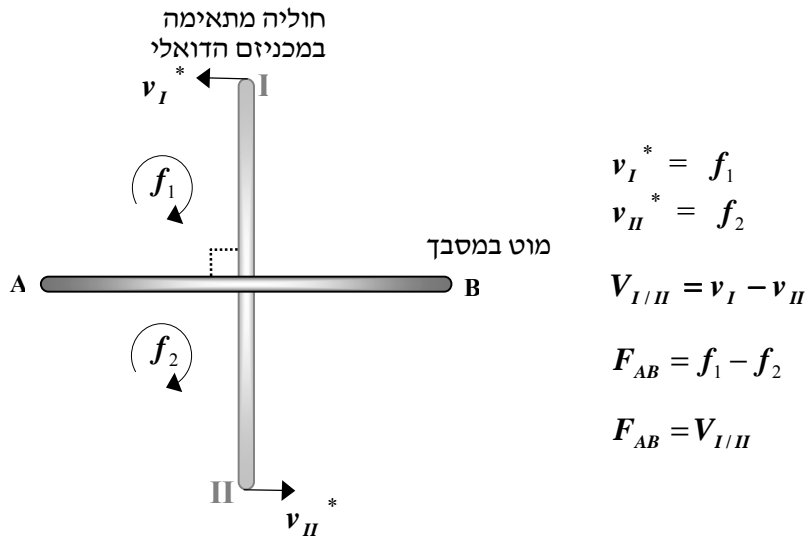


איור 4.1: הדגמת הקשר בין מהירות של צומת במכניזם לכוח בפאה במסבך (א) מכניזם (ב) המסבך הדואלי למכניזם 4.1 (א), כאשר בפאות שלו מסומנים הכוחות הפועלים

(ג) מהירויות של צמתים במכניזם שוות לכוחות הפועלים בפאות המתאימות במסבך הדואלי

כוח בפאה הינו כלי חשוב בעבודה זו כי כוח בפאה קיים בכל מערכת סטטית, ומכניזם במצב מת הינו מערכת סטטית (סעיף 1.5). בשלב זה נחקור את תכונותיו של הכוח בפאה במסבך, נראה את השיטה חדשה למציאת כל הכוחות במסבך ובפרק הבא נראה את ההתנהגות של כוחות בפאות של מכניזם במצב מת.

קודם כל נזכיר שכוח בפאה של מסבך שווה למהירות של צומת במכניזם דואלי. כידוע מקינמטיקה, כדי למצוא מהירות יחסית של חוליה במכניזם (ראה איור 4.2), צריך לעשות הפרש ווקטורי בין מהירויות של צמתי הקצה של החוליה. באותו אופן, כדי למצוא כוח הפועל לאורך מוט של מסבך, צריך לבצע הפרש ווקטורי בין כוחות הפועלים בשתי פאות הסמוכות לאותו המוט.



איור 4.2: הדגמת הקשר בין מהירות יחסית של חוליה במכניזם לכוח הפועל במוט במסבך
כוח בפאה של מסבך מתאים למהירות של צומת במכניזם דואלי. כדי למצוא את הכוח הפועל במוט צריך לבצע הפרש ווקטורי בין כוחות בשתי הפאות הסמוכות למוט.

עד עתה ראינו את התהליך של קבלת משתנה כוח נוסף בסטטיקה – כוח בפאה בעזרת הייצוג של כוחות המסבך בגרף זרימות.

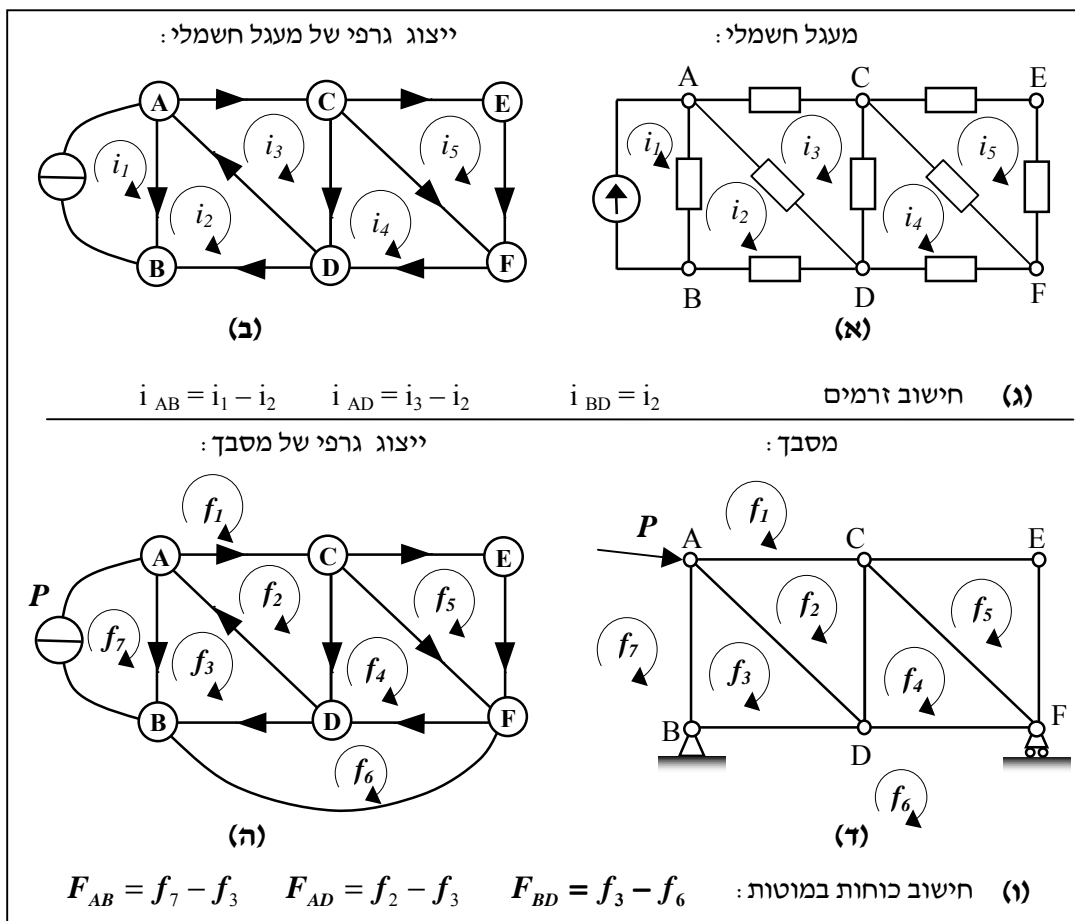
ניתן גם למצוא רמז לקיום המשתנה כוח בפאה בשיטת מקסוול - קרימונה (אלפרוביץ', 1973), כאשר ה"אזורים" במסבך הם הפאות ווקטורי הכוחות בדיאגרמת כוחות המתקבלת הם כוחות בפאות וכוחות במוטות.

בסעיף הבא נסתכל על הכוחות בפאות מזווית אחרת: נראה שהם מהווים הרחבה רב ממדית של זרמי חוגים (mesh currents) במעגלים חשמליים.

4.1.2 כוח בפאה - הרחבה רב ממדית של זרם חוגים (mesh current) במעגל חשמלי

כוח בפאה זהו מושג חדש שמהווה בעצם הרחבה רב ממדית של זרמי חוגים ברשתות חשמל. בדומה לזרמים אלו, המיוחסים לפאה במעגל החשמלי, משתנה זה מיוחס לפאה במערכת סטטית, לכן הוא נקרא הכוח בפאה (Face Force). המימד של הכוח בפאה הוא כמימד הכוח במסבך (דו או תלת מימדי).

נסתכל על מעגל חשמלי כלשהו (ראה איור 4.3). אם זרמים בכל הפאות ידועים, אזי חישוב זרמים בכל הקשתות הוא מיידי: זרם בכל קשת שווה להפרש בין זרמים בשתי הפאות הסמוכות לאותה קשת. באותו עקרון, כאשר הכוחות בכל הפאות במסבך ידועים, חישוב כוחות בכל המוטות הוא מיידי: כוח במוט שווה להפרש ווקטורי של כוחות בפאות הסמוכות.



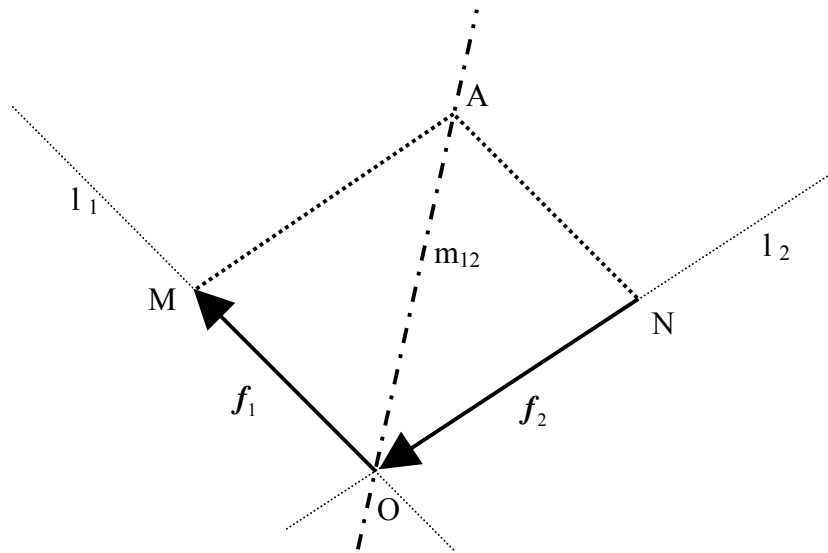
איור 4.3: כוח בפאה זה הרחבה רב ממדית של זרם חוגים במעגל חשמלי

(א) דוגמא למעגל חשמלי, בכל פאה שלו יש זרם חוגים. (ב) ייצוג גרפי של המעגל 4.3 (א), כאשר לכל קשת נקבע כיוון בצורה שרירותית. (ג) חישוב של זרמים בחלק מקשתות המעגל 4.3 (א) כאשר כל הזרמים בפאות ידועים. (ד) דוגמא למסבך מסוים סטטית. ניתן לסמן את הפאות ואת הכוחות בפאה גם על שרטוט המסבך. (ה) ייצוג גרפי של המסבך 4.3 (ד) כאשר לכל קשת נקבע כיוון בצורה שרירותית. ניתן לראות את הפאות בגרף יותר בבירור מאשר בשרטוט של המסבך. (ה) כאשר כל הכוחות בפאות של המסבך 4.3 (ג) ידועים, ניתן לחשב את כל הכוחות במוטות המסבך.

4.2. תיאור קו שווה מומנט ודיאגרמת קווים שווי מומנט

4.2.1 קו שווה מומנט (EquiMomental Line - EML)

קווי שווי מומנט (Shai, 2002) הם כלי, שבעזרתו ניתן למצוא את הכוחות בפאות של מערכת סטטית. נניח כי נתונים שני כוחות: f_1 ו- f_2 הפועלים לאורך קווים I_1 ו- I_2 . **קו שווה מומנט** (Equimomental Line - EML) של שני הכוחות האלה זה המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שבהן שני הכוחות מפעילים אותו מומנט (ראה איור 4.4). כפי שניתן לראות באיור, קו שווה מומנט של שני כוחות (המסומן כ- m_{12}), בוודאי, עובר דרך נקודת החיתוך של I_1 ו- I_2 וכיוונו שווה לכיוון הפרש ווקטורי של f_1 ו- f_2 .



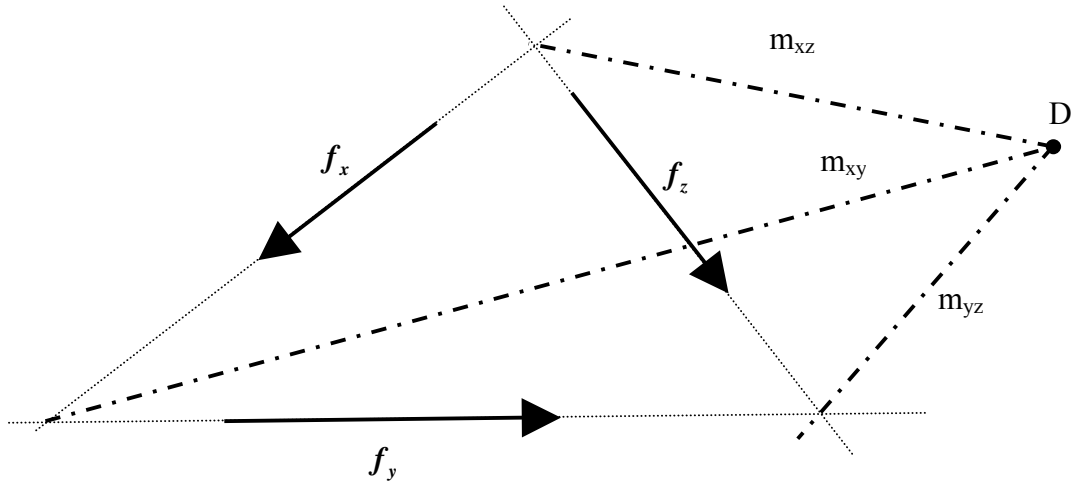
איור 4.4: בניית קו שווה מומנט (m_{12}) של שני כוחות f_1 ו- f_2

קו זה הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות בהן שני הכוחות מפעילים מומנט שווה. m_{12} עובר דרך חיתוך של I_1 ו- I_2 , וכיוונו שווה לכיוון של הפרש ווקטורי של שני הכוחות.

כיום נחקר הקשר בין קו שווה מומנט במסבך לבין מרכז סיבוב רגעי של מכניזם דואלי. ישנה האשרה כי קו שווה מומנט במסבך דואלי (מתאים) למרכז סיבוב רגעי במכניזם. בהמשך לכך צריכה להיות גם אנלוגיה למשפט קנדי (פסן ו- שביט, 1975) (מרכזי סיבוב רגעיים של שלוש חוליות נמצאים על קו אחד). להלן משפט עבור התכונות של 3 כוחות בפאות כלשהן.

נניח כי נתונים 3 כוחות בפאות: f_x , f_y ו- f_z ושלושה קווים m_{xz} , m_{xy} ו- m_{yz} .

טענה 4.1: שלושת הקווים m_{xz} , m_{xy} ו- m_{yz} בהכרח נחתכים בנקודה אחת (ראה איור 4.5).



איור 4.5: הדגמה של טענה 4.1

שלושת קווים שווי מומנט של שלושה כוחות נחתכים באותה נקודה (נקודה D)

ניתן להוכיח את הטענה 4.1 לפי הגדרה של קו שווה מומנט. נניח כי נקודה D זה חיתוך של m_{xy} ו- m_{xz} בלבד. מכיוון שנקודה D נמצאת על קו m_{xy} , מומנט שמפעיל כוח f_x בנקודה זו שווה למומנט שמפעיל כוח f_y . מצד שני, נקודה D נמצאת גם על m_{xz} לכן מומנט שמפעיל כוח f_x בנקודה זו שווה למומנט שמפעיל כוח f_z . לכן, מתקבל כי בנקודה D מומנט שמפעיל כוח f_y בנקודה זו שווה למומנט שמפעיל כוח f_z . לפי הגדרה של קו שווה מומנט, נקודה D נמצאת גם על קו m_{yz} . מכאן ניתן להסיק כי שלושת קווי שווי מומנט של כל שלושה כוחות נחתכים בנקודה אחת.

כוח הפועל במוט של מסבך שווה להפרש ווקטורי של שני כוחות בפאות הסמוכות למוט. לכן, המוט מהווה קו שווה מומנט (EML) של שני הכוחות בפאות הסמוכות (לפי ההגדרה של EML).

4.2.2 דיאגרמת קווים שווי מומנט (EquiMental Line Diagram - EMLD)

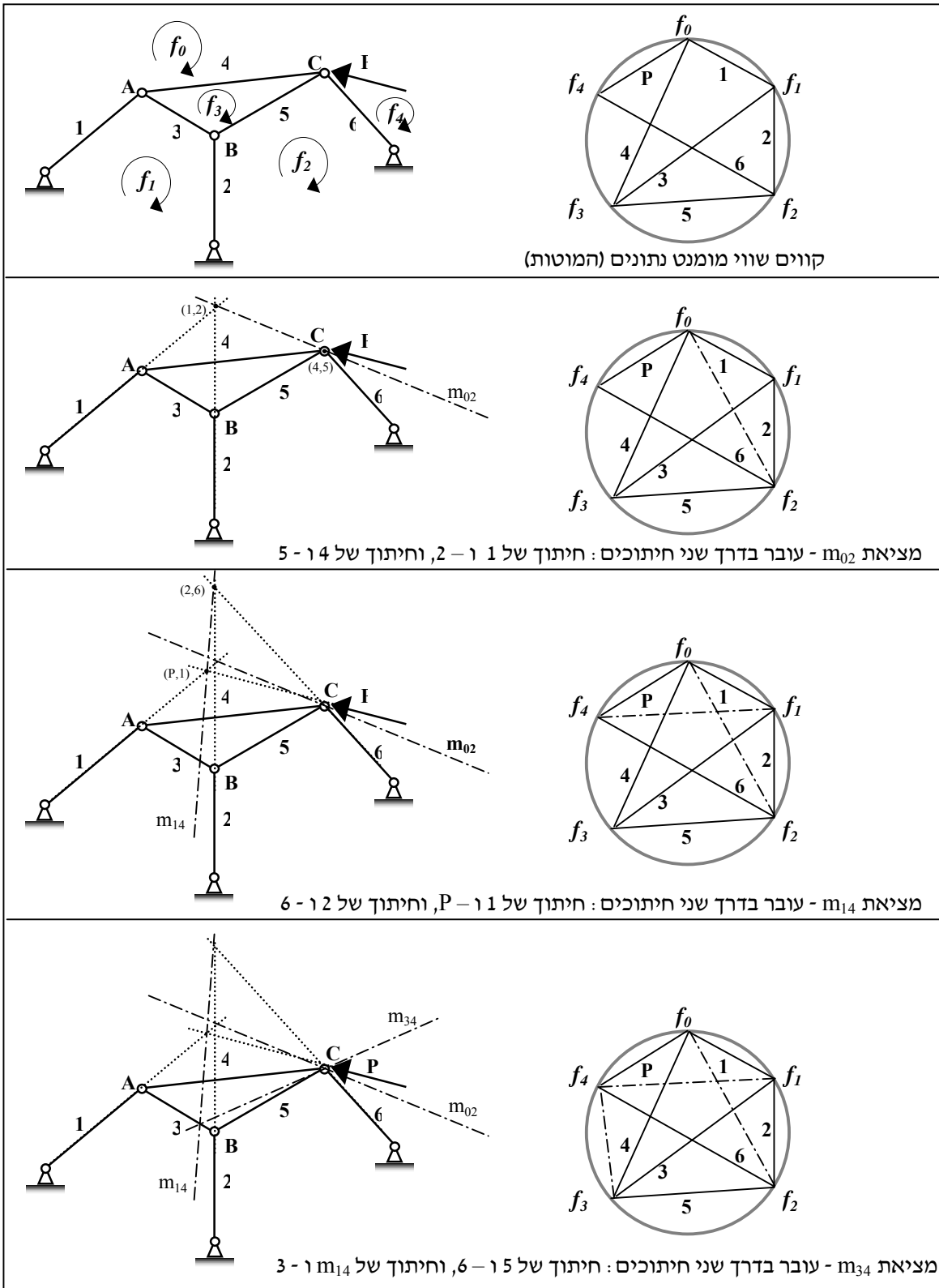
טענה 4.1 מחזקת את הקשר בין קו שווה מומנט למרכז סיבוב רגעי מתורת המכונות. בעזרת משפט קנדי ניתן למצוא את כל מרכזי הסיבוב הרגעיים של המכניזם. בתהליך מציאת מרכזים רגעיים משתמשים במעגל עזר שנקרא מעגל קנדי.

בעזרת טענה 4.1 ניתן למצוא את כל קווים שווי מומנט (EML) ומהם אפשר למצוא את הכוחות הפועלים בכל המוטות. לשם כך נשתמש במעגל עזר שנקרא **דיאגרמת קווים שווי מומנט (EMLD)**.

להלן תהליך בניית דיאגרמת קווים שווי מומנט (EMLD):

1. שרטט מעגל ועל היקף המעגל סמן את כל הפאות של המסבך.
2. לכל מוט במסבך צייר קשת בדיאגרמה אשר תחבר בין שתי פאות הסמוכות לאותו המוט.
3. מצא את EML החסרים כדי למצוא את כל הכוחות בפאות. כמו במעגל קנדי, אפשר למצוא EML הלא ידוע (בעזרת טענה 4.1) אם הקו המסמל אותו משלים במעגל שני משולשים בבת אחת.

לאחר שנמצאו כל EML של המסבך, נוכל למצוא את הכוחות הפועלים בכל המוטות. כך התקבלה שיטה חדשה למציאת כוחות הפועלים במוטות המסבך המסוים סטטי. ניתן לראות דוגמא להפעלת השיטה באיור 4.6. הסבר מפורט יותר ניתן למצוא ב - (Shai, 2002).



איור 4.6: דוגמה למציאת כל EML של הכוחות במסבך בעזרת EMLD

הודות לקשר הדואליות בין מכניזם למסבך, ניתן לבחור מה קל יותר לחשב: מהירויות של חוליות המכניזם או כוחות במוטות של המסבך הדואלי, מה מהר יותר: למצוא את כל המרכזים הרגועים במכניזם או למצוא את כל קווים שווי המומנט במסבך הדואלי. התשובה היא שאין הבדל גדול בין מספר הפעולות שצריך לבצע כדי למצוא את כל המרכזים הרגועים במכניזם לבין מספר פעולות הדרושות למציאת כל קווים שווי מומנט במסבך: מספר המרכזים הרגועים (N_{i_c}) במערכת קינמטית תלוי במספר החוליות שלה n , והוא שווה למספר האפשרויות השונות לבחירת זוג חוליות:

$$4.1 \quad N_{i_c} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

מספר קווים שווי מומנט (N_{e_l}) במערכת סטטית תלוי במספר הפאות שלה, כאשר מספר הפאות במסבך שווה למספר הצמתים במכניזם הדואלי $N_{e_l} = j$. שווה למספר האפשרויות השונות לבחירת זוג פאות:

$$4.2 \quad N_{e_l} = \frac{j!}{(j-2)!2!} = \frac{j(j-1)}{2}$$

למשל למכניזם מאיור 4.1 (א) יש 8 (כולל אדמה) חוליות ו- 5 צמתים (כולל אדמה). לכן מספר המרכזים הרגועים (N_{i_c}) בו הוא 28 ומספר קווים שווי מומנט (N_{e_l}) הוא 10, אבל צריך לקחת בחשבון שכדי להשתמש בשיטת קווי שווי מומנט צריך לבנות את המסבך הדואלי. חשוב לציין, כי במקרה של מכניזם "Double Butterfly" יש צורך להשתמש בטכניקות מיוחדות (Foster and Pennock, 2003) למציאת המרכזים הרגועים, ולהבדיל, ניתן למצוא את כל הקווים שווי מומנט במסבך הדואלי של מכניזם זה באמצעות השיטה שתוארה באיור 4.6.

טענה 4.2: כל מעגל ב - EMLD מהווה חתך במסבך.

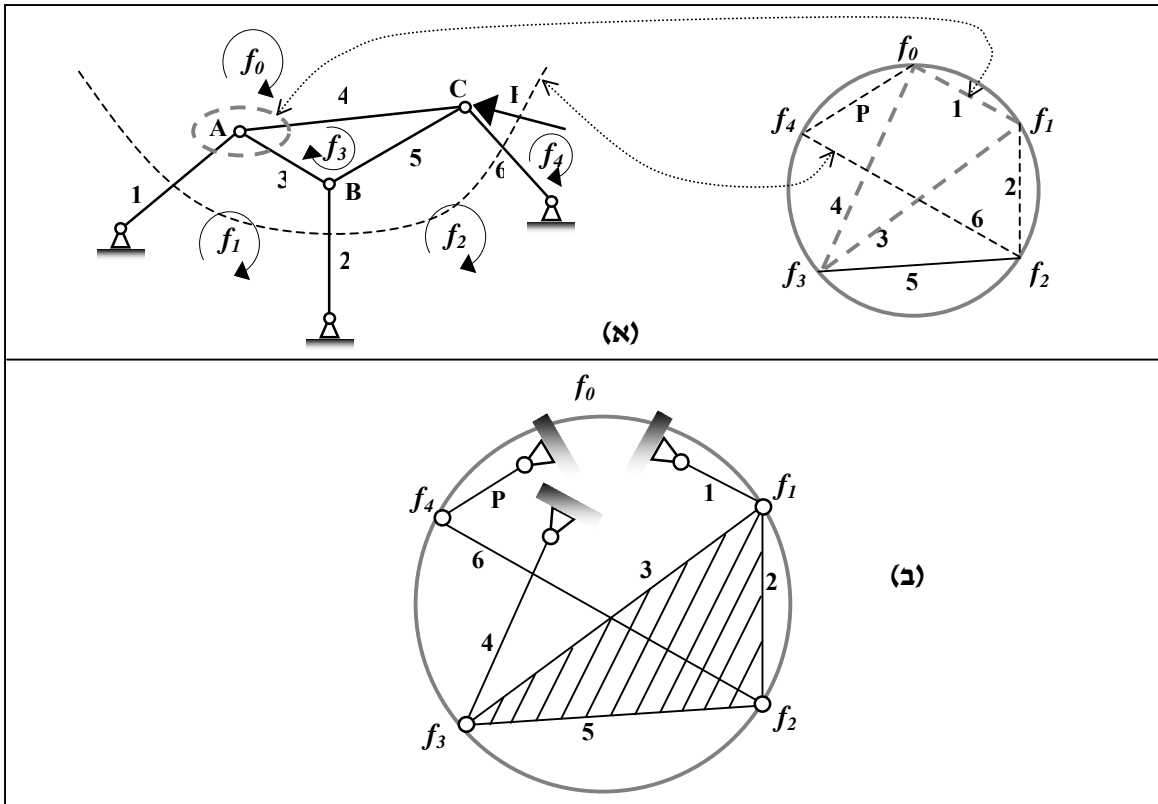
לפני ההוכחה, נסתכל על שני מעגלים בדיאגרמה (ראה איור 4.7 (א)):

ב - EMLD, המעגל שמוגדר על ידי קשתות 1,3,4 מתאים לחתך 1,3,4 במסבך;

מעגל שמוגדר על ידי קשתות P,1,2,6 מתאים לחתך P,1,2,6 במסבך.

הוכחה:

נשים לב על תהליך בניית EMLD: לכל פאה במסבך מתאים צומת בדיאגרמה, ואם יש מוט בין שתי פאות במסבך, אז יש קשת בין שני צמתים המתאימים לפאות אלו בדיאגרמה. במילים אחרות, התהליך של בניית הדיאגרמה זהה לבניית מכניזם הדואלי למסבך (ראה סעיפים 2.7 ו - 2.8). אם התהליך זהה, אזי טופולוגיית הדיאגרמה צריכה להיות זהה לטופולוגיית המכניזם הדואלי! וזה אכן כך, כפי שניתן לראות באיור 4.7 (ב), כאשר נשים סמכים במקום צומת הייחוס. ולפי כלל הדואליות, לכל חתך במערכת המקורית מתאים מעגל במערכת דואלית. לכן, לכל חתך במסבך מתאים מעגל בדיאגרמת קווים שווי מומנט.



איור 4.7: הוכחה כי לכל מעגל ב - EMLD מתאים חתך במסבך

(א) מסבך ו - EMLD המתאימה לו. בקווים מרוסקים מסומנים מעגל 1,3,4 ומעגל P,1,2,6 וחתיכים המתאימים למעגלים אלו במסבך. (ב) טופולוגיית הדיאגרמה זהה לטופולוגיית מכניזם הדואלי למסבך. אם נשים סמכים בצומת הייחוס, נוכל לראות את המכניזם.

טענה 4.3: לכל מעגל בגודל 3 ב - EMLD (של המסבך) מתאים צומת במסבך.
לדוגמא, למעגל 1,3,4 מאיור 4.7 (א) מתאים צומת A ולמעגל 2,3,5 מתאים צומת B.
הוכחה:

מעגל בגודל שלוש הינו משולש. ללא הגבלת הכלליות נקרא לקודקודי המשולש בדיאגרמת EMLD x, y, z . אזי צלעות המשולש יהיו m_{xz}, m_{yz}, m_{xy} (EML). לפי טענה 4.1 שלושת הקווים האלו צריכים להיפגש באותה נקודה במסבך. אותה נקודת המפגש הינה צומת במסבך.

לטענה 4.3 יהיה תפקיד חשוב, כאשר אנחנו נחקור את הכוחות בפאות של מכניזם במצב סינגולרי.

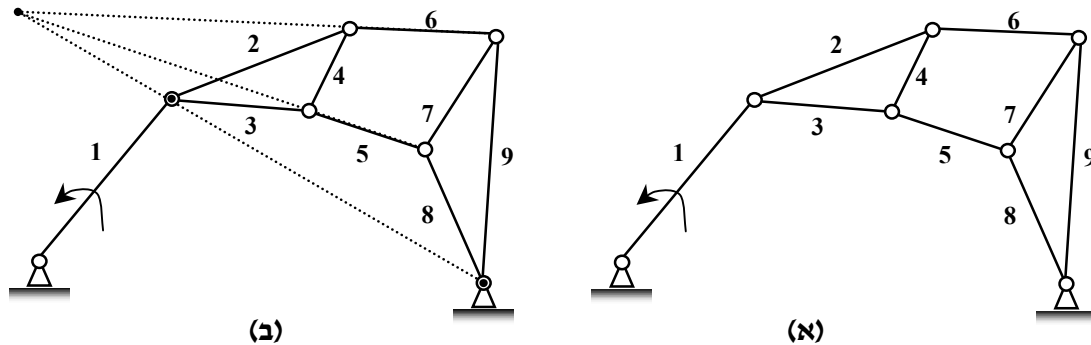
פרק 5

מציאת מצבים מתים (Dead Centers) טופולוגיים במכניזם בשיטת הכוח בפאה

פרק זה מציג שיטה למציאת מצבים מתים של מכניזם מתקדמת יותר המבוססת הפעם על כוחות בפאה. כמוכן, זו הרחבה של השיטה הקודמת, שיטת תזוזת הצמתים, שדווחה בפרק 3, כיוון שלכל צומת במכניזם מתאימה פאה במסבך הדואלי. מהעובדה שלכוח בפאה יש תכונות של פוטנציאל, שיטה זו מבטיחה, שאם יתכן וקיים כוח במכניזם (המכניזם במצב מת), השיטה תמצא אותו. בפרק זה יוראה כי שיטה זו יעילה ביותר למציאת המצבים המתים, וכן, מאפשרת לאפיין גיאומטרית את הגורמים או מצב הגיאומטרי של החוליות שגרם למכניזם להיות במצב תקוע.

בפרק 3 ראינו איך בעזרת הדואליות הקיימת בין מערכות סטטיות (מסבכים) למערכות קינמטיות (מכניזמים) ניתן לקבל את המצבים המתים של המערכת הקינמטית. ראינו, כי הדואליות שקיימת בין תזוזות יחסיות של מוטות במסבך לכוחות בחוליות של מכניזם דואלי, מגדירה מצבים מתים של המכניזם.

החיסרון של שיטת תזוזת הצמתים, כפי שמתואר בסעיף 3.4, הוא הקושי בהבנת הסיבה שגרמה למכניזם להיות במצב מת. במילים אחרות, לא תמיד ניתן להסיק, אילו תנאים החוליות של המכניזם מקיימות (לדוגמא ראה איור 5.1) שגורמים למצב תקוע.



איור 5.1: דוגמא למכניזם Stephenson II במצב מת, המתקבל מהפעלת שיטת התזוזות (א) גיאומטרית שהתקבלה בשיטת תזוזת הצמתים שתוארה בפרק 3. אין אפשרות לדעת אילו תנאים מתקיימים במצב זה. (ב) התנאי שמתקבל לאחר שימוש בשיטת הכוח בפאה הוא: חיתוכים של 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 נמצאים על קו אחד.

לעומת זאת, בפרק זה, המבוסס על כוחות בפאות, נקבל תמונה מלאה של הכוחות שיוכלו להתפתח בחוליות של מכניזם כפונקציה של טופולוגיית המכניזם בלבד, כאשר האורכים של החוליות אינם נתונים. כלומר, נוכל לאפיין את התנאים שחוליות המכניזם צריכות לקיים כדי שבמכניזם זה יתפתחו כוחות, דהיינו, המכניזם יהיה במצב מת.

בפרק זה נשתמש במשתנה כוח בפאה, שהתגלה מחקירת קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים (כפי שתואר פרק 4). כוח בפאה במסבך מתאים למהירות הליניארית של הצומת המתאימה במכניזם הדואלי. מצד שני, גם מכניזם במצב מת מתנהג כמסבך ולכן גם בפאות שלו מתפתחים כוחות.

בפרק זה נראה, כי הכוח בפאה של מכניזם במצב מת שקול לתזוזה של צומת מתאימה במסבך הדואלי. לכן, ניתן לתרגם את שיטת התזוזות לקבלת מצבים מתים של מכניזמים בעזרת המסבך

הדואלי, שתוארה בפרק 3 לשיטה אחרת שבמקום להזיז צמתים של מסבך הדואלי תפעיל כוחות בפאות המכניזם. נקרא לשיטה חדשה – שיטת הכוח בפאה. שיטה זו תאפשר לנו להפעיל אותה ישירות על המכניזם ולא יהיה צורך בבניית המסבך הדואלי.

בפרק זה נחקור את הכוחות המתפתחים בפאות המכניזם במצב מת ונראה אילו תנאים לסינגולריות קיימים ואיך ניתן לקבל אותם בעזרת דיאגרמת קווים שווי מומנט (EMLD). נעבור על כל השלבים של שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים של מכניזם, נדון בשאלת מספר המצבים המתים הקיימים במכניזם מסוים. נוכיח, כי כדי לקבל מצב מת שונה צריך להפעיל את השיטה על קונפיגורציה אחרת של פאות, ובסוף נראה מספר דוגמאות להפעלת השיטה.

5.1. תזוזה (פוטנציאל) של צומת במסבך דואלי שקולה לכוח (זרימה) בפאה במכניזם תקוע.

שיטת התזוזות למציאת מצבים מתים של מכניזם בעזרת המסבך הדואלי, שתוארה בפרק 3 מבוססת על ייצוג של כוחות במכניזם במצב מת כגרף זרימות (סעיף 3.2), על ייצוג של תזוזות במסבך כגרף פוטנציאלים (סעיף 3.1) ועל הדואליות בין שני הייצוגים (סעיף 3.3.1). לצמתי המסבך ניתנו תזוזות (פוטנציאלים בצמתים של גרף פוטנציאלים), חושבו תזוזות יחסיות על כל המוטות (הפרשי הפוטנציאלים על גבי קשתות של גרף פוטנציאלים) ותזוזות אלו התאימו לכוחות בחוליות של המכניזם הדואלי (זרימות בקשתות של גרף הזרימות) (ראה טבלה 5.1).

טבלה 5.1: קשרי הדואליות עליהם מבוססת שיטת תזוזת הצמתים

מסבך (גרף פוטנציאלים)	מכניזם (גרף זרימות)
תזוזה של צמתים (פוטנציאלים בצמתים)	?
תזוזות יחסיות של מוטות (הפרשי פוטנציאלים על הקשתות)	כוחות בחוליות (זרימות בקשתות)

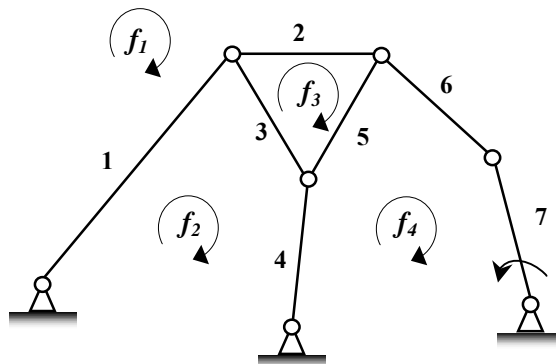
מצד שני, לפי כלל הדואליות, (סעיף 2.7) פוטנציאלים בצמתים של הגרף הדואלי מתאימים לזרימות בפאות של הגרף המקורי, לכן התזוזות שניתנו לצמתים של המסבך מתאימות לכוחות בפאות המכניזם (המשבצת הריקה בטבלה 5.1). לכן, תזוזת צמתים בשיטה המתוארת בפרק 3 שקולה להפעלת כוחות בפאות מתאימות של המכניזם. אם נפעיל כוחות שונים מאפס בפאות המכניזם, נוכל לחשב ישירות, ללא צורך בבניית המסבך הדואלי, את הכוחות הפועלים לאורך החוליות! כך בעצם ניתן לתרגם את שיטת התזוזות שתוארה בפרק 3 לשיטה יעילה, נוחה וכללית יותר, כי בעזרת קווים שווי מומנט נוכל לאפיין את כל התנאים לסינגולריות, בזמן שמשיטה קודמת התקבל רק שרטוט של המכניזם במצב מת בלי אפיון כזה. נקרא לשיטה זו שיטת הכוח בפאה. בשלב הבא נדון במספר המקסימלי של מצבים מתים האפשריים למכניזם, או במילים אחרות על כמה קונפיגורציות שונות של פאות המכניזם נפעיל את שיטת הכוח בפאה.

5.2. הגדרת קונפיגורציה חוקית של פאות עבור שיטת הכוח בפאה

בסעיף 3.3.5 הוסבר כי למכניזם יכולים להיות מספר מצבים מתים. כפי שנוכיח בהמשך, ניתן לקבל מצב מת שונה על ידי הפעלת כוחות בקונפיגורציה (קבוצה) אחרת של פאות בשיטת הכוח בפאה. לכן, כדי לקבל את כל המצבים האפשריים, צריך להפעיל את השיטה על מספר קונפיגורציות של פאות במכניזם.

המספר הכולל של כל הקונפיגורציות האפשריות הינו 2^f , כאשר f הוא מספר הפאות במכניזם. בעבודה זו נתאר את הקונפיגורציות על ידי ווקטורים באורך f , כאשר בכל ווקטור אם יש 1 במקום k – אזי יש כוח שונה מאפס בפאה מספר k .

באיור 5.2 ניתן לראות דוגמא למכניזם Stephenson III שיש בו ארבע פאות, ובטבלה 5.2 רשומות כל הקונפיגורציות ($2^4 = 16$) האפשריות של ארבעת הפאות המכניזם. ברור כי אין צורך להפעיל את שיטת הכוח בפאה על כל 16 הקונפיגורציות.



איור 5.2: דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות

טבלה 5.2: הקונפיגורציות חוקיות (אפור) בתוך כל הקונפיגורציות האפשריות של פאות המכניזם מאיור 5.2

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	1	0	1	1
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0
6	0	0	1	1
7	1	0	0	1
8	1	1	0	0
9	1	1	1	0
10	0	0	1	1
11	0	1	1	0
12	1	0	0	0
13	0	1	0	0
14	0	0	1	0
15	0	0	0	1
16	0	0	0	0

בשלב זה נגדיר את הקונפיגורציות הרלוונטיות ונקרא להן **הקונפיגורציות החוקיות**. כפי שמסומן בטבלה 5.2, ניתן לחלק את הקונפיגורציות ל – 4 קבוצות:

קבוצה 1 כוללת קונפיגורציה עם כוחות בכל הפאות.

קבוצה 2 כוללת את כל הקונפיגורציות, בהן בכל הפאות חוץ מפאה אחת מופעלים כוחות. בטבלה 5.2 אלה קונפיגורציות 2 – 5.

קבוצה 3 כוללת את הקונפיגורציות, בהן לא מופעלים כוחות בשתיים או יותר פאות. בטבלה 5.2 אלה קונפיגורציות 6 – 15.

קבוצה 4 כוללת את הקונפיגורציה, בה לא פועל כוח באף פאה. ברור כי קונפיגורציה זו לא מעניינת, כי עם כוח בכל הפאות שווה לאפס, אזי כוחות בכל החוליות שווים לאפס ומצב כזה של מכניזם הוא מצב רגיל ולא מצב מת.

אם ניקח את הקונפיגורציה הראשונה ונבחר את אחת הפאות לפאת ייחוס (לא פועל בה כוח), נקבל את כל הקונפיגורציות מהקבוצה 2 (כל פעם פאת ייחוס היא פאה אחרת). לפי סעיף 2.2 (איור 2.9), ניתן להתייחס אל פאה אחת כפאת ייחוס (אין משמעות איזו) ולהתייחס לכוחות בשאר הפאות ביחס לפאה זו. כלומר, אם הפעלנו את שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציה מספר 1 של פאות, אין צורך להתייחס אל קונפיגורציות מקבוצה 2.

לגבי קבוצה 3: ברור כי אין צורך לבדוק קונפיגורציות, בהן הכוח שמפעילה חוליית הכניסה שווה לאפס. לכן נתייחס רק לקונפיגורציות בהן לפחות באחד הפאות הסמוכות לחוליית הכניסה יש כוח שונה מאפס. במכניזם שבאיור 5.2 שתי הפאות הסמוכות לחוליית הכניסה (7) הן פאה 1 ופאה 4. לכן, מתוך קבוצה 3 הקונפיגורציות החוקיות הן כל אלה, שכוללות כוח באחת מהפאות הללו. כל הקונפיגורציות החוקיות של מכניזם מאיור 5.2 מסומנות בטבלה 5.2 בצבע אפור.

5.3. קבלת תנאים גיאומטריים הקיימים במכניזם במצב תקוע

5.3.1 בניית דיאגרמת קווים שווי מומנט (EMLD) של מכניזם

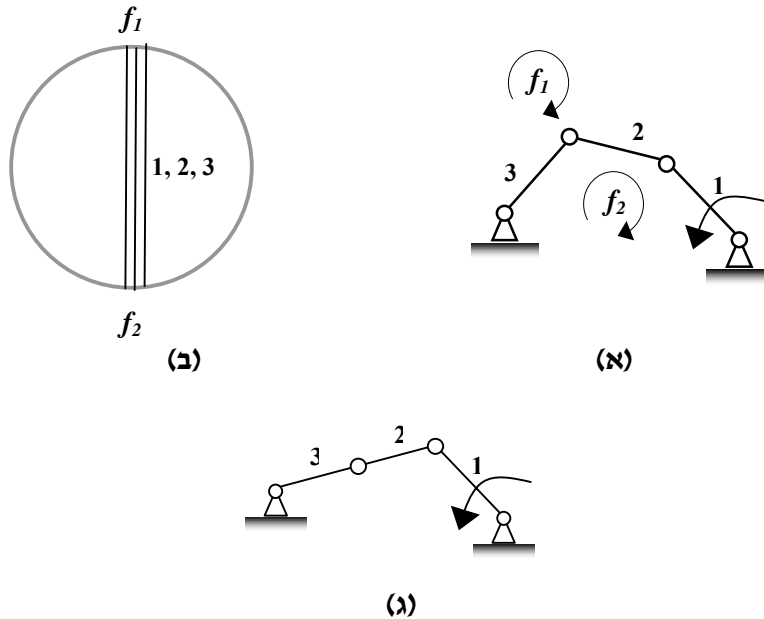
לפי סעיף 4.2.1, כל מוט במסבך מהווה EML של שני הכוחות בפאות הסמוכות לו. בגלל שמכניזם במצב מת מתנהג כמסבך (סעיף 1.5), כל חוליה בו מהווה EML של שני הכוחות בפאות הסמוכות לה. לכן בדומה לבנייה של EMLD עבור מסבך שתוארה בסעיף 4.2.2, כל חוליה תיוצג ב - EMLD על ידי קשת שמחברת בין שתי פאות הסמוכות לחוליה. ההבדל היחיד הוא שקשת המתאימה לחוליה תופיע ב - EMLD אם לפחות באחת הפאות הסמוכות לה מופעל כוח שונה מאפס.

בשלב זה נפרט מהם התנאים האפשריים (חוליות מקבילות, חיתוך של שלושה קווים בנקודה אחת או קו מסוים יעבור בנקודות מסוימות) ואיך אפשר לקבל את התנאים האלה מ - EMLD של המכניזם. עבור כל תנאי נראה דוגמא. השיטה מתייחסת אל המכניזם כאילו היה מסבך ומתייחסת ל - EML שלו בדומה לשיטה לפתרון מסבכים שתוארה בסעיף 4.2.2. התנאים לסינגולריות המתקבלים הם

תנאים הכרחיים להתפתחות כוחות שונים מאפס בקונפיגורציה נתונה של פאות המכניזם. נדגיש שכל התנאים המתקבלים עבור הפעלת כוחות בפאות המכניזם צריכים להתקיים.

5.3.2 תנאי של חוליות מקבילות

לאחר שנבנתה EMLD, ניתן להבחין אילו חוליות מקבילות. אם ב - EMLD ישנם שניים או יותר קווים המחברים בין אותם פאות, כלומר קווים מקבילים, אזי כוחות הפועלים בחוליות המיוצגות על ידי קווים אלו שווים. אם הכוחות שווים אזי גם החוליות עצמן מקבילות. תנאי של חוליות מקבילות זה אחד מתנאים לסינגולריות שנאפיין בעבודה זו. לדוגמא, נסתכל על מכניזם מאיור 5.3 (א) ועל EMLD המתאימה (איור 5.3 (ב)), אשר בה חוליות 2,3 וכוח שמפעילה חוליה 1 מיוצגות על ידי קווים מקבילים. מכאן ניתן להסיק, שכדי שיתפתחו כוחות בשתי הפאות של המכניזם, חוליות 2,3 וכוח שמפעילה חוליה 1 צריכים להיות מקבילים (איור 5.3 (ג)).



איור 5.3: דוגמא לתנאי של חוליות מקבילות

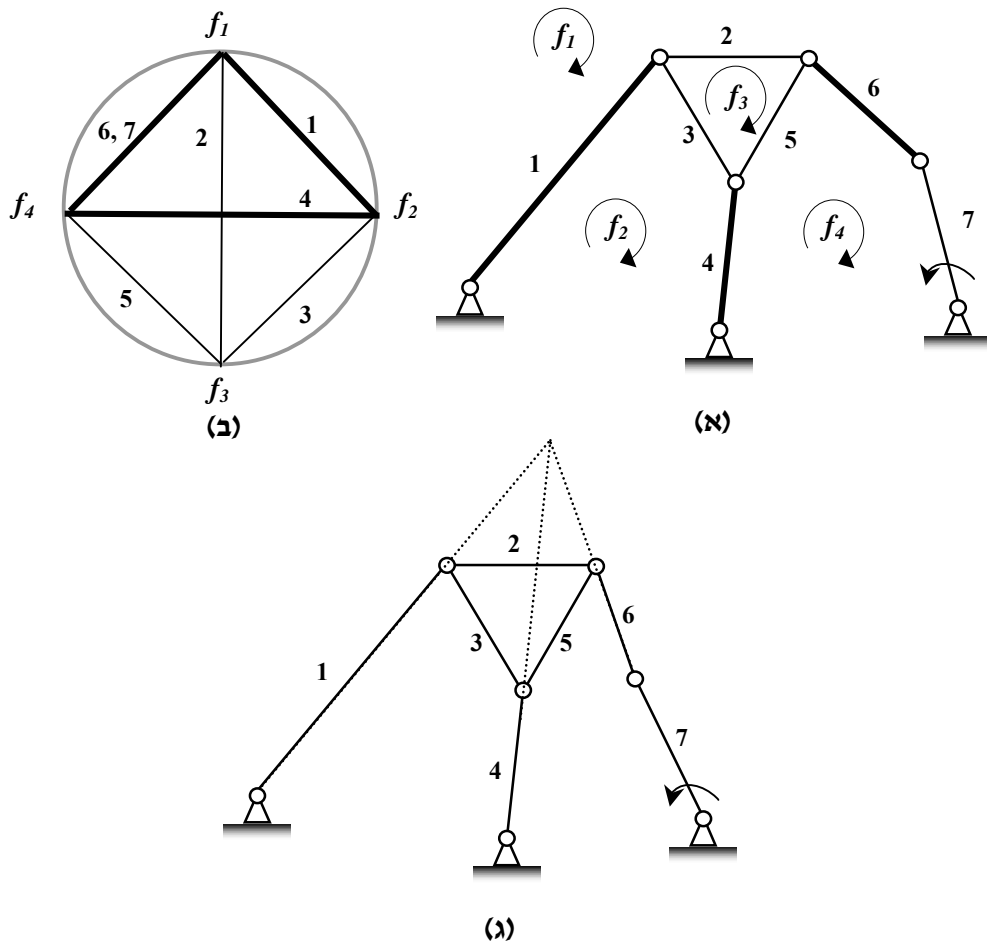
(א) מכניזם נתון (ב) EMLD. רואים כי חוליות 2,3 וכוח שמפעילה חוליה 1 מיוצגות בדיאגרמה על ידי קווים מקבילים. מכאן ניתן להסיק (ג) שחוליות 2,3 וכוח שמפעילה חוליה 1 מקבילים.

בהמשך העבודה, הקווים המקבילים ב - EMLD יסומנו על ידי קו בודד, כדי לא להעמיס את האיור.

5.3.3 תנאי של חיתוך המשכי שלוש חוליות בנקודה אחת

לפי טענה 4.3, כל מעגל בגודל שלוש ב - EMLD מתאים לצומת במכניזם, המחבר בין שלושת החוליות שמתאימות לשלושת הצלעות של המעגל ב - EMLD. לשם נוחות הרישום, מעגל בגודל שלוש יקרא בתיזה "משולש" ב - EMLD. אם צומת המתאים למשולש לא קיים במכניזם במצב רגיל, כלומר, אין נקודת חיבור בין שלושת החוליות, קיבלנו צומת חדש שקיים רק במצב סינגולרי של המכניזם. במילים אחרות, קיבלנו תנאי לסינגולריות. כדי לקיים את התנאי הזה, המשכי שלושת החוליות צריכים להיפגש בנקודה אחת.

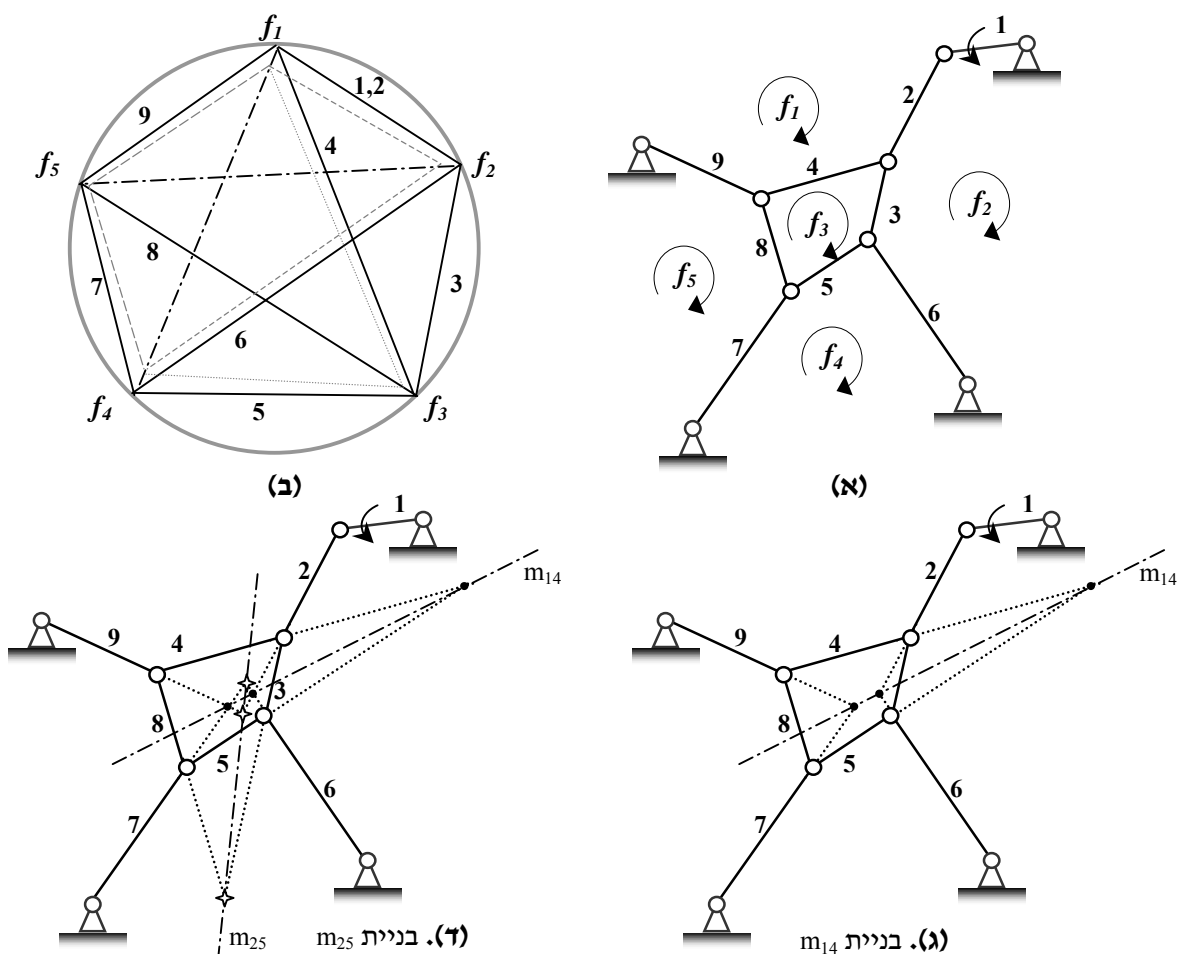
למשל, ב - EMLD באיור 5.4 (ב) קיים משולש המורכב מ - 1, 4 ו - 6. במכניזם במצב רגיל (איור 5.4 (א)) אין צומת המחבר בין חוליות 1, 4 ו - 6, לכן קיבלנו תנאי לסינגולריות שהמשכי שלושת החוליות הללו צריכים להיפגש בנקודה אחת, כמו באיור 5.4 (ג).



איור 5.4: דוגמא לקבלת תנאי של חיתוך המשכי שלוש חוליות של מכניזם בנקודה אחת
 (א) מכניזם של EMLD 5.4 (א). ב - EMLD קיים מעגל (1,4,6). במכניזם במצב רגיל 5.4 (א) אין חיבור בין שלושת חוליות אלה. לכן תנאי לסינגולריות (ג) הוא חיתוך של המשכי (1,4,6) בנקודה אחת.

5.3.4. תנאי של שלוש או יותר נקודות להיות לאורך קו אחד

לאחר שנבנתה EMLD, נוכל לבנות את EML שחסרים כדי להשלים את EMLD. כפי שהוסבר בסעיף 4.2.2, ניתן למצוא EML החסר אם הוא משלים שני משולשים עם EML הקיימים כבר ב-EMLD (בדומה למציאת קו חסר במעגל קנדי (פסן ו- שבט, 1975)). כל אחד מהמשולשים מייצג חיתוך של חוליות (או EML ידועים) של מכניזם, לכן הקו החסר יעבור דרך חיתוכים אלה. במקרה שהקו החסר משלים יותר משני משולשים ב-EMLD, קיבלנו שהוא צריך לעבור דרך יותר משני חיתוכים. לכן קיבלנו תנאי לסינגולריות שאומר שיותר משני חיתוכים צריכים להימצא על קו אחד. לדוגמה באיור 5.5: קו m_{14} משלים שלושה משולשים: עם חוליות 2 ו-6, עם חוליות 4 ו-5 ועם חוליות 9 ו-7. לכן קיבלנו תנאי לסינגולריות שאומר שנקודות חיתוך בין 2 ו-6, בין 4 ו-5 ובין 9 ו-7 צריכות להימצא על קו אחד - m_{14} .

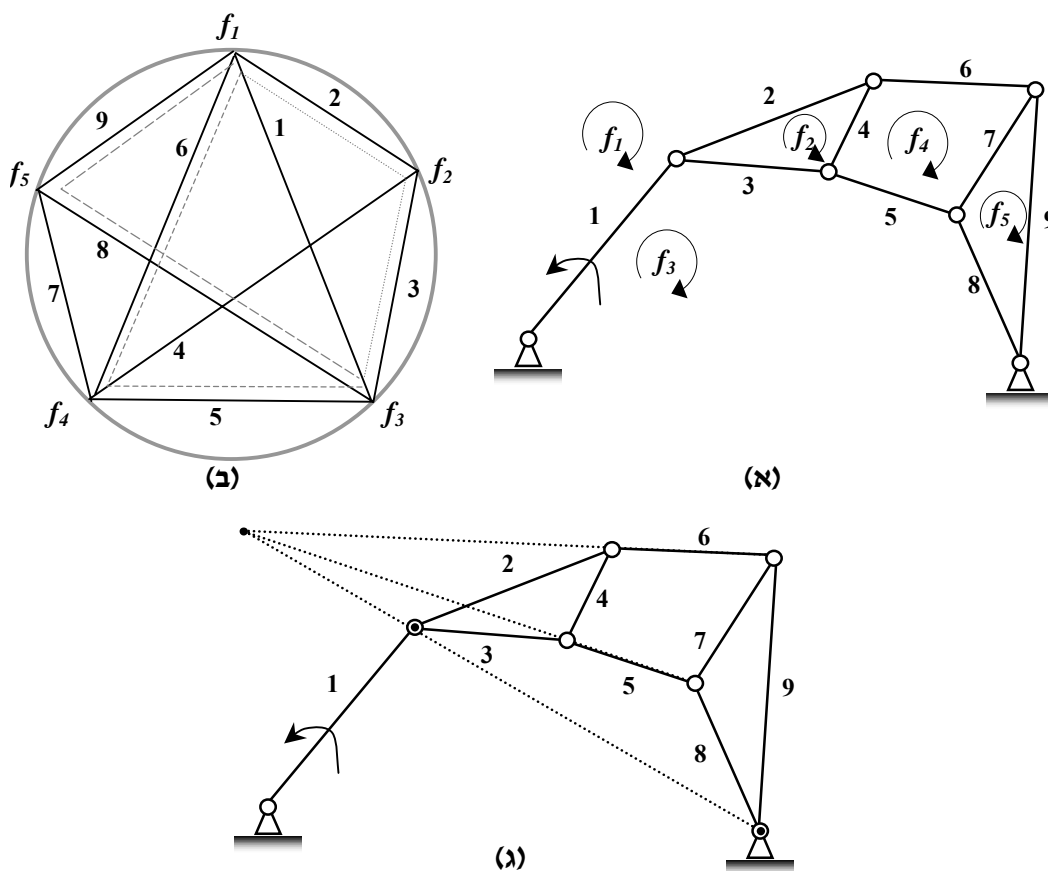


איור 5.5: דוגמה לקבלת תנאי שלוש נקודות צריכות להיות על קו אחד

(א) מכניזם נתון (ב) EMLD של מכניזם 5.5. (א) שני קווים חסרים ב-EMLD: קו m_{14} וקו m_{25} . (ג) קו m_{14} צריך לעבור בחיתוך של חוליות 2 ו-6, של חוליות 4 ו-5 ושל חוליות 9 ו-7. לכן התנאי הראשון לסינגולריות הוא ששלושת החיתוכים האלה צריכים להימצא על קו אחד. (ד) קו m_{25} צריך לעבור בחיתוך של חוליות 2 ו-6, של חוליות 4 ו-5 ושל חוליות 9 ו-7. לכן התנאי השני לסינגולריות הוא ששלושת החיתוכים האלה צריכים להימצא על קו אחד.

5.3.5 מציאת כיוון הכוח המופעל על ידי חוליית כניסה

בתהליך מציאת EML החסרים ב - EMLD, השיטה אינה משתמשת בחוליית הכניסה. הסיבה היא שהכיוון של הכוח שחוליית הכניסה מפעילה על שאר החוליות אינו ידוע. כאשר כל קווים שווי מומנט נמצאו, נותר למצוא את כיוון הכוח באמצעות בדיקה דרך אילו נקודות הוא עובר. לשם כך נסתכל על כל משולש ב - EMLD של המכניזם, הכולל את הקו, המייצג את חוליית הכניסה. אם יש יותר משני משולשים, הייתכן וקיבלנו תנאי לסינגולריות שאומר שיותר משני חיתוכים של חוליות (או EML) של מכניזם צריכים להימצא על קו אחד, כאשר קו זה הוא קו כיוון הכוח. לדוגמא ראה איור 5.6.



איור 5.6: דוגמא לקבלת תנאי לסינגולריות תוך מציאת כיוון פעולת הכוח המופעל על ידי חוליית הכניסה (א) מכניזם נתון. (ב) EMLD של המכניזם 5.6 (א). קו m_{13} שמייצג את הכוח שמפעילה חוליית הכניסה 1, משלים שלושה משולשים: עם חוליות 8 ו - 9, עם חוליות 5 ו - 6 ועם חוליות 2 ו - 3. (ג) המפגש של 1 עם שלוש זוגות אלו חייב להיות על קו אחד לפי טענה 4.1.

חשוב לציין שאם הקשת ב - EMLD שמייצגת את חוליית הכניסה יש קשת מקבילה, כמו באיור 5.5, קשת 1 מקבילה לקשת 2, כיוון הכוח ידוע ומקביל לחוליה שמוצגת על ידי אותה קשת מקבילה. במקרה כזה אין צורך לבדוק את כיוון הכוח.

5.4. שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים של מכניזמים

עבור מכניזם נתון מצא את כל הפאות. מצא את כל הקונפיגורציות החוקיות (לפי סעיף 5.2).
עבור כל הקונפיגורציה כזו בצע:

1. בנה את EMLD של המכניזם כמתואר בסעיף 5.3.1.

עד לשלב מספר 4 אין להתייחס לקשת ב - EMLD שמייצגת את חוליית הכניסה (ראה סעיף 5.3.5).

2. בדיקת תקפות התנאים הנובעים מ - EMLD – בדיקה ראשונית האם ייתכן קבלת תנאי לסינגולריות מהנתונים הנובעים מ - EMLD.

א. בדוק תנאי חוליות מקבילות (ראה סעיף 5.3.2). במידה וקיים משולש במכניזם

ומהדיאגרמה נובע כי שתיים מצלעותיו מקבילות, עצור, לא קיימת קונפיגורציה כזו.

ב. מצא את כל המשולשים ב - EMLD, עבור כל משולש בדוק אם לא התקבל תנאי של חיתוך

של המשכי שלוש חוליות בנקודה אחת (לפי 5.3.3).

3. מצא את כל EML שחסרים ב - EMLD. בסיום שלב זה EMLD תהפוך להיות גרף שלם, כלומר, בין כל שני צמתים שלה קיימת קשת. בכל שלב בו נמצא EML חסר, התייחס אליו כאל EML ידוע והשתמש בו למציאת קווים חסרים נוספים.

בכל מציאה של EML חסר בדוק אם לא התקבל תנאי לסינגולריות האומר שיותר משני חיתוכים

של חוליות (או EML) במכניזם צריכים להימצא על קו אחד (לפי סעיף 5.3.4).

4. מצא את כיוונו של הכוח החיצוני שחוליית הכניסה מפעילה על המכניזם (לפי 5.3.5). בדוק אם לא התקבל תנאי לסינגולריות האומר שיותר משני חיתוכים של חוליות (או EML) במכניזם צריכים להימצא על קו אחד.

5.5. הוכחת יחידות הפתרון של שיטת הכוח בפאה

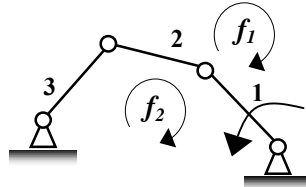
טענה 5.1: הפעלת השיטה על קונפיגורציה מסוימת של פאות המכניזם תיתן מצב מת אחד ויחיד של המכניזם, בו יתפתחו כוחות בקונפיגורציה זו של פאות.
הוכחה:

נניח בשלילה כי הפעלנו כוחות באותה קונפיגורציה של פאות במכניזם וקיבלנו שני מצבים מתים שונים. השוני בין שני המקרים יהיה, כמובן, בתנאים לסינגולריות. כלומר באחד מהמקרים יהיה לפחות תנאי אחד שלא קיים במקרה השני. אבל, כפי שהוסבר בסעיף 5.3.1, כדי שיתפתחו כוחות באותה קונפיגורציה של כוחות שאליה הופעלה השיטה, כל התנאים לסינגולריות צריכים להתקיים. לכן, לא יכול להיות שהמקרה השני התקבל מהפעלת השיטה.

מכיוון ששיטת תזוזת הצמתים ושיטת הכוח בפאה הן בעצם אותה שיטה, הוכחנו גם כי מתזוזה של כל קבוצה שונה של צמתים של המסבך הדואלי מתקבל מצב מת אחד ויחיד של המכניזם.
לפני שנדבר על הורדת מספר המקרים (הורדת הסיבוכיות), נראה שלוש דוגמאות להפעלת השיטה.

5.6. דוגמאות להפעלת השיטה

דוגמא מס' 1 - הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם ארבע חוליות: נתון מכניזם ארבע חוליות (ראה איור 5.7). תהליך של הפעלת השיטה מפורט באיור 5.8.



איור 5.7: מכניזם ארבע חוליות עם פאות מסומנות

טבלה 5.3: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.7

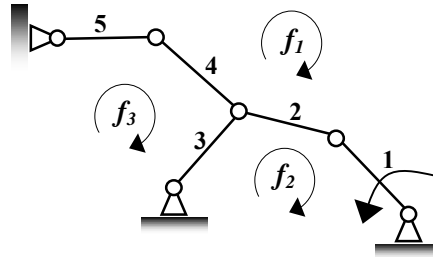
מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2
1	1	1

	<p>1.EMLD. בניית</p>
<p>- EMLD יש כוחות בכל החוליות, לכן לכל חוליה מתאימה קשת ב - חוליות 2 ו 3 - מקבילות</p>	<p>2. (א) בדיקת תנאי חוליות מקבילות</p>
<p>- EMLD אין משולשים ב -</p>	<p>2. (ב) בדיקת משולשים</p>
<p>- EMLD אין קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים EMLD חסרים ב -</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל EMLD לפי לחוליות 2 ו 3 -</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליה 2 מקבילה לחוליה 3 כיוון כוח, שחוליה 1 מפעילה, מקביל לכיוון של חוליות 2 ו 3 -</p>	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.8: הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם ארבע חוליות

ברור כי במקרה שחוליה 3 תהיה חוליית הכניסה, היינו מקבלים את אותו מצב סינגולרי כמו במקרה זה בגלל הסימטריות.

דוגמא מס' 2 - הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם שתי דיאדות :
 נתון מכניזם שתי דיאדות (ראה איור 5.9). הקונפיגורציות החוקיות להפעלת שיטת הכוח בפאה עבור
 חוליית הכניסה 1 רשומות בטבלה 5.4.

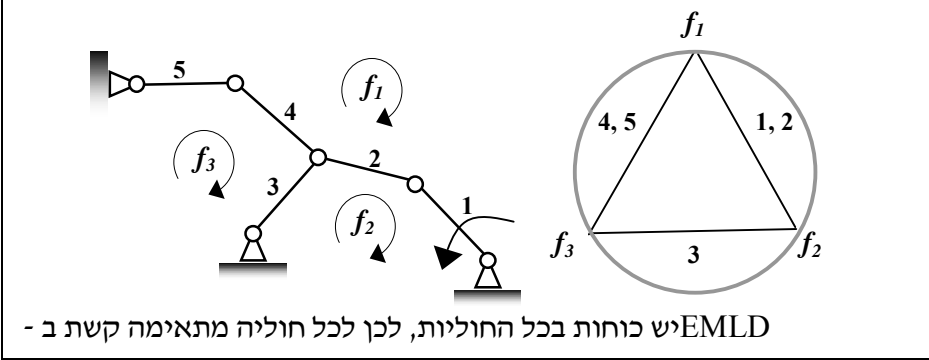
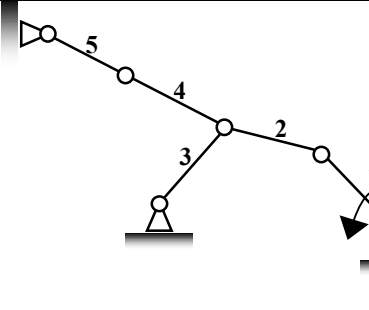


איור 5.9: מכניזם שתי דיאדות עם פאות מסומנות

טבלה 5.4: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.9

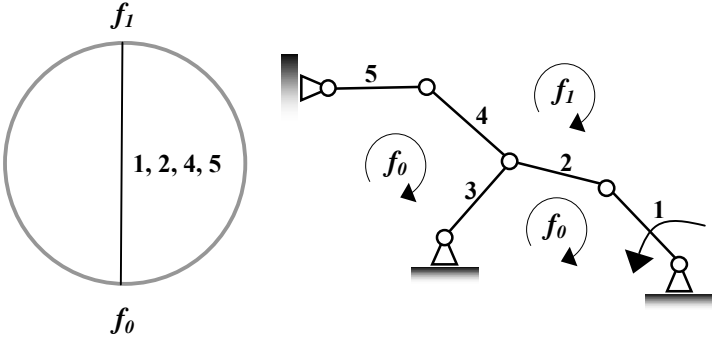
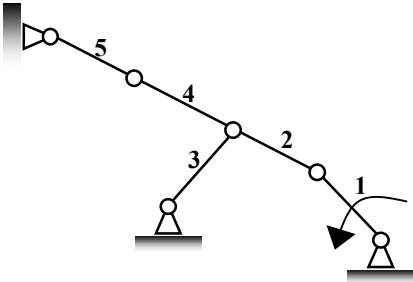
מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3
1	1	1	1
2	1	0	0
3	0	1	0

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 1 (1,1,1):

 <p>EMLD יש כוחות בכל החוליות, לכן לכל חוליה מתאימה קשת ב -</p>	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>חוליות 4 ו - 5 מקבילות</p>	<p>2. בדיקת תנאי חוליות מקבילות (א)</p>
<p>ישנו משולש אחד שמורכב מחוליות 2, 3, וחוליות 4 ו - 5 יש EMLD ב - במכניזם צומת המחברת בין חוליות 2, 3 ו - 4, וחוליה 5 נמצאת באותו קו עם חוליה 4, לכן אין תנאי חדש לסינגולריות.</p>	<p>2. בדיקת משולשים (ב)</p>
<p>EMLD אין קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2.</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות : חוליה 5 מקבילה לחוליה 4 כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.10: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

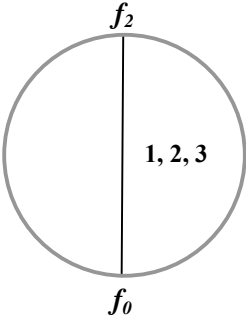
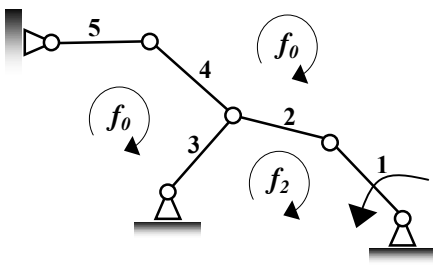
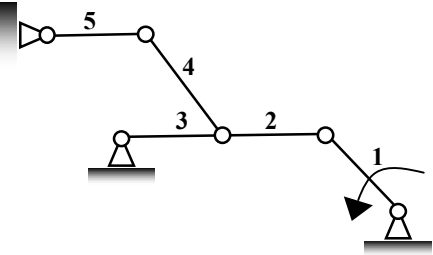
הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 2 (1,0,0):

 <p>יש כוחות בכל החוליות חוץ מחוליה 3, לכן לכל חוליה חוץ מחוליה 3 EMLD מתאימה קשת ב -</p>	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>חוליות 2, 4 – 1 – 5 מקבילות</p>	<p>2. (א) בדיקת תנאי חוליות מקבילות</p>
<p>EMLD אין משולשים ב -</p>	<p>2. (ב) בדיקת משולשים</p>
<p>EMLD אין קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2 EMLD לפי</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 2, 4 – 1 – 5 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.11: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 2 של פאות

ניתן לראות שקיבלנו בעצם את מקרה הפרטי של מצב סינגולרי שהתקבל בקונפיגורציה מס' 1 (איור 5.10).

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 3 (0,1,0):

  <p>יש כוחות בכל החוליות חוץ מחוליות 4 ו-5, לכן לכל חוליה חוץ מחוליות EMLD 4 ו-5 מתאימה קשת ב -</p>	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>חוליות 2 ו-3 מקבילות</p>	<p>2. בדיקת תנאי חוליות מקבילות (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>2. בדיקת משולשים (ב)</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2 EMLD לפי</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 2 ו-3 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.12: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עבור קונפיגורציה מס' 3 של פאות

עד עכשיו ראינו את כל המקרים הסינגולריים בהם חוליה 1 היא חוליית הכניסה. כפי שניתן לראות אם חוליה 5 הייתה חוליית הכניסה, היינו מקבלים את אותם המקרים, בגלל הסימטריות. בשלב זה נבדוק את המצבים הסינגולריים כאשר חוליה 3 היא חוליית הכניסה.

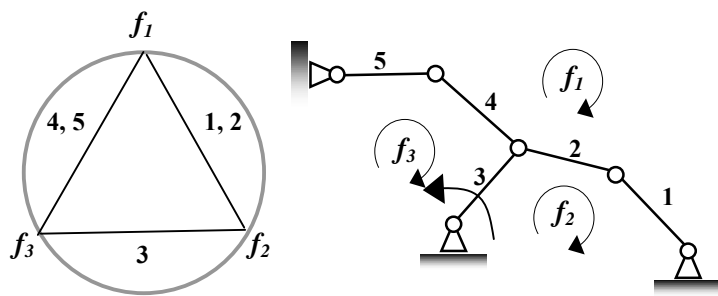
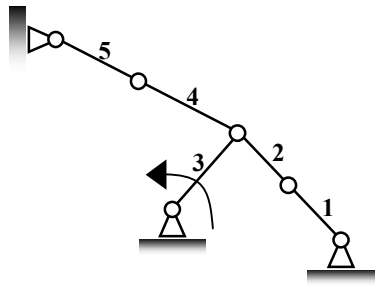
כאשר חוליה 3 היא חוליית הכניסה:

נמצא את כל הקונפיגורציות החוקיות (ראה טבלה 5.5):

טבלה 5.5: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3
1	1	1	1
2	0	1	0
3	0	0	1

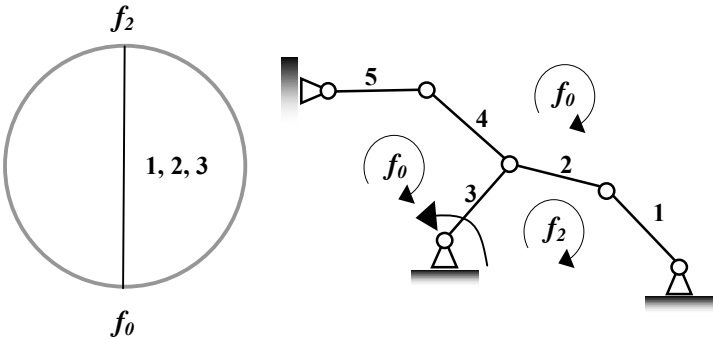
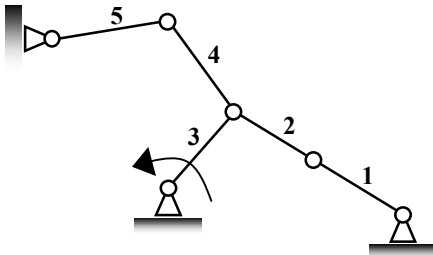
הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 1 (1,1,1):

	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>EMLD יש כוחות בכל החוליות, לכן לכל חוליה מתאימה קשת ב -</p>	<p>2. (א) בדיקת תנאי חוליות מקבילות</p>
<p>חוליות 1 ו- 2 מקבילות חוליות 4 ו- 5 מקבילות</p>	<p>2. (ב) בדיקת משולשים</p>
<p>אין אף משולש אשר לא כולל את קשת 3, המייצגת את הכוח EMLD - שמפעילה חוליית הכניסה</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>EMLD אין קווים חסרים ב -</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>הכוח שחוליה 3 מפעילה על המכניזם צריך לעבור דרך חיתוך של חוליות 2 ו- 4, אין לנו אינפורמציה לגבי כיוונו של הכוח</p>	<p>מכניזם במצב מת</p> 

איור 5.13: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

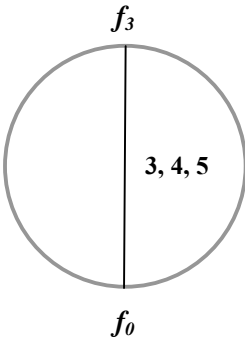
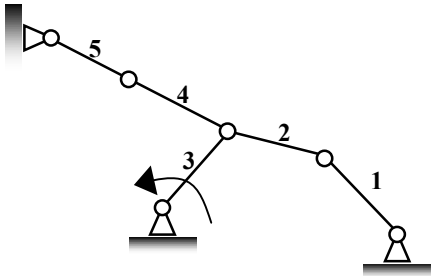
לגבי כיוון הכוח, אותו מפעילה חוליה 3: אם חוליות 1 ו- 2 אינן מקבילות לחוליות 4 ו- 5, חוליה 3 תמיד תפעיל כוח, לא משנה איך היא תמוקם (ראה סעיף 3.3.1, איור 3.5).

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 2 (0,1,0):

 <p>יש כוחות בכל החוליות חוץ מחוליות 1 ו- 5, לכן לכל חוליה חוץ מחוליות 1 ו- 5 EMLD מתאימה קשת ב -</p>	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>חוליות 1 ו- 2 מקבילות</p>	<p>2. בדיקת תנאי חוליות מקבילות (א) בדיקת משולשים</p>
<p>EMLD אין משולשים ב -</p>	<p>2. בדיקת משולשים (ב) בדיקת</p>
<p>EMLD אין קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 3 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 1 ו- 2 EMLD לפי</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 1 ו- 2 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 3 מפעילה מקביל לחוליות 1 ו- 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.14: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 2 של פאות

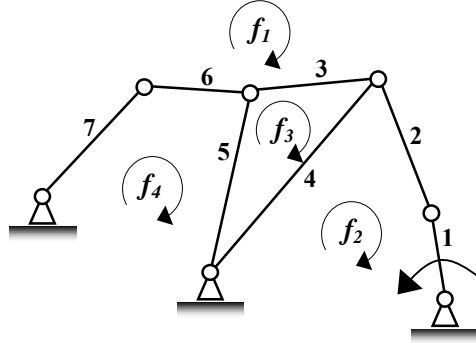
הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 3 (0,0,1):

 <p>יש כוחות בכל החוליות חוץ מחוליות 1 ו- 2, לכן לכל חוליה חוץ מחוליות 1 ו- 2 מתאימה קשת ב - EMLD</p>	<p>1. בניית EMLD</p>
<p>חוליות 4 ו- 5 מקבילות</p>	<p>2. (א) בדיקת תנאי חוליות מקבילות</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>2. (ב) בדיקת משולשים</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>3. בניית קווים חסרים ב - EMLD</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 3 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 4 EMLD לפי 1 - 5</p>	<p>4. מציאת כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם</p>
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 4 ו- 5 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 3 מפעילה מקביל לחוליות 4 ו- 5</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.15: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.9 עם חוליית כניסה 3 עבור קונפיגורציה מס' 3 של פאות

ניתן לראות כי מקרה שהתקבל מקונפיגורציה מס' 1 הוא חיבור בין מקרים שהתקבלו בקונפיגורציות 2 - 3.

דוגמא מס' 3 – הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם Watt II :
 נתון מכניזם Watt II, ראה איור 5.16. באותו איור מסומנות הפאות של המכניזם.
 חוליית הכניסה היא חוליה 1.



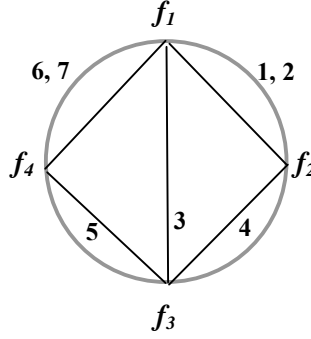
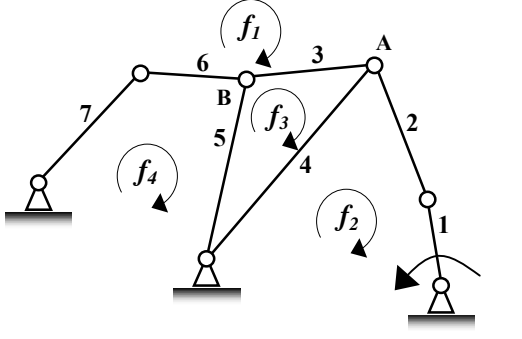
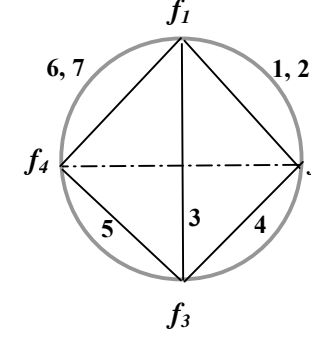
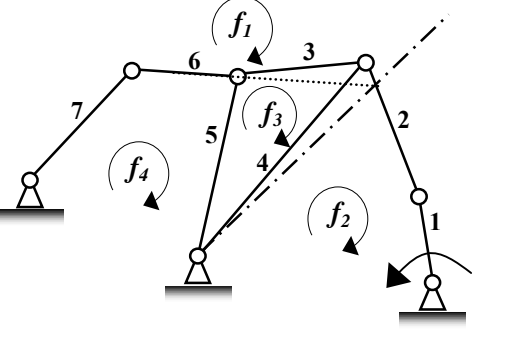
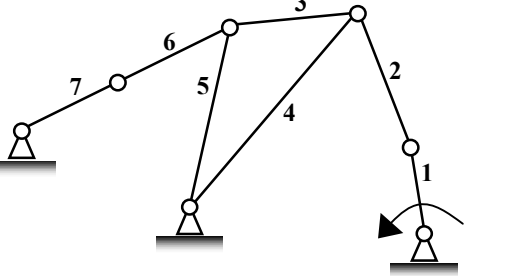
איור 5.16: מכניזם Watt II עם פאות מסומנות

נרשום את כל הקונפיגורציות החוקיות לפי סעיף 5.2 (ראה טבלה 5.6).

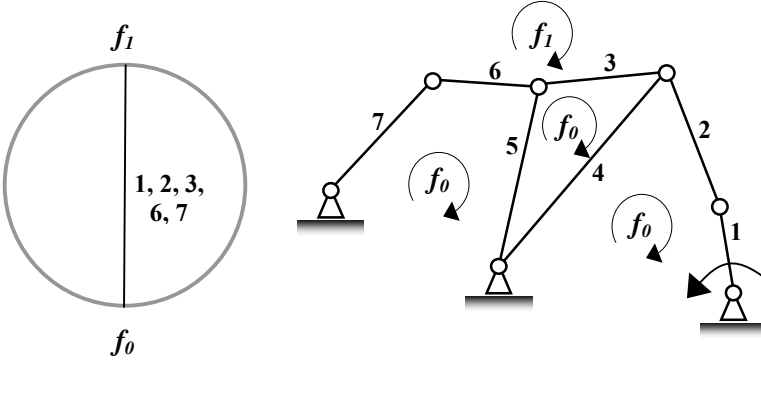
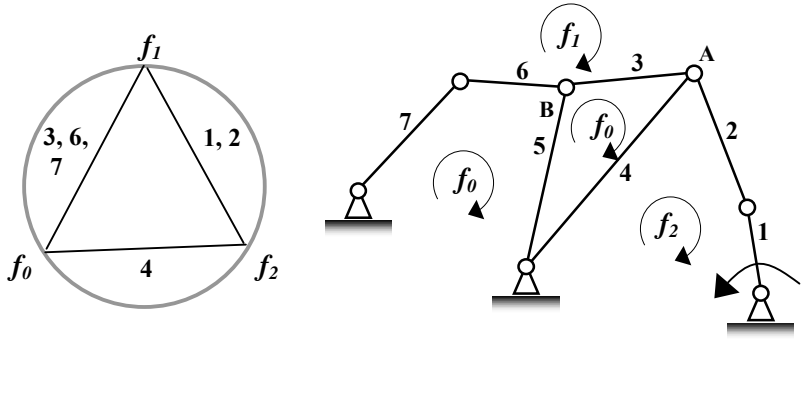
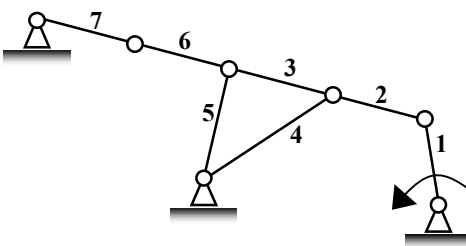
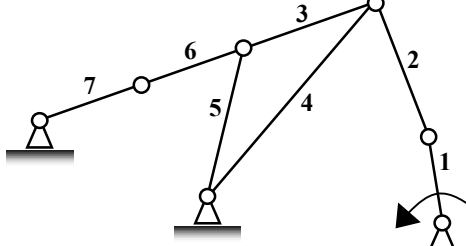
טבלה 5.6: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.16

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4
1	1	1	1	1
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	0
7	1	0	0	1
8	0	1	0	1

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 1 (1,1,1,1):

		<p>.1</p>
<p>חוליות 6 ו-7 מקבילות</p>		<p>.2 (א)</p>
<p>ישנם שני משולשים EMLD - במכניזם A המשולש הראשון, שמורכב מחוליות 2, 3, 4, מתאים לצומת במכניזם B המשולש השני, שמורכב מחוליות 3, 5, 6, מתאים לצומת</p>		<p>.2 (ב)</p>
	 <p>חסר קו שווה מומנט m_{24}. בדיאגרמה קו זה משלים שני משולשים: עם חוליות 6 ו-2 ועם חוליות 5 ו-4 לכן במכניזם הקו יעבור דרך חיתוך של חוליות 6 ו-2 וחיתוך של חוליות 5 ו-4 מכיוון שקו חדש משלים רק שני משולשים - לא מתקבל תנאי לסינגולריות</p>	<p>.3</p>
<p>כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2</p>		<p>.4</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 6 ו-7 מקבילות, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2</p>		<p>מכניזם במצב מת</p>

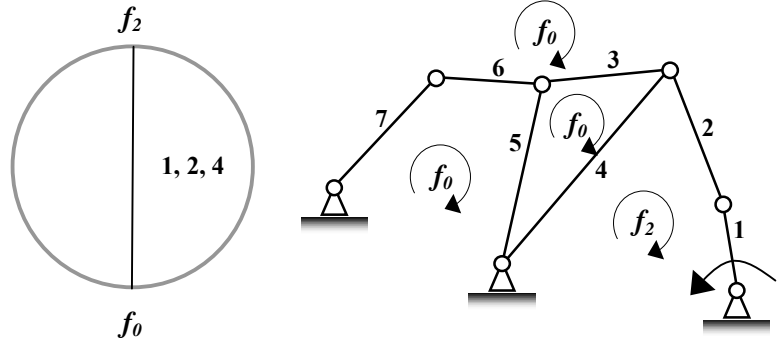
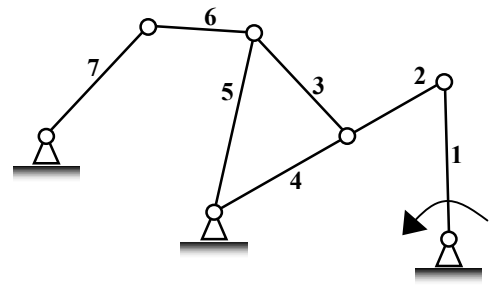
איור 5.17: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

קונפיגורציה מס' 3 – (1,0,0,0)	קונפיגורציה מס' 2 – (1,1,0,0)	
		.1
חוליות 2, 3, 6 – 7 מקבילות	חוליות 2, 3, 6 – 7 מקבילות	.2 (א)
- EMLD משולשים ב	מורכב מחוליות 2, 4 וחוליות 3, 6, 7. צומת EMLD המשולש היחיד ב - במכניזם מתאים למשולש (2,3,4), וחוליות 6 ו-7 נמצאות באותו קו A עם חוליה 3. לכן אין תנאי חדש לסינגולריות	.2 (ב)
- EMLD קווים חסרים ב	- EMLD קווים חסרים ב	.3
, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל EMLD לפי לחוליה 2	, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה EMLD לפי 2	.4
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 2, 3, 6 – 7 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2.</p> 	<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 2, 3, 6 – 7 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2.</p> 	מכניזם במצב מת

איור 5.18: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציות 2 ו-3 של פאות

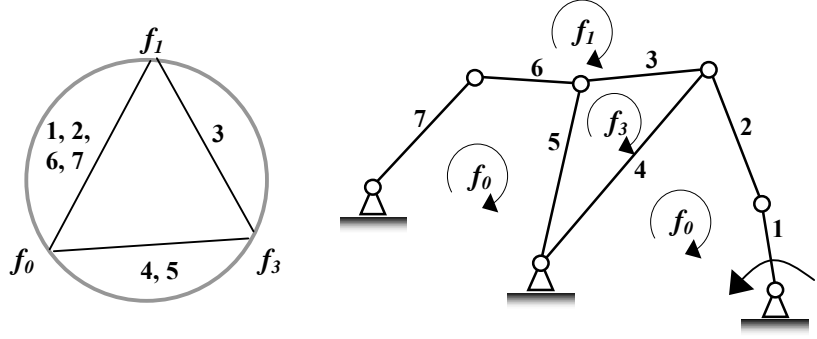
ניתן שהמצבים שהתקבלו מקונפיגורציות 2 ו 3 הינם מקרים הפרטיים של מצב שהתקבל בקונפיגורציה מס' 1.

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 4 (0,1,0,0):

	<p>.1</p>
<p>חוליות 2, 1 – 4 מקבילות</p>	<p>.2 (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>.2 (ב)</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>.3</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2 EMLD2 לפי</p>	<p>.4</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 2, 1 – 4 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה, מקביל לחוליה 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.19: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 4 של פאות

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 5 (1,0,1,0):

	<p>.1</p>
<p>חוליות 2, 6 – 7 מקבילות חוליות 4, 5 מקבילות. לא יכול להיות כי 4, 5 – 3 הינן צלעות של משולש במכניזם, ובמשולש לא יכול לקרות ששתי צלעות מקבילות והצלע השלישי אינה מקבילה להן. לכן, קונפיגורציה זו לא קיימת!</p>	<p>.2</p>

איור 5.20: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 5 של פאות

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 6 (0,1,1,0):

		.1
<p>חוליות 3, 5 מקבילות. לא יכול להיות כי 3, 4 ו- 5 הינן צלעות של משולש במכניזם, ובמשולש לא יכול לקרות ששתי צלעות מקבילות והצלע השלישי אינה מקבילה להן. לכן, קונפיגורציה זו לא קיימת!</p>		.2

איור 5.21: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 6 של פאות

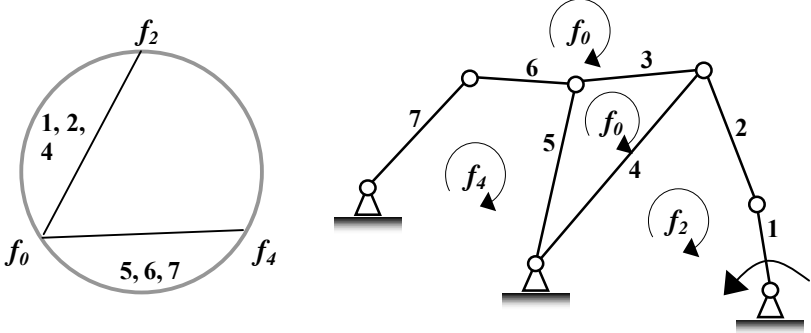
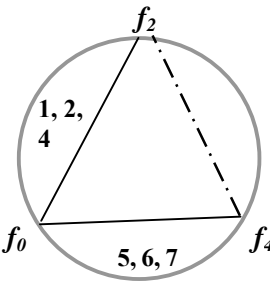
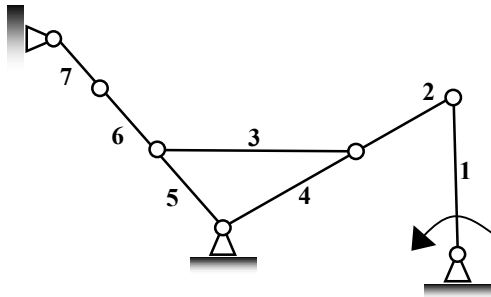
הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 7 (1,0,0,1):

		.1
<p>חוליות 2 ו- 3 מקבילות; חוליות 6 ו- 7 מקבילות</p>		.2 (א)
<p>מורכב מחוליות 6 ו- 7, חוליה 5 וחוליות 2, 3. צומת EMLD המשולש היחיד ב- במכניזם מתאים למשולש המורכב מ- 3, 5 ו- 6. חוליות 6 ו- 7 נמצאות באותו B קו. חוליות 2 ו- 3 נמצאות באותו קו. לכן אין תנאי חדש לסינגולריות</p>		.2 (ב)
<p>EMLD אין קווים חסרים ב-</p>		.3
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2 EMLD2 לפי</p>		.4
<p>תנאים לסינגולריות : חוליות 2 ו- 3 מקבילות חוליות 6 ו- 7 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליה 2</p>		מכניזם במצב מת

איור 5.22: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 7 של פאות

ניתן לראות שקיבלנו בעצם את מקרה הפרטי של מצב סינגולרי שהתקבל בקונפיגורציה מס' 1.

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 8 (0,1,0,1):

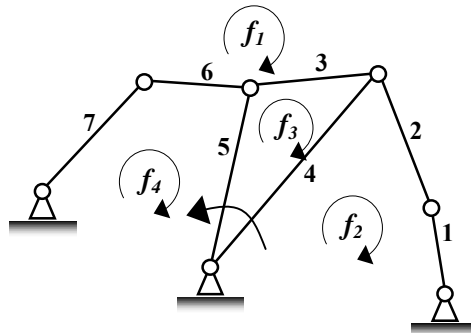
	<p>.1</p>
<p>חוליות 2 ו-4 מקבילות חוליות 5, 6 ו-7 מקבילות</p>	<p>.2 (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>.2 (ב)</p>
<p>חסר EML m_{24}. ב - EMLD קו זה משלים שני משולשים: עם חוליות 6 ו-2 ועם חוליות 5 ו-4 אבל בגלל שחוליות 2 ו-4 מקבילות וגם חוליות 5 ו-6 מקבילות, לא נוכל למצוא EML זה. ניתן לומר שבדומה לקונפיגורציה מס' 1, בה נעשה בדיוק אותו תהליך למציאת EML זה, גם אם חוליות לא היו מקבילות, לא היה מתקבל תנאי חדש לסינגולריות</p> 	<p>.3</p>
<p>, כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 2 EMLD לפי</p>	<p>.4</p>
<p>תנאים לסינגולריות: חוליות 2 ו-4 מקבילות חוליות 5, 6 ו-7 מקבילות כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה, מקביל לחוליה 2</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.23: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.16 עבור קונפיגורציה מס' 8 של פאות

ניתן לראות שקיבלנו בעצם את מקרה הפרטי של שילוב בין מצבים סינגולריים שהתקבלו בקונפיגורציות 1 ו-4.

לסיכום ניתן לומר כי מתוך 8 קונפיגורציות חוקיות שניתחנו, קונפיגורציות 5 ו-6 לא קיימות, וקונפיגורציות 2, 3, 7, 8 הן מקרים פרטיים של קונפיגורציות 1 ו-4. לכן מהתחלה אפשר היה לנתח רק את הקונפיגורציות 1 ו-4.

ניתן לראות כי כאשר חוליה 7 היא חוליית הכניסה, מתקבלים אותם מצבים מתיים בגלל הסימטריה. כעת נסתכל על הפעלת השיטה כאשר חוליות 3, 4 ו 5 מהוות את חוליית הכניסה (ראה איור 5.24).



איור 5.24: מכניזם מאיור 5.16, חוליית הכניסה מורכבת מחוליות 3, 4 ו 5

ברור כי במקרה הזה גם חוליה 4 וגם חוליה 5 מפעילות כוח. לכן נצטרך לנתח את כל הקונפיגורציות בהן יהיה כוח שונה מאפס לפחות באחת מהחוליות הללו. נרשום את כל הקונפיגורציות החוקיות לפי סעיף 5.2 (ראה טבלה 5.7).

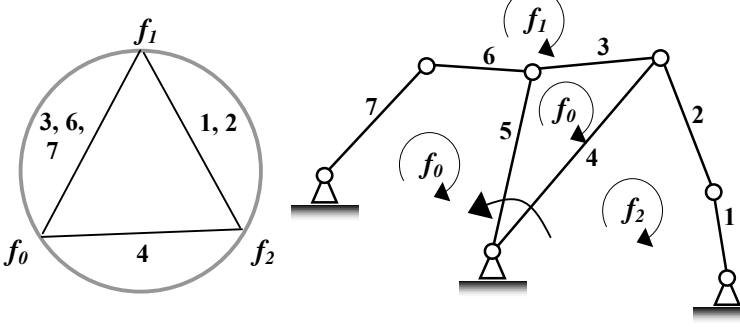
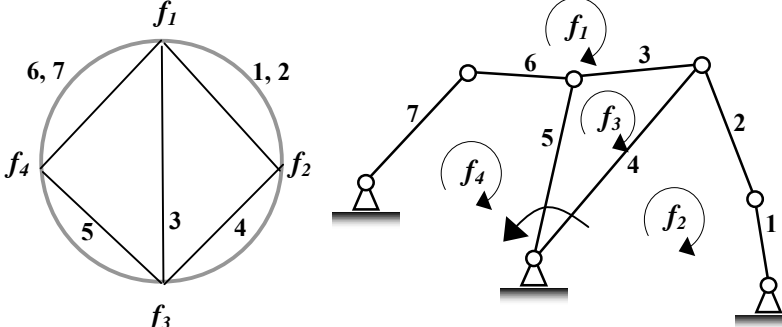
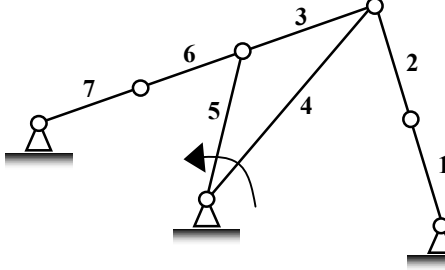
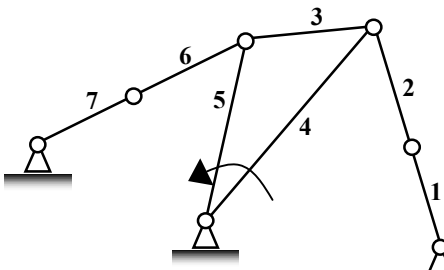
טבלה 5.7: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.24

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4
1	1	1	1	1
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	0	0	1
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	0	1	1
8	0	1	0	0
9	0	0	1	0
10	0	0	0	1

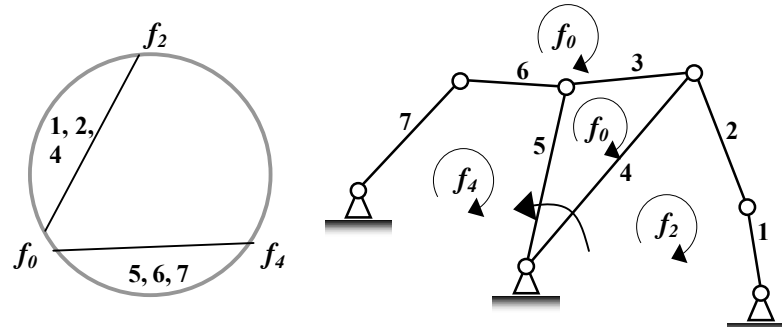
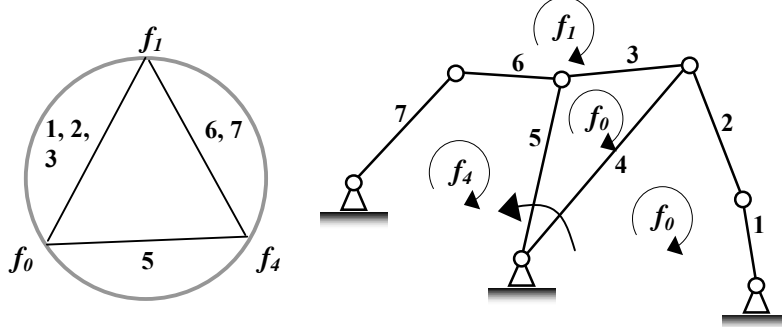
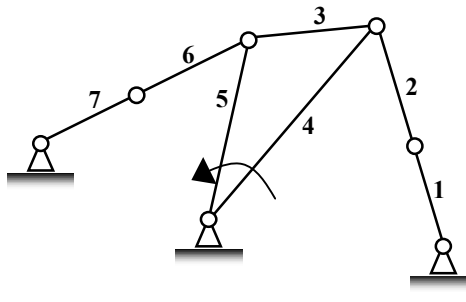
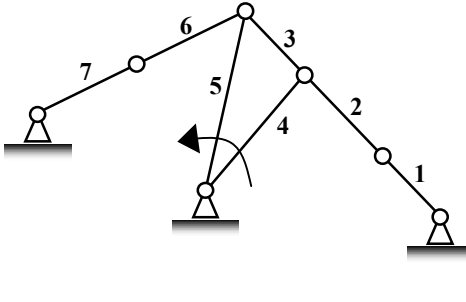
קונפיגורציה מספר 9, שכוללת רק כוח בפאה שלוש שונה מאפס, אינה מספקת מצב מת כי לא מתפתחים כוחות בחוליות 1, 2, 6 ו 7. לכן לא נתייחס לקונפיגורציה זו. קונפיגורציה 5 שכוללת פאות 2 ו 3 - וקונפיגורציה 8, הכוללת רק את הפאה 2 נותנות אותם תנאים לסינגולריות.

קונפיגורציה 7 שכוללת פאות 3 ו 4 - וקונפיגורציה 10, הכוללת רק את הפאה 4 נותנות אותם תנאים לסינגולריות.

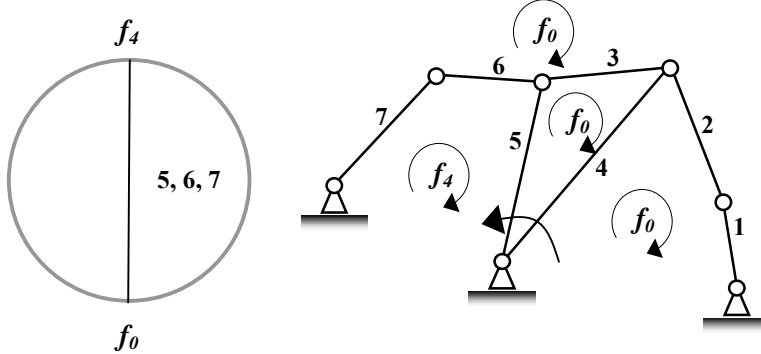
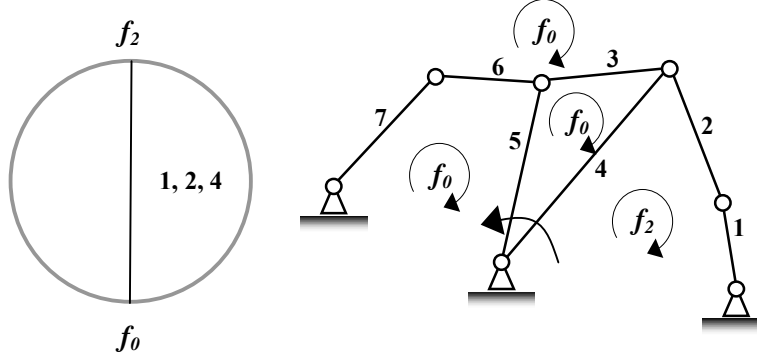
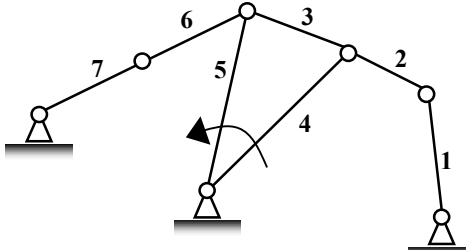
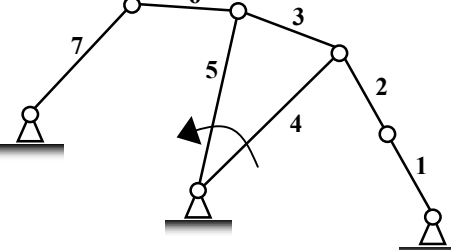
עולה השאלה אם יש צורך להתייחס אל הפעלת כוח בפאה 3, כי בעצם הפעלת כוח בפאה זו מקשרת בין כוחות בחוליות 3, 4 ו 5 והקשר הזה לא מעניין אותנו, כי המטרה שלנו היא לדעת איך מתנהגים כוחות בשאר החוליות: 1, 2, 6, 7. לכן בשלב זה לא נתייחס לקונפיגורציות הכוללות כוח בפאה 3, שאלה הקונפיגורציות 3, 5, 7, 9.

קונפיגורציה מס' 2 (1,1,0,0)	קונפיגורציה מס' 1 (1,1,1,1)	
		.1
חוליות 1 ו-2 מקבילות; חוליות 3, 6 ו-7 מקבילות	חוליות 1 ו-2 מקבילות; חוליות 6 ו-7 מקבילות	.2 (א)
משולש שלא כולל את קשת EMLD.4 אין ב-	משולשים שאינם כוללים את קשתות 4 ו-5 EMLD אין ב- (חוליות המייצגות את הכוח המופעל על ידי חוליות אלו)	.2 (ב)
EMLD אין קווים חסרים ב-	קו זה משלים רק EMLD. ב- m ₂₄ אחד - EML חסר m ₂₄ משולש אחד עם חוליות 6 ו-2. לכן אין אפשרות למצוא את ולא מתקבל תנאי חדש לסינגולריות	.3
כיוון הכוח שחוליה 4 מפעילה עובר דרך חיתוך של חוליות 2 ו-3 וזה לא מספק כדי למצוא את כיוון הכוח ולספק תנאי לסינגולריות	אינו ידוע m ₂₄ אין אפשרות למצוא את כיוון הכוח, כי	.4
<p>תנאים לסינגולריות: חוליות 1 ו-2 מקבילות חוליות 3, 6 ו-7 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 4 מפעילה אינו ידוע</p> 	<p>תנאים לסינגולריות: חוליות 1 ו-2 מקבילות חוליות 6 ו-7 מקבילות כיווני הכוחות שחוליות 4 ו-5 מפעילות אינם ידועים</p> 	מכניזם במצב מת

איור 5.25: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 1 ו-2 של פאות

קונפיגורציה מס' 6 (0,1,0,1)	קונפיגורציה מס' 4 (1,0,0,1)	
		.1
חוליות 1 ו-2 מקבילות; חוליות 6 ו-7 מקבילות	מקבילות; חוליות 6 ו-7 מקבילות 3 ו-2 חוליות 1,	.2 (א)
EMLD משולשים ב -	משולשים שאינם כוללים את קשתות 4 ו-5 EMLD אין ב - (חוליות המייצגות את הכוח המופעל על ידי חוליות אלו)	.2 (ב)
בדיאגרמה קו זה משלים רק משולש אחד עם m_{24} אחד - EML חסר ולא מתקבל תנאי m_{24} לחוליות 6 ו-2. לכן אין אפשרות למצוא את חדש לסינגולריות	EMLD אין קווים חסרים ב -	.3
, כיוון הכוח שחוליה 4 מפעילה מקביל לחוליות 1 ו-2. EMLD לפי , כיוון הכוח שחוליה 5 מפעילה מקביל לחוליות 6 ו-7.	כיוון הכוח שחוליה 5 מפעילה עובר דרך חיתוך של חוליות 3 ו-6 וזה לא מספק כדי למצוא את כיוון הכוח ולספק תנאי לסינגולריות	.4
<p>תנאים לסינגולריות:</p> <p>חוליות 1 ו-2 מקבילות</p> <p>חוליות 6 ו-7 מקבילות</p> <p>כיוון הכוח שחוליה 4 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 1 ו-2.</p> <p>כיוון הכוח שחוליה 5 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 6 ו-7.</p> 	<p>תנאים לסינגולריות:</p> <p>חוליות 1, 2 ו-3 מקבילות</p> <p>חוליות 6 ו-7 מקבילות</p> <p>כיוון הכוח שחוליה 5 יכולה להפעיל אינו ידוע</p> 	מכניזם במצב מת

איור 5.26: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 4 ו-6 של פאות

קונפיגורציה מסי' 10 (0,0,0,1)	קונפיגורציה מסי' 8 (0,1,0,0)	
		.1
חוליות 6 ו-7 מקבילות	מקבילות 1 ו-2 חוליות	.2 (א)
EMLD משולשים ב-	EMLD משולשים ב-	.2 (ב)
EMLD קווים חסרים ב-	EMLD קווים חסרים ב-	.3
, כיוון הכוח שחוליה 5 מפעילה מקביל לחוליות 6 ו-7 EMLD לפי	מפעילה מקביל לחוליות 1 ו-2, כיוון הכוח שחוליה EMLD לפי	.4
<p>תנאים לסינגולריות : חוליות 6 ו-7 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 5 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 6 ו-7</p> 	<p>תנאים לסינגולריות : חוליות 1 ו-2 מקבילות. כיוון הכוח שחוליה 4 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליות 1 ו-2</p> 	מכניזם במצב מת

איור 5.27: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.24 עבור קונפיגורציות 8 ו-10 של פאות

כפי שניתן לראות מאיורים 5.25 – 5.27, כל המצבים המתים שהתקבלו הינם מקרים פרטיים של מצבים שהתקבלו בקונפיגורציות 8 או 10.

5.7 הורדת מספר קונפיגורציות (הורדת סיבוכיות)

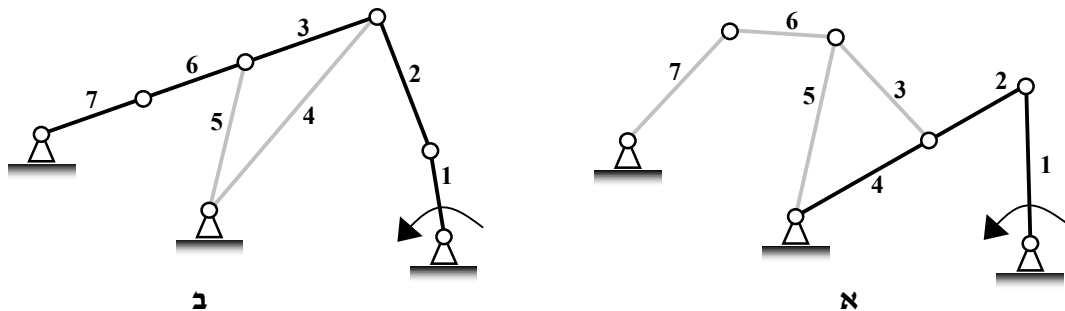
בשתי הדוגמאות האחרונות ניתן לראות, כי מהפעלת שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציות מסוימות של פאות המכניזם מתקבלים מצבים מתיים חדשים, בזמן שמקונפיגורציות אחרות קיבלנו מצבים שמהווים מקרים פרטיים של מצבים שכבר קיבלנו בעבר. כלומר, כדי לקבל את כל המצבים לא היה צורך בבדיקת כל הקונפיגורציות החוקיות של פאות המכניזם, אלא מספר קטן בהרבה. מה בעצם ההבדל בין הקונפיגורציות: קיימת קונפיגורציה אחת שכוללת את כל הפאות במכניזם ובכל שאר הקונפיגורציות כוחות בחלק מהפאות שווים לאפס.

כתוצאה מאפסת כוחות בחלק מהפאות גם כוחות בחלק מהחוליות מתאפסים. מכיוון ששיטת הכוח בפאה מתייחסת אל המכניזם במצב מת כאל מסבך, ניתן למחוק את החוליות שלא פועל בהם כוח וחוליות הנותרות עדיין ירכיבו מכניזם במצב מת. זה דומה למקרה של מסבך שבו בחלק מהמוטות כוח שווה לאפס וניתן להוריד את המוטות הללו בלי שתמונת הכוחות במסבך תשתנה.

נניח שהפעלנו כוחות על קונפיגורציה מסוימת של פאות, וכתוצאה מכך בחלק מהחוליות התפתחו כוחות ובשאר החוליות לא. נמחק את החוליות שלא התפתחו בהן כוחות ונישאר עם מכניזם אחר, בעל מספר קטן של חוליות. נקרא למכניזם זה **תת מכניזם** של המכניזם המקורי.

נסתכל איך מתקבל תת מכניזם במושגים של שיטת התזוזות שתוארה בפרק 3: ישנה קונפיגורציה שכוללת את תזוזות כל הצמתים של המסבך הדואלי ובשאר הקונפיגורציות תזוזה של חלק מהצמתים שווה לאפס. אפשר להגיד, שהצמתים שהתזוזה שלהם הייתה אפס הפכו בעצם לאדמות, כלומר, השיטה תעבוד עם מסבך בעל מספר צמתים קטן מהמסבך המקורי (נקרא למסבך כזה **תת מסבך**) כשכל הצמתים של התת מסבך הוזזו. כתוצאה מהפעלת שיטת התזוזות במקרה זה, נקבל מכניזם במצב מת, אשר בחלק מהחוליות שלו יפעלו כוחות ובחלק לא יפעלו. אם נמחק את החוליות שלא פועלים בהן כוחות, נקבל תת מכניזם במצב מת.

לדוגמא נראה מכניזם מאיור 5.19 שהתקבל כתוצאה מהפעלת כוח בפאה 2 (ראה איור 5.28 (א)).



איור 5.28: דוגמאות למכניזם במצב מת ובתוכו תת מכניזם במצב מת

הכוחות בחוליות 3, 5, 6 ו-7 שווים לאפס, ניתן למחוק אותן, ומתקבל תת מכניזם במצב מת (מודגש בשחור), שהוא בעצם מכניזם ארבע חוליות במצב מת (כמו באיור 5.8). נשים לב כי דרגת החופש של

התת מכניזם לפי גרובלר (Gruebler, 1917) (ראה נספח א) שווה ל – 1. המכניזם מאיור 5.28 (ב) התקבל כתוצאה מהפעלת כוחות בפאות 1 ו – 2 (ראה איור 5.18). אם נמחק את החוליות שלא פועל בהן כוח (חוליות 4 ו – 5) נשאר עם תת מכניזם (מודגש בשחור) שנמצא, כמובן, במצב מת (חוליות 3, 6 ו – 7 מקבילות), ויש לו 3 דרגות חופש לפי גרובלר. לפי משהתקבל באיור 5.17, מספיק שחוליה 6 תהיה מקבילה לחוליה 7 כדי שהמכניזם יהיה במצב מת, כלומר מקרה מאיור 5.18 (ב) אינו מצב מת חדש, אלא מקרה פרטי של מצב אחר (מאיור 5.17).

שתי הדוגמאות מאיור 5.28 נותנות איזושהי אינדיקציה על הקשר בין דרגת החופש (לפי גרובלר) של התת מכניזם לעובדה שמצב מת יכול להיות מקרה פרטי של מצב שהתבל מקונפיגורציה אחרת. בשלב זה, נתייחס לדרגת חופש של מכניזם במצב רגיל ובמצב מת. במצב רגיל, אם ניקח את חוליית הכניסה ונעצור אותה, כלומר נהפוך אותה לאדמה, שאר החוליות יעצרו גם הן. משמעות של עצירת חוליית הכניסה לפי גרובלר היא הורדת דרגת חופש, כלומר דרגת החופש של המכניזם הופכת להיות אפס. במצב מת, חוליית הכניסה ננעלת, וניתן לומר שהיא הופכת להיות האדמה עבור שאר החוליות. אבל לפי ההגדרה של מצב מת (ראה סעיף 1.5), חוליית היציאה יכולה לנוע ולהוציא את המכניזם ממצב מת. אם חוליית היציאה יכולה לנוע, אזי קיימת דרגת חופש שמתווספת רק כאשר המכניזם נמצא במצב מת ולא ניתן לראות את דרגת החופש הנוספת מנוסחת גרובלר!

נזכיר כי ההגדרה של סינגולריות מסוג שני (שזה בעצם מצב מת) של מכניזם ברובוטיקה (לפי 1.3) היא שבמכניזם בעל דרגת חופש אחת, בזמן שחוליית הכניסה נעולה, חוליית היציאה יכולה לזוז. במלים אחרות איזושהו חלק מהמכניזם (או מכניזם כולו) בעל דרגת חופש אפס (לפי גרובלר) מקבל דרגת חופש אחת (או יותר) כתוצאה מסידור גיאומטרי מסוים של חוליות המכניזם.

במצבים שקיבלנו מהפעלת שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציות שונות של פאות המכניזם, בחלק מהמקרים קיבלנו תת מכניזם בעל דרגת חופש אחת (לפי גרובלר) במצב מת, ובמקרים אחרים תת מכניזם בעל שתי או יותר דרגות חופש במצב מת. לפי הגדרה של (Gosselin and Angeles, 1990) (סעיף 1.3), ניתן להתייחס רק למקרים של תת מכניזם בעל דרגת חופש אחת.

כלומר, החל מעכשיו, לפני שנפעיל את שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציה כלשהי של פאות המכניזם, נבדוק את מספר דרגות החופש של תת מכניזם שבחוליות שלו יפעלו כוחות. אם דרגת החופש תהיה יותר מאחד לפי גרובלר, לא נמשיך את הפעלת השיטה.

איור 5.29 מתייחס למכניזם מאיור 5.24, והתת מכניזמים (מודגשים בשחור), שמתקבלים כתוצאה מהפעלת כוחות בקונפיגורציות חוקיות של פאות (איורים 5.25-5.27).

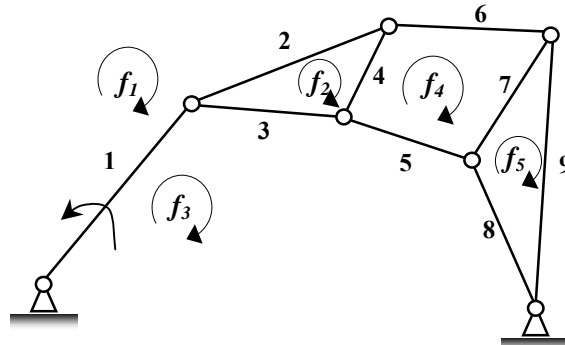
דרגת חופש של תת מכניזם (לפי גרובלר)	תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n	דרגת חופש של תת מכניזם (לפי גרובלר)	תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n
$3*6 - 2*8 = 2$	<p>קונפיגורציה: (0,1,0,1)</p>	6	$3*7 - 2*10 = 1$	<p>קונפיגורציה: (1,1,1,1)</p>	1
$3*3 - 2*4 = 1$	<p>קונפיגורציה: (0,1,0,0)</p>	8	$3*6 - 2*8 = 2$	<p>קונפיגורציה: (1,1,0,0)</p>	2
$3*3 - 2*4 = 1$	<p>קונפיגורציה: (0,0,0,1)</p>	10	$3*6 - 2*8 = 2$	<p>קונפיגורציה: (1,0,0,1)</p>	4

איור 5.29: בדיקה של דרגת החופש לפי גרובלר של תת מכניזם עבור קונפיגורציות שונות של הפאות של מכניזם מאיור 5.24

5.8. דוגמאות למציאת מינימום מקרים בשיטת הכוח בפאה

דוגמא 4 – הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם Stephenson II :

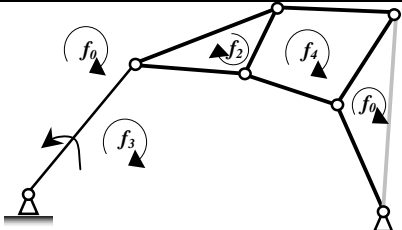
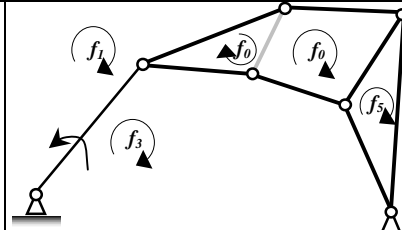
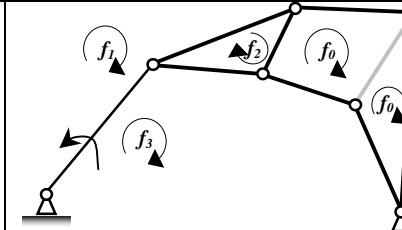
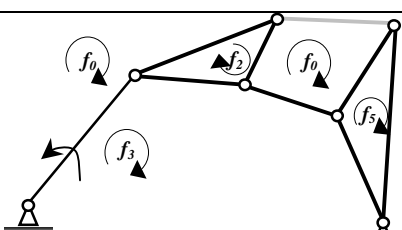
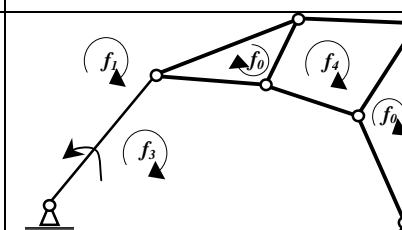
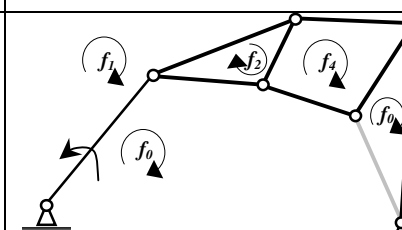
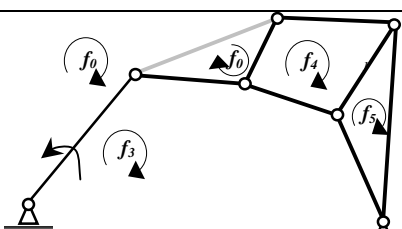
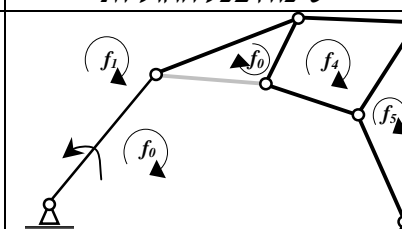
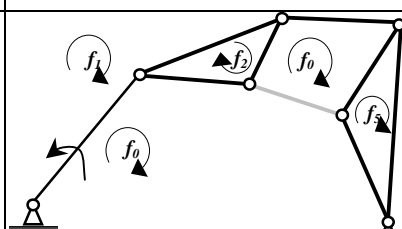
נתון מכניזם מסוג Stephenson II (ראה איור 5.30). טבלה 5.8 מסכמת את כל הקונפיגורציות החוקיות, ובאיורים 5.31-5.32 נבדוק מהו תת מכניזם בכל קונפיגורציה ומהי דרגת החופש שלו לפי גרובלר. בקונפיגורציה ראשונה בכל החוליות מתפתחים כוחות לכן דרגת חופש תמיד תהיה 1.



איור 5.30: מכניזם Stephenson II עם פאות מסומנות

טבלה 5.8: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.30

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4	פאה מס' 5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	0
4	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	0	0	1	1
8	0	1	1	1	0
9	0	1	1	0	1
10	0	0	1	1	1
11	1	0	0	0	1
12	1	0	0	1	0
13	1	0	1	0	0
14	1	1	0	0	0
15	0	1	1	1	0
16	0	0	1	1	0
17	1	0	1	0	0
18	0	0	0	0	1
19	0	0	1	0	0

דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(
2	 קונפיגורציה : (0,1,1,1,0)	8	2	 קונפיגורציה : (1,0,1,0,1)	9	2	 קונפיגורציה : (1,1,1,0,0)	2
2	 קונפיגורציה : (0,1,1,0,1)	9	1	 קונפיגורציה : (1,0,1,1,0) יש כוח בכל החוליות	6	2	 קונפיגורציה : (1,1,0,1,0)	3
2	 קונפיגורציה : (0,0,1,1,1)	10	2	 קונפיגורציה : (1,0,0,1,1)	7	2	 קונפיגורציה : (1,1,0,0,1)	4

איור 5.31: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.30

דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(
2	<p>קונפיגורציה: (0,0,1,0,1)</p>	17	2	<p>קונפיגורציה: (1,1,0,0,0)</p>	14	2	<p>קונפיגורציה: (1,0,0,0,1)</p>	11
2	<p>קונפיגורציה: (1,0,0,0,0)</p>	18	2	<p>קונפיגורציה: (0,1,1,0,0)</p>	15	3	<p>קונפיגורציה: (1,0,0,1,0)</p>	12
2	<p>קונפיגורציה: (0,0,1,0,0)</p>	19	3	<p>קונפיגורציה: (0,0,1,1,0)</p>	16	3	<p>קונפיגורציה: (1,0,1,0,0)</p>	13

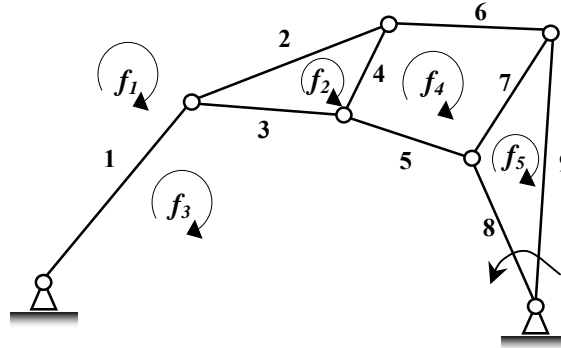
איור 5.32: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.30 (המשך)

מספר המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.30 שווה למספר תת מכניזמים עם דרגת חופש אחת (לפי 5.7). לפי איורים 5.31-5.32, דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1 ו-6 של פאות. ניתן להוכיח כי מקרה, בו מתפתחים כוחות בכל החוליות (כמו קונפיגורציה מס' 6), מהווה מקרה פרטי של הפעלת כוחות בכל הפאות (קונפיגורציה מס' 1). לכן ננתח רק את הקונפיגורציה מס' 1.

		<p>1.</p>
<p>אין תנאי של חוליות מקבילות</p>		<p>2. (א)</p>
<p>B, משולש (2, 4, 6) – מתאים לצומת C משולש (3, 4, 5) – מתאים לצומת D, משולש (6, 7, 9) – מתאים לצומת E משולש (5, 7, 8) – מתאים לצומת</p>		<p>2. (ב)</p>
<p>חסר קו m_{25} – הוא משלים 3 משולשים ב - EMLD : עם חוליות 3 ו-8, עם חוליות 4 ו-7, עם חוליות 2 ו-9. התקבל תנאי לסינגולריות: שלושת החיתוכים האלה נמצאים על קו אחד.</p>		<p>3.</p>
<p>הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם עובר דרך חיתוך של חוליות 8 ו-9, EMLD לפי חוליות 5 ו-6 וחוליות 2 ו-3. תנאי לסינגולריות: שלושת החיתוכים האלה יהיו על קו אחד.</p>		<p>4.</p>
<p>תנאים לסינגולריות : 1. חיתוכים של : חוליות 3 ו-8, חוליות 4 ו-7, חוליות 2 ו-9 נמצאים על קו אחד. 2. חיתוכים של : חוליות 8 ו-9, חוליות 5 ו-6 וחוליות 2 ו-3 נמצאים על קו אחד. זהו כיוון הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם.</p>		<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.33 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.30 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

מצב מת שהתקבל באיור 5.33 שווה למצב ידוע בספרות (Yan and Wu, 1989). כעת נמצא את המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.30, אבל הפעם חוליית תהיה (7, 8, 9) (ראה איור 5.34). טבלה 5.9 מסכמת את כל הקונפיגורציות החוקיות, ובאיורים 5.35-5.36 נבדוק מהו תת מכניזם בכל קונפיגורציה ומהי דרגת החופש שלו לפי גרובלר. בקונפיגורציה ראשונה בכל החוליות מתפתחים כוחות לכן דרגת חופש תמיד תהיה 1.



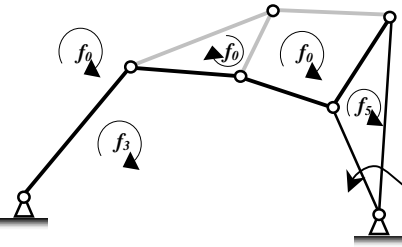
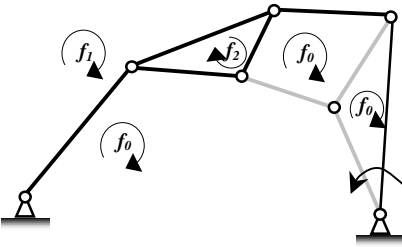
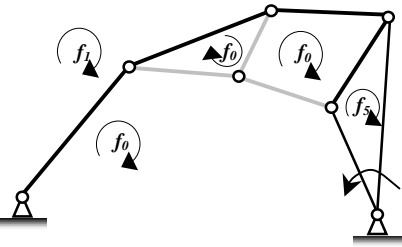
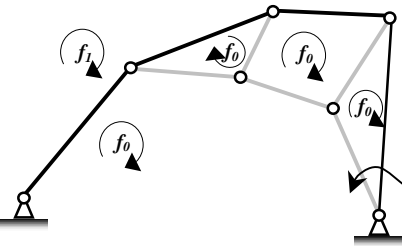
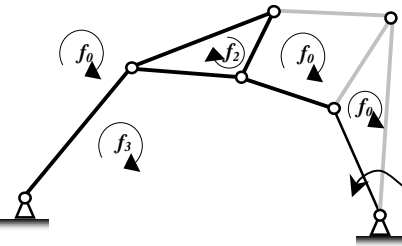
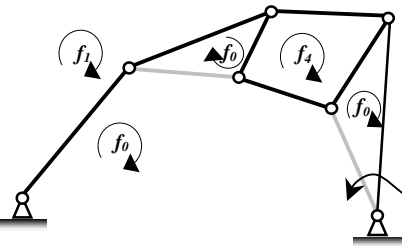
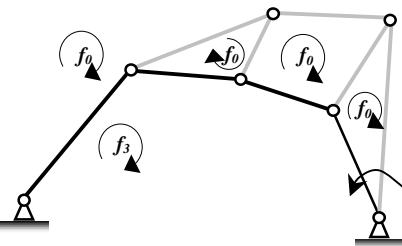
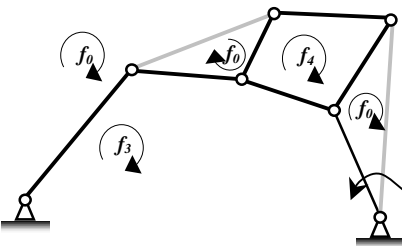
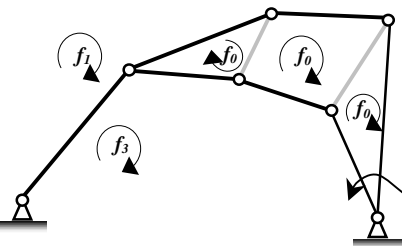
איור 5.34: מכניזם נתון עם פאות מסומנות

טבלה 5.9: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.34

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4	פאה מס' 5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0
3	1	1	0	1	0
4	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0
7	1	0	0	1	1
8	0	1	1	1	0
9	0	1	1	0	1
10	0	0	1	1	0
11	1	0	0	0	1
12	1	0	0	1	0
13	1	0	1	0	0
14	1	1	0	0	0
15	0	1	1	1	0
16	0	0	1	0	1
17	0	0	1	0	0
18	1	0	0	0	0
19	0	0	1	0	0

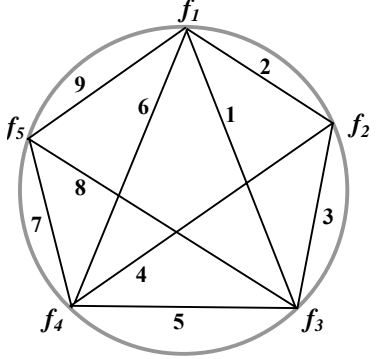
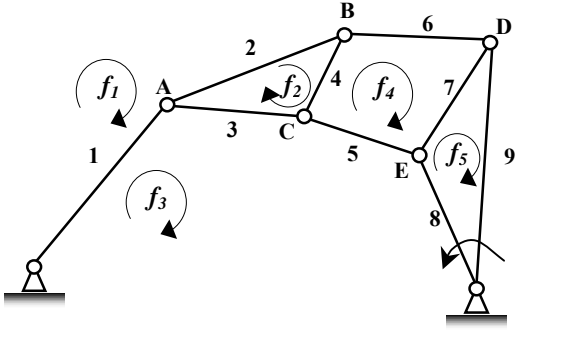
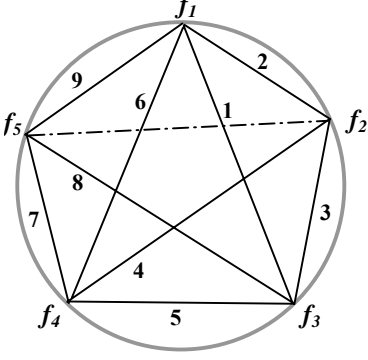
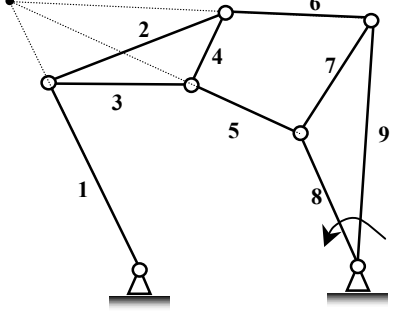
דרגת חופש (F)	דרגת חופש (F)	מס' קונפי' n(דרגת חופש (F)	מס' קונפי' n(דרגת חופש (F)	מס' קונפי' n(
2	<p>קונפיגורציה: (0,1,1,0)</p>	8	2	<p>קונפיגורציה: (1,0,1,0,1)</p>	5	2	<p>קונפיגורציה: (1,1,1,0,0)</p>	6
2	<p>קונפיגורציה: (0,1,1,0,1)</p>	9	1	<p>קונפיגורציה: (1,0,1,1,0) יש כוח בכל החוליות</p>	6	2	<p>קונפיגורציה: (1,1,0,1,0)</p>	7
2	<p>קונפיגורציה: (0,0,1,1,1)</p>	10	2	<p>קונפיגורציה: (1,0,0,1,1)</p>	7	2	<p>קונפיגורציה: (1,1,0,0,1)</p>	8

איור 5.35: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.34

דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(דרגת חופש) F(תת מכניזם (שחור)	מס' קונפי n(
2	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,1)	17	2	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,0)	14	2	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,1)	11
2	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,0)	18	2	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,0)	15	3	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,0)	12
2	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,0)	19	3	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,0)	16	3	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,0)	13

איור 5.36: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.34 (המשך)

מספר המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.34 שווה למספר תת מכניזמים עם דרגת חופש אחת (לפי 5.7). לפי איורים 5.35-5.36, דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1 ו- 6 של פאות. בשני המקרים כוחות מתפתחים בכל החוליות של המכניזם, לכן ניתן לנתח רק את הקונפיגורציה מס' 1.

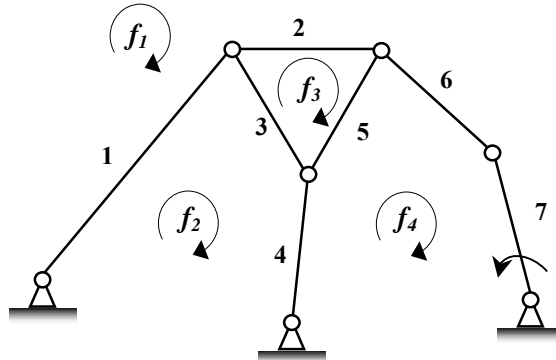
		.1
אין תנאי של חוליות מקבילות	.2 (א)	
<p>B, משולש (2, 4, 6) – מתאים לצומת C משולש (3, 4, 5) – מתאים לצומת למשולש (1, 5, 6) אין צומת מתאים – תנאי לסינגולריות: מפגש של 1, 5 ו- 6 בנקודה אחת</p>	.2 (ב)	
<p>חסר קו m_{25} – הוא משלים 3 משולשים ב- EMLD וכולם כוללים את חוליית הכניסה: עם חוליות 3 ו- 8, עם חוליות 4 ו- 7, עם חוליות 2 ו- 9. לכן אי אפשר לבנות את m_{53} ולא התקבל תנאי לסינגולריות.</p>		.3
<p>הכוח שחוליה 8 מפעילה על המכניזם עובר דרך חיתוך של חוליות 7 ו- 5. EMLD לפי הכוח שחוליה 9 מפעילה עובר דרך חיתוך של 7 ו- 6. לכן כיווני הכוחות אינם ידועים, אין תנאי לסינגולריות</p>	.4	
<p>תנאי לסינגולריות: המשכי חוליות 1, 5 ו- 6 נפגשים בנקודה אחת. כיווני כוחות חיצוניים אינם ידועים</p>		מכניזם במצב מת

איור 5.37: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.34 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

מצב זה שווה למצב ידוע בספרות (Yan and Wu, 1989).

דוגמא 5 – הפעלת שיטת הכוח בפאה על מכניזם Stephenson III :

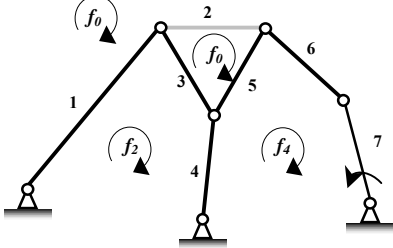
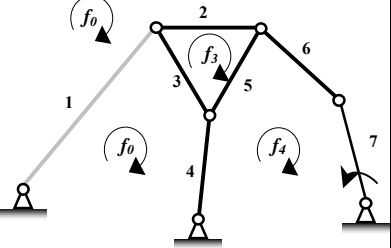
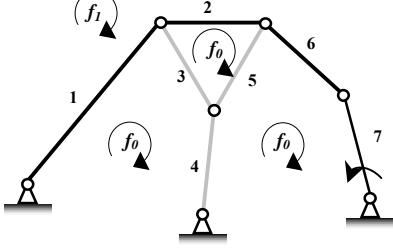
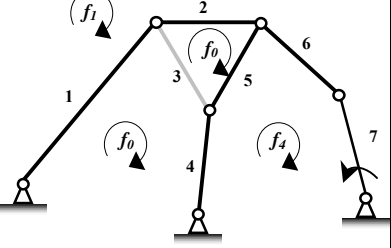
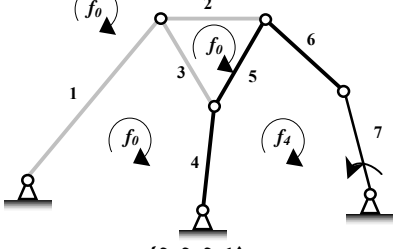
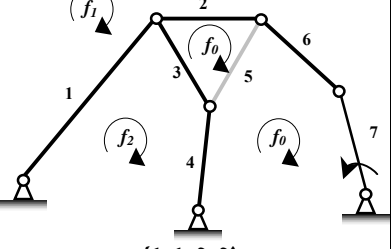
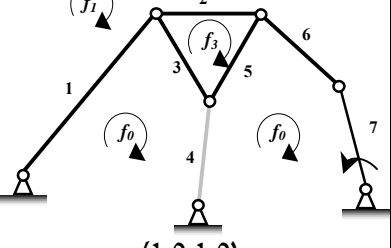
נתון מכניזם מסוג Stephenson III (ראה איור 5.38). טבלה 5.10 מסכמת את כל הקונפיגורציות החוקיות, ובאיור 5.39 נבדוק מהו תת מכניזם בכל קונפיגורציה (n) ומהי דרגת החופש שלו לפי גרובלר (F). בקונפיגורציה ראשונה בכל החוליות מתפתחים כוחות לכך דרגת חופש תמיד תהיה 1.



איור 5.38 : דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות

טבלה 5.10 : כל הקונפיגורציות החוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.38

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4
1	1	1	1	1
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	1	1	0	0
5	1	0	1	0
6	0	1	0	1
7	1	0	0	0
8	0	0	0	1

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
2	 <p>(0,1,0,1)</p>	6	2	 <p>קונפיגורציה: (0,0,1,1)</p>	2
2	 <p>(1,0,0,0)</p>	7	2	 <p>(1,0,0,1)</p>	3
2	 <p>(0,0,0,1)</p>	8	2	 <p>(1,1,0,0)</p>	4
			2	 <p>(1,0,1,0)</p>	5

איור 5.39: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.38

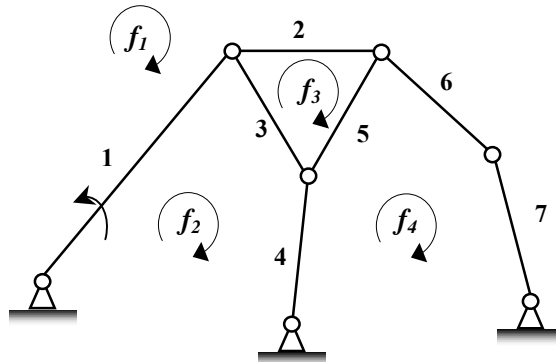
מספר המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.38 שווה למספר תת מכניזמים עם דרגת חופש אחת (לפי 5.7). לפי איור 5.39, דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת רק בקונפיגורציות 1, הכוללת את כל הפאות.

	.1
אין תנאי של חוליות מקבילות	.2 (א)
<p>B, משולש (3,4,5) – מתאים לצומת A משולש (1,2,3) – מתאים לצומת C, משולש (2,5,6) – מתאים לצומת למשולש (1,4,6) אין צומת מתאים – התקבל תנאי לסינגולריות – המשכי החוליות 1, 4 – 6 נפגשים בנקודה אחת</p>	.2 (ב)
אין קווים חסרים	.3
, הכוח שחוליה 7 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 6 EMLD לפי	.4
<p>תנאי לסינגולריות : המשכי חוליות 1, 4 – 6 נפגשים בנקודה אחת. הכוח שחוליה 7 מפעילה על המכניזם מקביל לחוליה 6.</p>	מכניזם במצב מת

איור 5.40 : הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.38 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

מצב זה שווה למצב ידוע בספרות (Yan and Wu, 1989).

כעת נמצא את המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.38, אבל הפעם חוליית הכניסה תהיה 1 (ראה איור 5.41). טבלה 5.11 מסכמת את כל הקונפיגורציות החוקיות, ובאיור 5.42 נבדוק מהו תת מכניזם בכל קונפיגורציה (n) ומהי דרגת החופש שלו לפי גרובלר (F). בקונפיגורציה ראשונה בכל החוליות מתפתחים כוחות לכן דרגת חופש תמיד תהיה 1.



איור 5.41: דוגמא למכניזם Stephenson III עם פאות מסומנות

טבלה 5.11: כל הקונפיגורציות החוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.41

מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4
1	1	1	1	1
2	1	0	0	1
3	1	1	0	0
4	1	0	1	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	1	0	0	0
8	0	1	0	0

באופן דומה ניתן להפעיל את השיטה על המכניזם שבאיור 5.41 עם חוליית הכניסה 4. שני המצבים המתים שמתקבלים הם: כאשר חוליות 1 ו-3 מקבילות או כאשר חוליות 6 ו-7 מקבילות. אותם מצבים דווחו בספרות (Yan and Wu, 1989).

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
1	 $(0,1,1,0)$	6	2	 $(1,0,0,1)$	2
2	 $(1,0,0,0)$	7	2	 $(1,1,0,0)$	3
1	 $(0,1,0,0)$	8	2	 $(1,0,1,0)$	4
			2	 $(0,1,0,1)$	5

איור 5.42: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.41

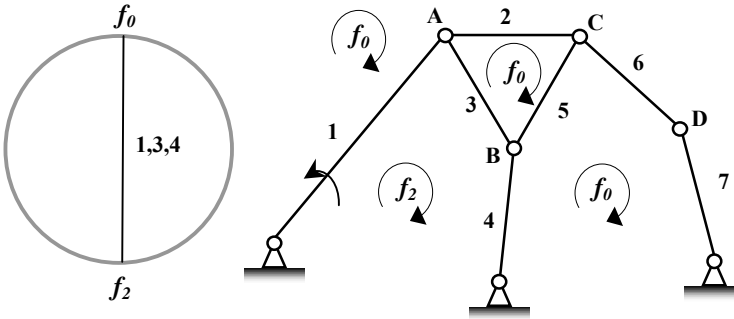
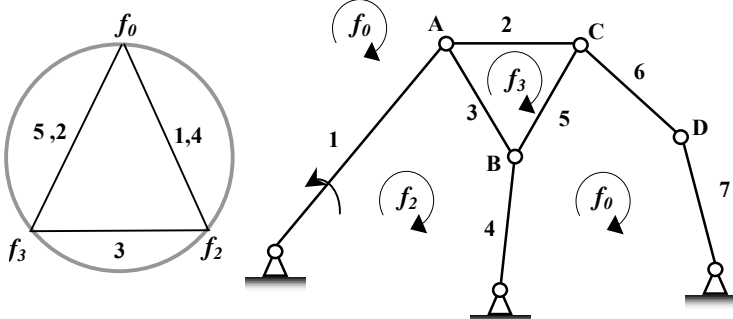
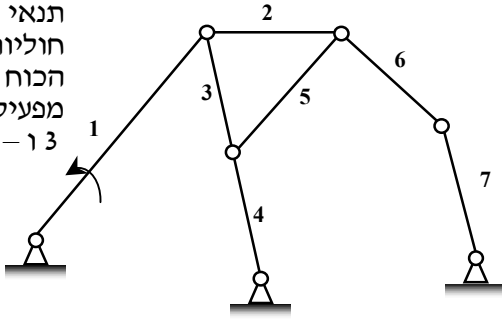
מספר המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.41 שווה למספר תת מכניזמים עם דרגת חופש אחת (לפי 5.7). לפי איור 5.42 דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1, 6 ו- 8.

באיור 5.43 ניתן לראות את הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות (הכוללת את כל הפאות).

		.1
חוליות 6 ו- 7 מקבילות		.2 (א)
מתאים לצומת B משולש (3,4,5) – מתאים לצומת C, משולש (2,5,6) – מתאים לצומת		.2 (ב)
אין קווים חסרים		.3
הכוח שחוליה 1 מפעילה עובר דרך חיתוכים של חוליות 2 ו- 3 EMLD לפי ושל חוליות 6 ו- 4. לא מתקבל תנאי חדש לסינגולריות		.4
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 6 ו- 7 מקבילות. הכוח שחוליה 1 מפעילה, עובר דרך חיתוכים של חוליות 2 ו- 3 ושל 6 ו- 4.</p>		מכניזם במצב מת

איור 5.43: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.41 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

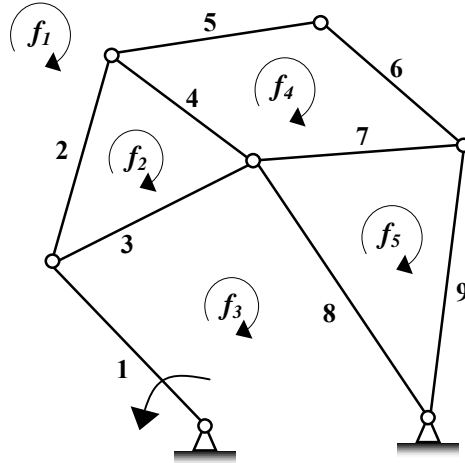
באיור 5.44 ניתן לראות את הפעלת השיטה עבור קונפיגורציות 6 ו- 8 של פאות. שני מצבים מתים המתקבלים (באיורים 5.43 ו- 5.44) שווים למצבים שדווחו בספרות (Yan and Wu, 1989).

 <p>קונפיגורציה מס' 8 (0,1,0,0)</p>	 <p>קונפיגורציה מס' 6 (0,1,1,0)</p>	.1
חוליות 3 ו-4 מקבילות	חוליות 1 ו-2 מקבילות וחוליה 3 אינה מקבילה להן. 2, 3 ו-5 הינן צלעות של משולש במכניזם.	.2 (א)
EMLD משולשים ב -		.2 (ב)
אין קווים חסרים		.3
, הכוח שחוליה 1 מקביל לחוליות 3 ו-4 EMLD לפי		.4
<p>תנאי לסינגולריות : חוליות 3 ו-4 מקבילות. הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליות 3 ו-4.</p> 		מכניזם במצב מת

איור 5.44: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.41 עבור קונפיגורציות 6 ו-8 של פאות

דוגמא 6 מס' מכניזם Watt I :

נתון מכניזם, ראה איור 5.45. באותו איור מסומנות הפאות של המכניזם. חוליית הכניסה היא חוליה 1.



איור 5.45: מכניזם Watt I עם פאות מסומנות

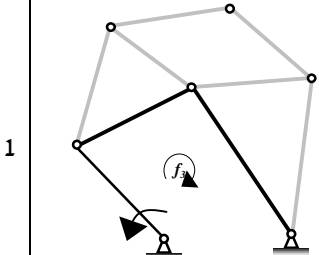
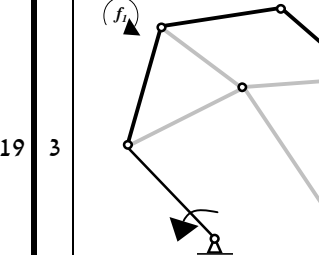
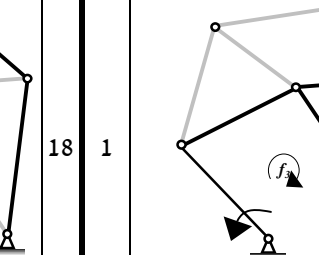
נרשום את כל הקונפיגורציות החוקיות לפי סעיף 5.2 (ראה טבלה 5.12).

טבלה 5.12: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.45

פאה מס'	פאה מס' 5	פאה מס' 4	פאה מס' 3	פאה מס' 2	פאה מס' 1	מס' הקונפיגורציה
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	2
0	1	0	1	1	1	3
1	0	0	1	1	1	4
1	0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	1	6
1	1	0	0	1	1	7
0	1	1	1	0	1	8
1	0	1	1	0	1	9
1	1	1	0	0	0	10
1	0	0	0	0	1	11
0	1	0	0	0	1	12
0	0	1	0	1	1	13
0	0	0	1	1	1	14
0	0	1	1	0	0	15
0	1	1	0	0	0	16
1	0	1	0	0	0	17
0	0	0	0	0	1	18
0	0	1	0	0	0	19

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	
3	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,0)	12	2	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,1)	7	2	 קונפיגורציה: (1,1,1,0,0)	7	2
3	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,0)	13	2	 קונפיגורציה: (0,1,1,1,0)	8	2	 קונפיגורציה: (1,1,0,1,0)	8	3
3	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,0)	14	1	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,1)	9	1	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,1)	9	4
1	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,0)	15	2	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,1)	10	2	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,1)	10	5
3	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,0)	16	3	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,1)	11	1	 קונפיגורציה: (1,0,1,1,0)	11	6

איור 5.46: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.45

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
1		19	3		18	1		17
	קונפיגורציה: (0,0,1,0,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,0,0)			קונפיגורציה: (0,0,1,0,1)	

איור 5.47: המשך של איור 5.46

מספר המצבים המתים של מכניזם מאיור 5.45 שווה למספר תת מכניזמים עם דרגת חופש אחת. לפי איורים 5.46-5.47 דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1, 4, 6, 9, 15, 17 ו-19. קונפיגורציות 9, 15 ו-17 לא קיימות כי בכל אחת מהן מתקבל כי שניים מצלעות המשולש מקבילות בזמן שהצלע השלישית אינה מקבילה להן:

בקונפיגורציה 9: חוליות 2 ו-4 מקבילות וחוליה 3 לא מקבילה להן וגם חוליות 7 ו-9 מקבילות וחוליה 8 לא מקבילה להן.

בקונפיגורציה 15: חוליות 2 ו-4 מקבילות וחוליה 3 לא מקבילה להן.

בקונפיגורציה 17: חוליות 7 ו-9 מקבילות וחוליה 8 לא מקבילה להן.

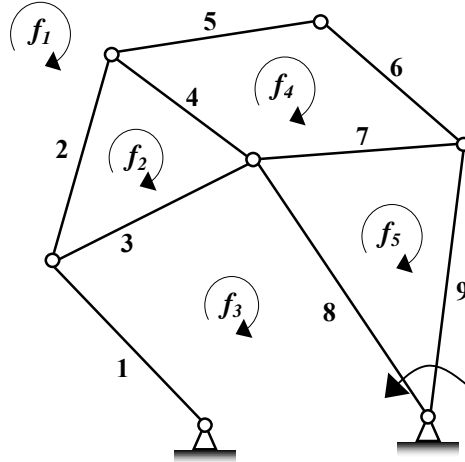
בקונפיגורציות 4 ו-6 מתפתח כוח שונה מאפס בכל החוליות, לכן הן מהוות מקרים פרטיים של קונפיגורציה 1 שבה מופעל כוח בכל החוליות.

לכן הקונפיגורציות שנשאר לנתח הן 1 ו-19. באיור 5.48 ניתן לראות את הפעלת שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציות אלו, ושני מצבים מתים שהתקבלו שווים למצבים ידועים בספרות (Yan and Wu, 1989).

<p>קונפיגורציה $(0,0,1,0,0)$</p>	<p>קונפיגורציה $(1,1,1,1,1)$</p>	<p>1.</p>
<p>חוליות 3 ו-8 מקבילות</p>	<p>חוליות 5 ו-6 מקבילות</p>	<p>2. (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>E, משולש (6,7,9) – מתאים לצומת B משולש (2,4,5) – מתאים לצומת</p>	<p>2. (ב)</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>עובר דרך חיתוך של 7 ו-8 ושל 3 m_{34}. m_{52} חסרים שני קווים: עובר דרך m_{34} ו-4, וזה בעצם אותו חיתוך, לכן לא ניתן לבנות את שני חיתוכים בלבד: של 2 ו-9, ושל 3 ו-8, לכן לא מתקבל תנאי מסינגולריות מבניתו, וגם לא צריך אותו בהמשך, לכן לא נצייר אותו.</p>	<p>3.</p>
<p>הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם EMLD לפי מקביל לחוליות 3 ו-8.</p>	<p>הכוח שחוליה 1 מפעילה על המכניזם עובר דרך חיתוך EMLD לפי של 2 ו-3, ודרך חיתוך של 8 ו-9. לא מתקבל תנאי חדש לסינגולריות.</p>	<p>4.</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 3 ו-8 מקבילות. הכוח שחוליה 1 מפעילה מקביל לחוליות 3 ו-8.</p>	<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 5 ו-6 מקבילות. הכוח שחוליה 1 מפעילה עובר דרך חיתוכים של חוליות 2 ו-3 ושל חוליות 8 ו-9.</p>	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.48: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.45 עבור קונפיגורציות 1 ו-19 של פאות

כעת נמצא את המצבים המתים של מכניזם Watt I, כאשר חוליית הכניסה היא (7,8,9).

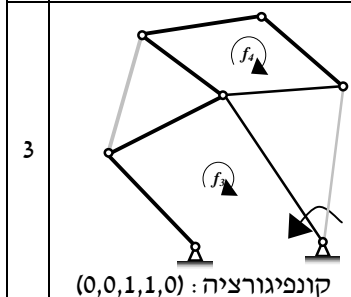
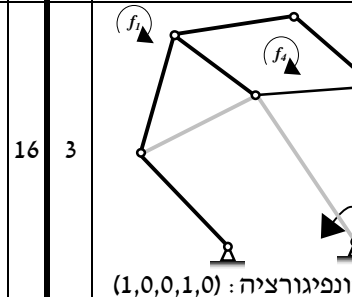
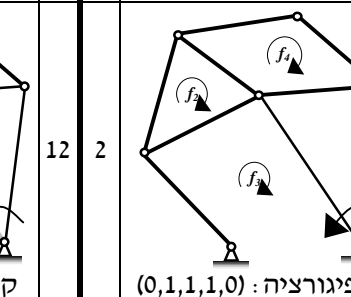
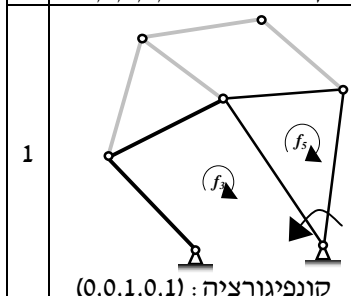
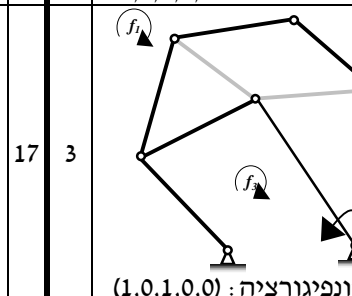
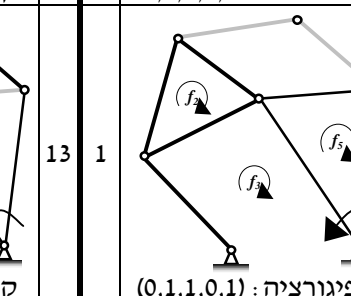
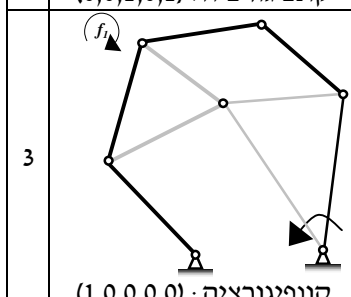
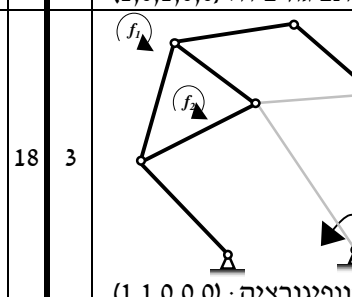
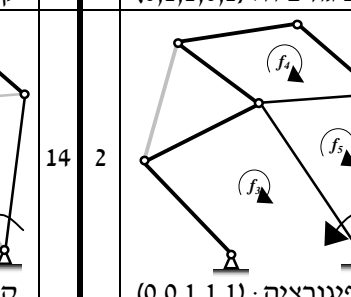
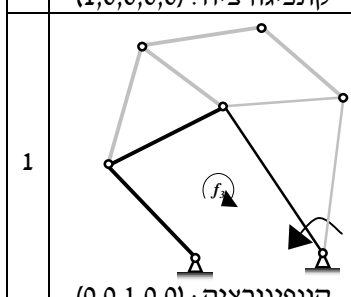
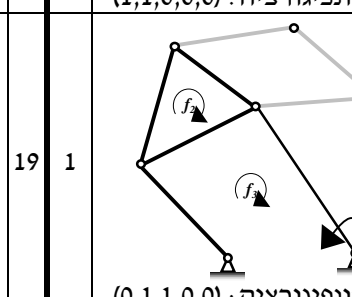
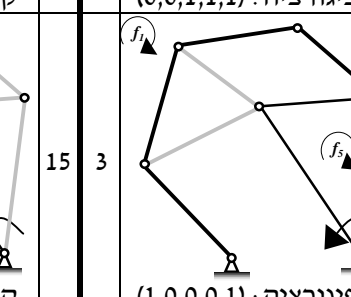


איור 5.49: מכניזם Watt I עם פאות מסומנות

ניתן לראות כי הקונפיגורציות החוקיות לפי סעיף 5.2 זהות לקונפיגורציות שבטבלה 5.12 כי גם עבור חוליית כניסה 1 וגם עבור (7,8,9) מופעלים כוחות בחוליות 1 או 3.

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	N
1		6	1		4	2		2
	קונפיגורציה: (1,0,1,1,0)			קונפיגורציה: (1,1,0,0,1)			קונפיגורציה: (1,1,1,0,0)	
2		7	2		5	2		3
	קונפיגורציה: (1,0,0,1,1)			קונפיגורציה: (1,0,1,0,1)			קונפיגורציה: (1,1,0,1,0)	

איור 5.50: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.49

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
3	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,0)	16	3	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,0)	12	2	 קונפיגורציה: (0,1,1,1,0)	8
1	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,1)	17	3	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,0)	13	1	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,1)	9
3	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,0)	18	3	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,0)	14	2	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,1)	10
1	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,0)	19	1	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,0)	15	3	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,1)	11

איור 5.51: המשך של איור 5.50

לפי איורים 5.50-5.51 דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1, 4, 6, 9, 15, 17 ו-19. קונפיגורציות 9 – 15 לא קיימות כי בכל אחת מהן מתקבל כי חוליות 2 ו-4 מקבילות וחוליה 3 לא מקבילה להן.

בקונפיגורציות 4 – 6 מתפתח כוח שונה מאפס בכל החוליות, לכן הן מהוות מקרים פרטיים של קונפיגורציה 1 שבה מופעל כוח בכל החוליות. קונפיגורציה 17 היא בעצם אותו דבר כמו 19.

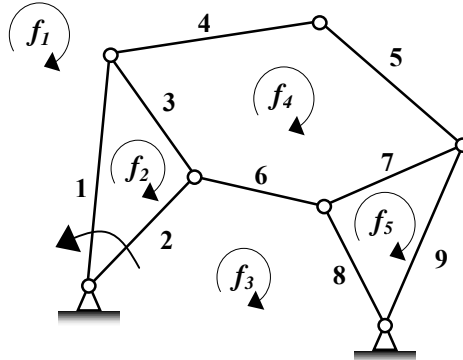
לכן הקונפיגורציות שננתח הן 1 ו 19. באיור 5.52 ניתן לראות את הפעלת שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציות אלו, והמצבים מתים שמתקבלים שווים לאלה שדווחו בספרות (Yan and Wu, 1989).

<p>קונפיגורציה (0,0,1,0,0)</p>	<p>קונפיגורציה (1,1,1,1,1)</p>	<p>.1</p>
<p>חוליות 1 ו-3 מקבילות</p>	<p>חוליות 5 ו-6 מקבילות</p>	<p>.2 (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>B, משולש (2,4,5) – מתאים לצומת A משולש (1,2,3) – מתאים לצומת</p>	<p>.2 (ב)</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>עובר דרך חיתוך של 1 ו-5 ושל 3 ו-4. $m_{34} \cdot m_{52} - m_{34} \cdot m_{52}$ חסרים שני קווים: EMLD לא ניתן למצוא מ- m_{52} אין צורך בו, לכן לא נבנה אותו. את</p>	<p>.3</p>
<p>, הכוח שחוליה 8 מפעילה על המכניזם EMLD לפי מקביל לחוליות 1 ו-3.</p>	<p>לא ניתן למצוא את כיווני הכוחות אותן חוליות 8 ו-9 מפעילות.</p>	<p>.4</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 1 ו-3 מקבילות. הכוח שחוליה 8 מפעילה מקביל לחוליות 1 ו-3.</p>	<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 5 ו-6 מקבילות.</p>	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.52: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.49 עבור קונפיגורציות 1 ו-19 של פאות

דוגמא מס' 7 מכניזם Stephenson I :

נתון מכניזם, ראה איור 5.53. באותו איור מסומנות הפאות של המכניזם. חוליית הכניסה היא חוליה (1,2,3). ברור כי לאחר שנמצא את כל המצבים המתים עבור חוליית הכניסה (1,2,3), אין צורך לבדוק את חוליית הכניסה (7,8,9) בגלל הסימטריות של המכניזם.



איור 5.53: מכניזם Stephenson I עם פאות מסומנות

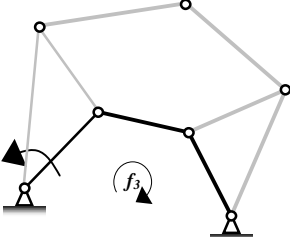
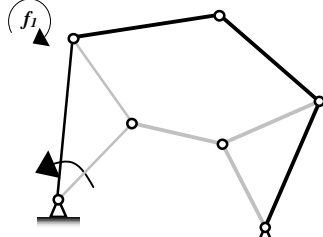
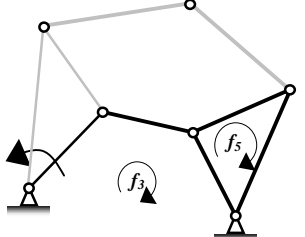
נרשום את כל הקונפיגורציות החוקיות לפי סעיף 5.2 (ראה טבלה 5.13).

טבלה 5.13: קונפיגורציות חוקיות של פאות של מכניזם מאיור 5.53

פאה מס' 5	פאה מס' 4	פאה מס' 3	פאה מס' 2	פאה מס' 1	מס' הקונפיגורציה
1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	2
0	1	0	1	1	3
1	0	0	1	1	4
1	0	1	0	1	5
0	1	1	0	1	6
1	1	0	0	1	7
0	1	1	1	0	8
1	0	1	1	0	9
1	1	1	0	0	10
1	0	0	0	1	11
0	1	0	0	1	12
0	0	1	0	1	13
0	0	0	1	1	14
0	0	1	1	0	15
0	1	1	0	0	16
1	0	1	0	0	17
0	0	0	0	1	18
0	0	1	0	0	19

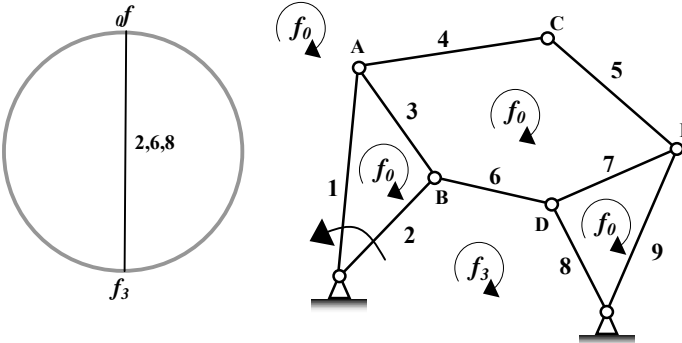
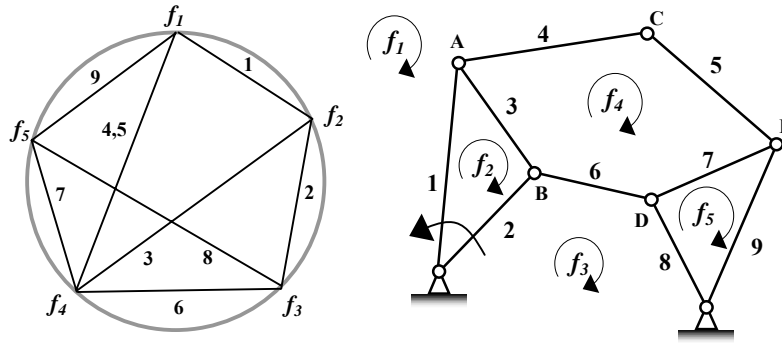
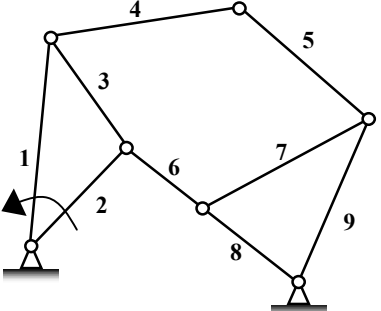
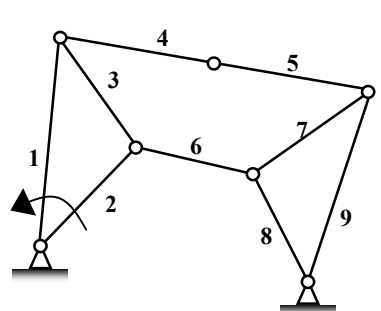
F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
3		12	2		7	2		2
	קונפיגורציה: (1,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,1,1)			קונפיגורציה: (1,1,1,0,0)	
3		13	2		8	2		3
	קונפיגורציה: (1,0,1,0,0)			קונפיגורציה: (0,1,1,1,0)			קונפיגורציה: (1,1,0,1,0)	
2		14	1		9	2		4
	קונפיגורציה: (1,1,0,0,0)			קונפיגורציה: (0,1,1,0,1)			קונפיגורציה: (1,1,0,0,1)	
1		15	2		10	2		5
	קונפיגורציה: (0,1,1,0,0)			קונפיגורציה: (0,0,1,1,1)			קונפיגורציה: (1,0,1,0,1)	
3		16	2		11	1		6
	קונפיגורציה: (0,0,1,1,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,0,1)			קונפיגורציה: (1,0,1,1,0)	

איור 5.54: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.53

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
1		19	2		18	1		17
	קונפיגורציה: (0,0,1,0,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,0,0)			קונפיגורציה: (0,0,1,0,1)	

איור 5.55: המשך של איור 5.54

לפי איורים 5.54-5.55, דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת בקונפיגורציות 1, 6, 9, 15, 17 ו- 19. קונפיגורציות 9 ו- 17 אינן קיימות, כי בהן חוליות 7 ו- 9 מקבילות וחוליה 8 לא מקבילה להן. בקונפיגורציה 6 מתפתח כוח שונה מאפס בכל החוליות, לכן היא מהווה מקרה פרטי של קונפיגורציה 1 שבה מופעל כוח בכל החוליות. קונפיגורציה 15 היא בעצם אותו דבר כמו 19. לכן הקונפיגורציות שנשאר לנתח הן 1 ו- 19. באיור 5.56 ניתן לראות את הפעלת שיטת הכוח בפאה על קונפיגורציות אלו, ושני מצבים מתים שהתקבלו שווים למצבים ידועים בספרות (Yan and Wu, 1989).

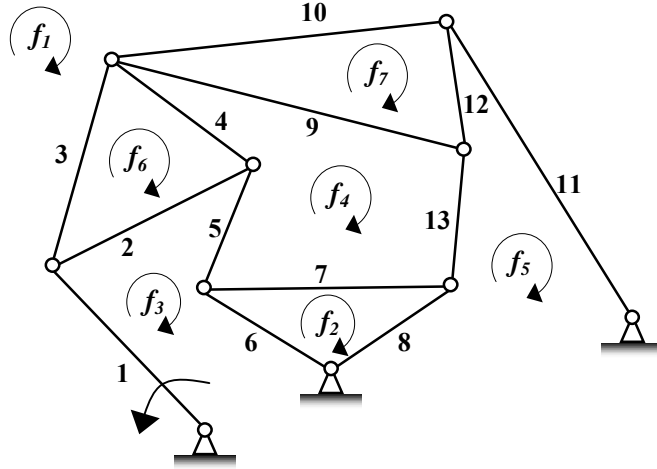
 <p>קונפיגורציה (0,0,1,0,0)</p>	 <p>קונפיגורציה (1,1,1,1,1)</p>	<p>.1</p>
<p>חוליות 6 ו-8 מקבילות</p>	<p>חוליות 4 ו-5 מקבילות</p>	<p>.2 (א)</p>
<p>EMLD משולשים ב -</p>	<p>D, משולש (6,7,8) – מתאים לצומת E משולש (5,7,9) – מתאים לצומת</p>	<p>.2 (ב)</p>
<p>EMLD קווים חסרים ב -</p>	<p>EMLD לא ניתן למצוא מ- m_{52}. את m_{13} ו- m_{52} קווים חסרים: עובר דרך שני חיתוכים בלבד: של 4 ו-6, ושל 8 ו-9, m_{13} לכן לא מתקבל תנאי מסינגולריות מבנייתו, וגם לא צריך אותו בהמשך, לכן לא נצייר אותו.</p>	<p>.3</p>
<p>הכוח שחוליה 2 מפעילה מקביל לחוליות 6 ו-8 EMLD לפי</p>	<p>לא ניתן למצוא את כיווני הכוחות שחוליות 1 ו-2 מפעילות</p>	<p>.4</p>
<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 6 ו-8 מקבילות. הכוח שחוליה 2 מפעילה מקביל לחוליות 6 ו-8.</p> 	<p>תנאי לסינגולריות: חוליות 4 ו-5 מקבילות.</p> 	<p>מכניזם במצב מת</p>

איור 5.56: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.53 עבור קונפיגורציות 1 ו-19 של פאות

דוגמא מס' 8 מכניזם Double Butterfly :

נתון מכניזם, ראה איור 5.57. באותו איור מסומנות הפאות של המכניזם.

חוליית הכניסה היא חוליה 1.



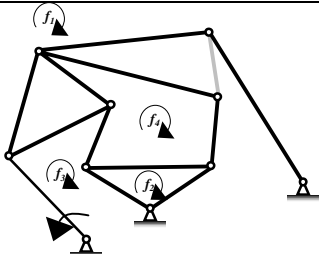
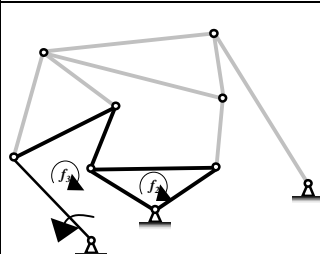
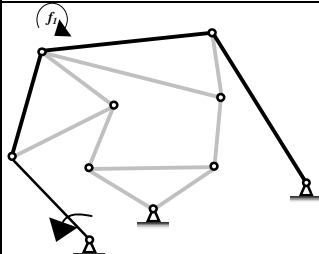
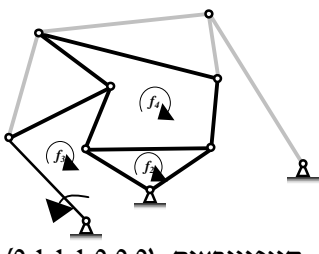
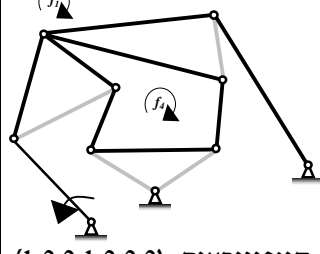
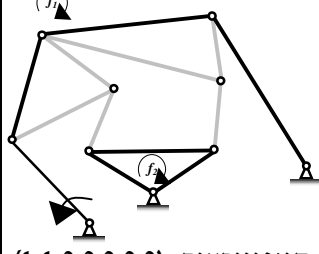
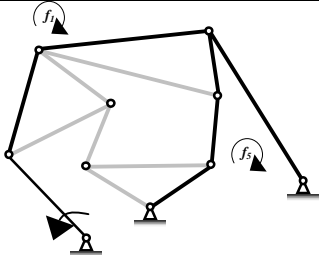
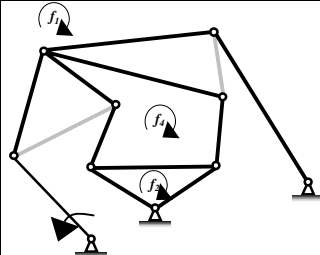
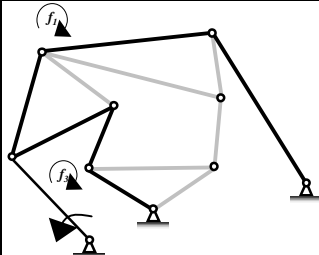
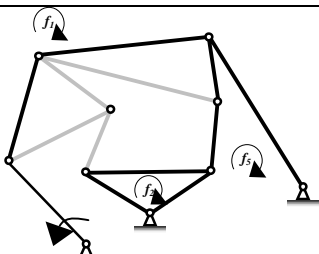
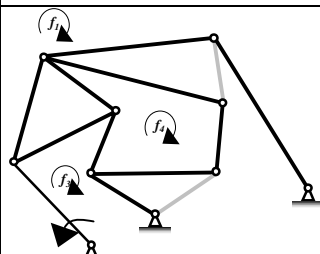
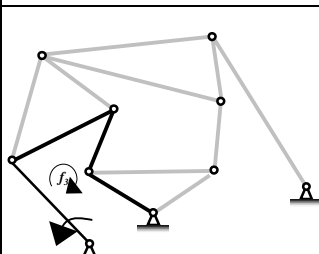
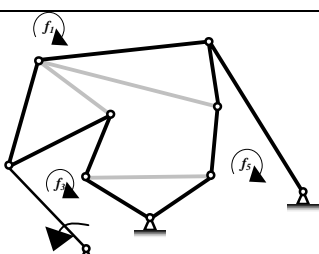
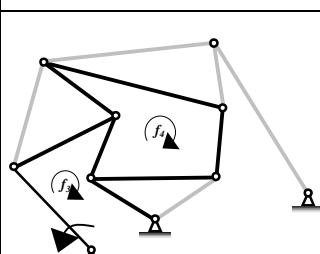
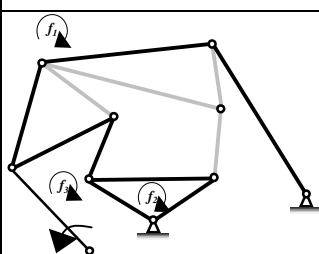
איור 5.57: מכניזם Double butterfly עם פאות מסומנות

טבלה 5.14: קונפיגורציות חוקיות (1-35) של פאות של מכניזם מאיור 5.57

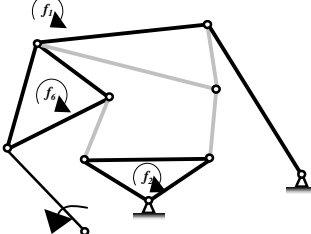
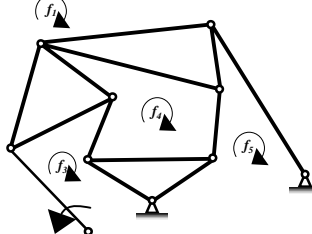
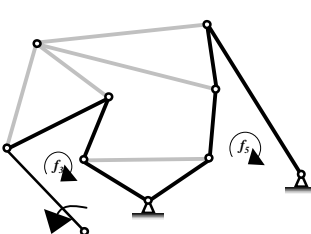
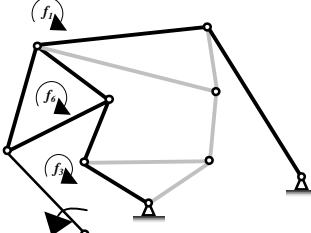
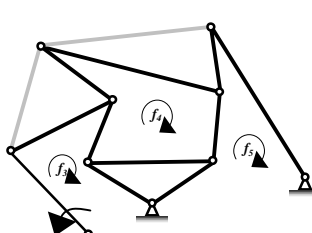
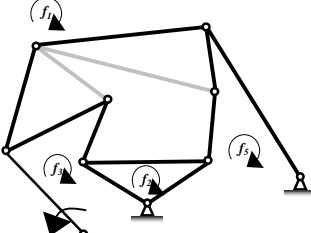
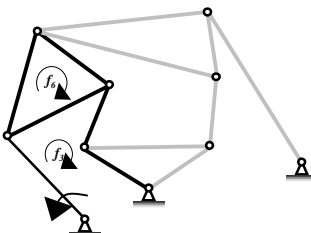
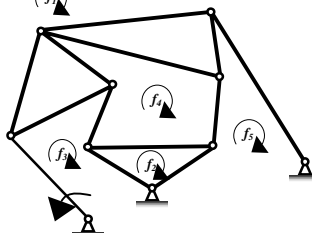
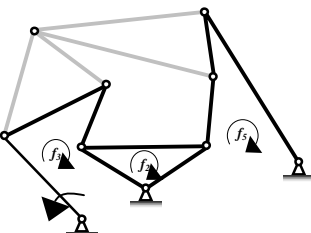
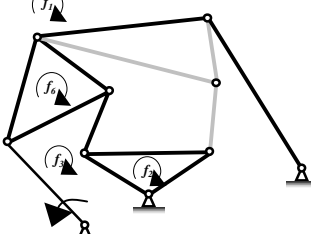
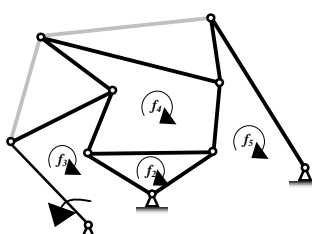
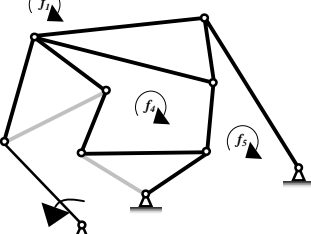
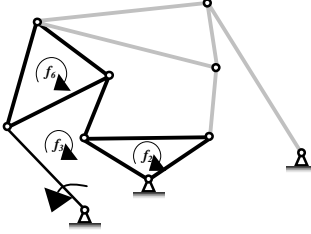
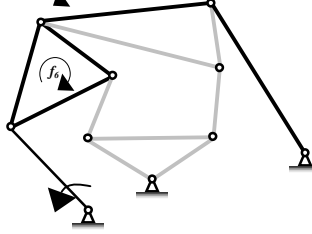
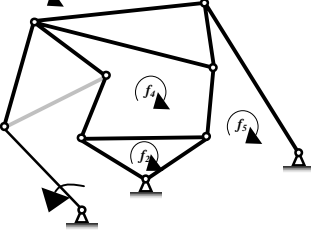
מס' הקונפיגורציה	פאה מס' 1	פאה מס' 2	פאה מס' 3	פאה מס' 4	פאה מס' 5	פאה מס' 6	פאה מס' 7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0	0
7	0	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
9	1	1	0	1	0	0	0
10	1	0	1	1	0	0	0
11	0	0	1	1	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0
13	0	1	1	1	0	0	0
14	1	0	0	0	1	0	0
15	1	1	0	0	1	0	0
16	1	0	1	0	1	0	0
17	0	1	1	0	1	0	0
18	1	1	1	0	1	0	0
19	0	1	1	0	1	0	0
20	1	0	0	1	1	0	0
21	1	1	0	1	1	0	0
22	1	0	1	1	1	0	0
23	0	0	1	1	1	0	0
24	1	1	1	1	1	0	0
25	0	1	1	1	1	0	0
26	1	0	0	0	0	1	0
27	1	1	0	0	0	1	0
28	1	0	0	0	1	0	1
29	1	0	0	0	1	0	0
30	1	1	0	0	1	1	0
31	1	1	0	0	1	0	1
32	1	0	0	1	0	1	0
33	1	1	0	1	0	1	0
34	1	0	1	1	1	0	1
35	1	0	1	1	1	0	0

טבלה 5.15: קונפיגורציות חוקיות (89-36) של פאות של מכניזם מאיור 5.57

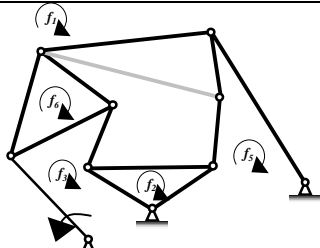
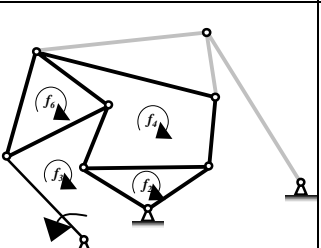
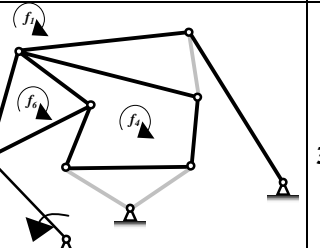
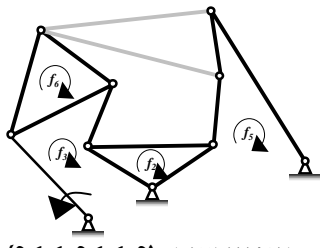
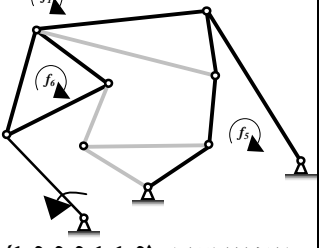
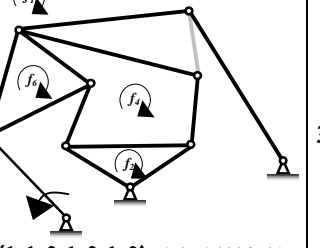
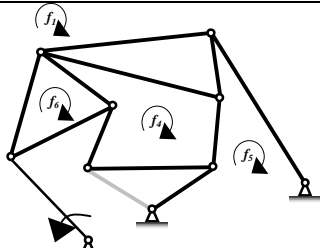
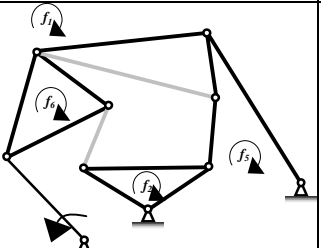
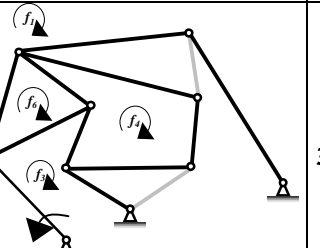
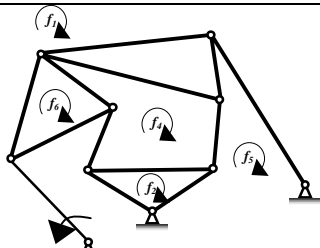
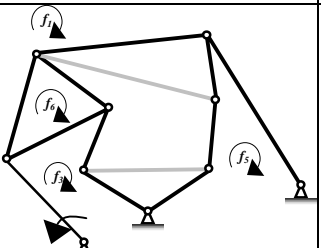
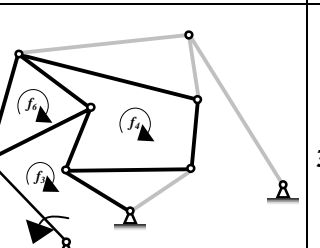
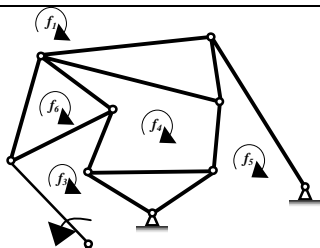
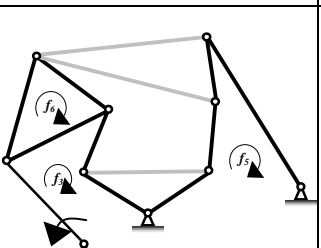
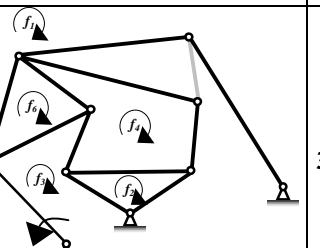
0	1	0	1	1	1	1	36
0	1	0	1	1	1	0	37
0	1	1	0	0	0	1	38
0	1	1	0	0	1	1	39
0	1	1	0	1	0	1	40
0	1	1	0	1	0	0	41
0	1	1	0	1	1	1	42
0	1	1	0	1	1	0	43
0	1	1	1	0	0	1	44
0	1	1	1	0	1	1	45
0	1	1	1	1	0	1	46
0	1	1	1	1	0	0	47
0	1	1	1	1	1	0	48
1	0	0	0	0	0	1	49
1	0	0	0	0	1	1	50
1	0	0	0	1	0	1	51
1	0	0	0	1	0	0	52
1	0	0	0	1	1	1	53
1	0	0	0	1	1	0	54
1	0	0	1	0	0	1	55
1	0	0	1	0	1	1	56
1	0	0	1	1	0	1	57
1	0	0	1	1	0	0	58
1	0	0	1	1	1	1	59
1	0	0	1	1	1	0	60
1	0	1	0	0	0	1	61
1	0	1	0	0	1	1	62
1	0	1	0	1	0	1	63
1	0	1	0	1	0	0	64
1	0	1	0	1	1	1	65
1	0	1	0	1	1	0	66
1	0	1	1	0	0	1	67
1	0	1	1	0	1	1	68
1	0	1	1	1	0	1	69
1	0	1	1	1	0	0	70
1	0	1	1	1	1	0	71
1	1	0	0	0	0	1	72
1	1	0	0	0	1	1	73
1	1	0	0	1	0	1	74
1	1	0	0	1	0	0	75
1	1	0	0	1	1	1	76
1	1	0	0	1	1	0	77
1	1	0	1	0	0	1	78
1	1	0	1	0	1	1	79
1	1	0	1	1	0	1	80
1	1	0	1	1	0	0	81
1	1	0	1	1	1	0	82
1	1	1	0	0	0	1	83
1	1	1	0	0	1	1	84
1	1	1	0	1	0	1	85
1	1	1	0	1	0	0	86
1	1	1	0	1	1	0	87
1	1	1	1	0	0	1	88
1	1	1	1	1	0	0	89

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
2	 קונפיגורציה: (1,1,1,1,0,0,0)	12	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,0,0,0)	7	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,0,0,0)	2		
3	 קונפיגורציה: (0,1,1,1,0,0,0)	13	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,0,0,0)	5	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,0,0,0)	3		
3	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,1,0,0)	14	 קונפיגורציה: (1,1,0,1,0,0,0)	9	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,0,0,0)	4		
3	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,1,0,0)	15	 קונפיגורציה: (1,0,1,1,0,0,0)	10	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,0,0,0)	5		
4	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,1,0,0)	16	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,0,0,0)	11	 קונפיגורציה: (1,1,1,0,0,0,0)	6		

איור 5.58: חישוב דרגת חופש של תת מכניזם בכל קונפיגורציות חוקיות של פאות המכניזם מאיור 5.57

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
3		27	1		22	4		17
	קונפיגורציה: (1,1,0,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (1,0,1,1,1,0,0)			קונפיגורציה: (0,0,1,0,1,0,0)	
2		28	3		23	3		18
	קונפיגורציה: (1,0,1,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (0,0,1,1,1,0,0)			קונפיגורציה: (1,1,1,0,1,0,0)	
2		29	1		24	3		19
	קונפיגורציה: (0,0,1,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (1,1,1,1,1,0,0)			קונפיגורציה: (0,1,1,0,1,0,0)	
2		30	3		25	3		20
	קונפיגורציה: (1,1,1,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (0,1,1,1,1,0,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,1,1,0,0)	
2		31	2		26	2		21
	קונפיגורציה: (0,1,1,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (1,0,0,0,0,1,0)			קונפיגורציה: (1,1,0,1,1,0,0)	

איור 5.59: המשך של איור 5.58

F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n	F	תת מכניזם (שחור)	n
2	 קונפיגורציה: (1,1,1,0,1,1,0)	42	2	 קונפיגורציה: (0,1,1,1,0,1,0)	37	4	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,0,1,0)	32
3	 קונפיגורציה: (0,1,1,0,1,1,0)	43	3	 קונפיגורציה: (1,0,0,0,1,1,0)	38	2	 קונפיגורציה: (1,1,0,1,0,1,0)	33
2	 קונפיגורציה: (1,0,0,1,1,1,0)	44	3	 קונפיגורציה: (1,1,0,0,1,1,0)	39	3	 קונפיגורציה: (1,0,1,1,0,1,0)	34
1	 קונפיגורציה: (1,1,0,1,1,1,0)	45	3	 קונפיגורציה: (1,0,1,0,1,1,0)	40	3	 קונפיגורציה: (0,0,1,1,0,1,0)	35
1	 קונפיגורציה: (1,0,1,1,1,1,0)	46	4	 קונפיגורציה: (0,0,1,0,1,1,0)	41	2	 קונפיגורציה: (1,1,1,1,0,1,0)	36

איור 5.60: המשך של איור 5.59

הפעלת השיטה עבור קונפיגורציה מס' 1 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), תנאים לסינגולריות מודגשים בצבע
 אפור:

		<p>.1</p>
<p>אין חוליות מקבילות</p>	<p>.2 (א)</p>	
<p>C, משולש (2, 4, 5) – מתאים לצומת D משולש (5, 6, 7) – מתאים לצומת F, משולש (9, 12, 13) – מתאים לצומת E משולש (7, 8, 13) – מתאים לצומת G משולש (10, 11, 12) – מתאים לצומת</p>	<p>.2 (ב)</p>	
	<p>m_{14} עובר דרך חיתוכים של (3,4) ו- (11,13) m_{12} עובר דרך חיתוכים של (8,11) ו- ($m_{14},7$) m_{35} עובר דרך חיתוכים של (8,6) ו- (13,5) m_{27} עובר דרך חיתוכים של (8,12), (9,7), ($m_{12},10$) m_{26} עובר דרך חיתוכים של (7,4), (6,2), ($m_{12},3$) m_{37} עובר דרך חיתוכים של (9,5), ($m_{27},6$), ($m_{35},12$) m_{56} עובר דרך חיתוכים של (11,3), (13,4), ($m_{26},8$), ($m_{35},2$) m_{67} עובר דרך חיתוכים של (10,3), (m_{27},m_{26}), ($m_{37},2$), ($m_{56},12$)</p>	<p>.3</p>
<p>הכוח שחוליה 1 יכולה להפעיל על המכניזם עובר דרך חיתוכים של: $(m_{37},10)$, (3,2), ($m_{35},11$), ($m_{14},5$), ($m_{12},6$)</p>	<p>.4</p>	

איור 5.61: הפעלת השיטה על מכניזם מאיור 5.57 עבור קונפיגורציה מס' 1 של פאות

מכל הקונפיגורציות שנבדקו באיורים 5.58-5.60, דרגת חופש אחת לפי גרובלר מתקבלת ב: 1, 22, 24, 45, 46, כאשר בכלן מתקבל כוח שונה מאפס בכל החוליות. לכן מספיק לנתח רק את הקונפיגורציה מס' 1.

המשמעות של כל אחד מהתנאים שמודגשים באיור 5.61, הוא שעל החיתוכים הרשומים להימצא על קו אחד.

פרק 6

סיכום, מסקנות והמשך מחקר

6.1. סיכום

בעבודה שהוצגה כאן, דווח על שתי שיטות למציאת כל המצבים המתים של מכניזם בעל טופולוגיה נתונה. שיטות אלו משתמשות במודלים מתמטיים המבוססים על תורת הגרפים, אחד הנושאים העיקריים במתמטיקה בדידה, הידועה כבסיס מתמטי למדעי המחשב. לכן, כל השיטות המדווחות בתיזה ניתנות למיחשוב כפי שיפורט בהמשך.

התרומה החישובית למציאת המצבים המתים

בעזרת השיטה הראשונה, שיטת התזוזות, ניתן לקבל את הקונפיגורציה של מצב מת של מכניזם על פי התזוזות היחסיות במסבך הדואלי. השיטה השנייה, שיטת הכוח בפאה, מאפיינת את כל אחד מהמצבים בעזרת התנאים שחוליות המכניזם צריכות לקיים כדי שהמכניזם יהיה במצב מת (לדוגמא: תנאי של חוליות מקבילות, תנאי שהמשכי שלוש חוליות נפגשים בנקודה אחת, וכו') וזאת באמצעות תכונות הכוח בפאה.

כדי לקבל את התמונה המלאה של כל המצבים המתים האפשריים במכניזם מורכב מאוד, ניתן לשלב בין שתי השיטות. בשיטת התזוזות נקבל שרטוט של כל מצב מת, ובשיטת הכוח בפאה נלמד על הסיבות הגורמות למצב זה.

שיטת הכוח בפאה נבדקה על מכניזמים, אשר לגביהם פורסמו המצבים המתים שלהם, ואכן כל המצבים שדווחו בספרות, התקבלו. בנוסף לכך, השיטות הקיימות למציאת מצבים מתים של מכניזמים, בדרך כלל מבוססות על משפטים מתורת המכונות, כגון משפט קנדי. לכן, יש לשיטות אלה מוגבלות רק למכניזמים שניתן למצוא בהם את המרכזים הרגועים. לעומת זאת, לשתי השיטות המוצעות בתיזה אין מגבלה כזאת.

עבודה זו התייחסה גם אל השאלה, מהו מספר מצבים מתים אפשריים למכניזם מסוים, כאשר החסם העליון שווה למספר הקונפיגורציות החוקיות של פאות עבור שיטת הכוח בפאה (סעיף 5.2) והערכה לחסם תחתון ניתנת בסעיף 5.7, כאשר מספר המקרים הסופי שנשאר לנתח קטן בהרבה מהחסם העליון.

התרומה התיאורטית

העבודה הזאת מביאה נקודת מבט אלטרנטיבית על הסינגולריות של מכניזם, הפעם על בסיס ידע הקיים במסבכים והקשר הדואלי בין שני ייצוגים (גרף פוטנציאלים וגרף זרימות) מתורת הגרפים. כפי שהוסבר בסעיף 3.3.2, הרעיון לעבודה זו בא בהמשך לעבודת המסטר של הסטודנט תעשה נבו, שבה מצא ייצוג גרפי לשיטת הקורה המצומדת, שיטה ידועה מתורת המבנים (תעשה, 2002). בעבודה זו התגלה כי הקורה המצומדת היא למעשה מערכת דואלית לקורה המקורית. במחקר הנוכחי, התברר כי המסבך המצומד הוא בעצם מכניזם דואלי במצב תקוע.

בתיזה זו היה שימוש רק בשני ייצוגים בלבד והקשר הדואלי ביניהם. כיוון שיש שמספר רב של ייצוגים עם קשרים דואליים נוספים, בהחלט ניתן לצפות כי הפעלת הגישה שפותחה בתיזה יכולה להביא תוצאות חשובות ואף מפתיעות.

בתיזה נעשה שימוש ראשוני בכלים וגישות חדשות כגון כוח בפאה, שהתברר שהוא כוח אבל יש לו תכונות של פוטנציאל, דהיינו, כל ערך שינתן לכוח זה יצור מצב בו הכוחות במוטות יהיה חוקיים. השימוש בו גרם לשיטה יעילה אשר גם מאפשרת לאפיין את הגיאומטריה המיוחדת בה המכניזם יהיה תקוע.

בנוסף, שימוש בכוח בפאה נותן הבנה נוספת למצבים מתיים של מכניזם.

מהעובדה כי כוח זה, קיים בדיאגרמות הפיזיקאי הידוע מקסוול, למרות שלא ציין זאת במפורש, נותן פתח לכך שהתכונות והשימוש שנעשה בו בקינמטיקה בתיזה יהיה גם במערכות סטטיות.

תרומה מיחשובית

הודות לעובדה כי שתי השיטות שדווחו בתזה משתמשות במודלים מתמטיים המבוססים על תורת הגרפים, שתי השיטות ניתנות למיחשוב, במיוחד שיטת הכוח בפאה שהיא קלה מאוד למיחשוב, וניתן להשתמש באלגוריתמים ידועים, כגון:

- לצורך מציאת כל הפאות במכניזם, ניתן להשתמש באלגוריתם קיים לבדיקת מישוריות הגרף (Gibbons, 1985), הנקרא אלגוריתם Demoucron. במהלך הבדיקה שאלגוריתם זה מבצע הוא מוצא את כל הפאות בגרף.

- לצורך בדיקת משולשים בדיאגרמת קווים שווי מומנט ניתן להשתמש בשיטות למציאת כל המעגלים מגודל שלוש בגרף.

- לבדיקת תנאי של חוליות מקבילות מספיק לבדוק אם קו כלשהו בדיאגרמה מייצג יותר מחוליה אחת (לא כולל את חוליית הכניסה) ואם כן – קיבלנו תנאי של חוליות מקבילות.

- לבניית EML (קווי שווי מומנט) חסרים ניתן להשתמש בשיטות למציאת כל מעגלים בגודל שלוש הכוללים קשת מסוימת. בדומה ניתן לבנות את קו המייצג את כיוון הכוח שחוליית הכניסה מפעילה על המכניזם.

6.2. מסקנות והמשך מחקר

הפוטנציאל בחקירת קשר הדואליות בין ייצוגים נוספים

בין כל המסקנות, אולי המעניינת ביותר היא התהליך שבו פותחו שתי השיטות למציאת מצבים מתיים של מכניזמים.

הרעיון לתיזה התחיל מפיתוח שהחל שנתיים קודם, כאשר סטודנט (תעשה, 2002) גילה כי שיטת הקורה המצומדת, היא בעצם מקרה פרטי של דואליות בין שני גרפים, אולם הפעם בכיוון שונה

מהידוע כפי שדווח בשנת 2001. ידע זה, באמצעות הייצוגים הועבר בעבודה זו לתחום אחר, תחום תורת המכונות ונעשה בו שימוש למציאת מצבים מתים של מכניזמים. לכן, מחקר זה פותח שער לחקר קשרים הקיימים בין ייצוגים רבים נוספים שדווחו בספרות, כגון: (Andrews, 1971), (Shai and Rubin, 2003) ועוד. במילים אחרות, ניתן להעביר ידע ולחפש משמעויות חדשות לדואליות בין תחומי הנדסה שונים. מהעובדה שתיזה זו עסקה בתחום הדק בין קינמטיקה לסטטיקה והתבססה על דואליות בין השניים, היא מהווה עדות נוספת לאפשרות לפיתוח מערכות הנמצאות ומבוססות על התחום הזה, כגון: מבנים נפרסים, TENSEGRITY ועוד.

חשיבות של העברת ידע

עדות לחשיבות ולפוטנציאל העברת ידע היא העובדה שהשיטה השנייה שפותחה בתיזה, שיטת הכוח בפאה, מבוססת על כוח שהתגלה שוב באמצעות הקשרים בין הייצוגים, והפעם, בין מכניזמים למסבכים כאשר הכוח הוא האלמנט בסטטיקה המתאים למהירות המוחלטת במכניזמים. לכן, עבודה זו, מהעובדה שמשמשת רק בשני ייצוגים, צפויה לתרום לתחומים רבים אחרים והידע שנצבר יוכל לעבור שוב דרך הייצוגים. לגישה שפותחה בתיזה, אשר מבוססת הפעם על ייצוגים מתורת הגרפים בשונה משיטות אחרות, אשר עיקרן הוא על שיטות ומשפטים בתורת המכונות, יש יתרון גם בתחום יעילות החישוב.

פיתוח שיטות חדשות המבוססות על הכוח בפאה

עבודה זו דנה בתחום מסוים, מציאת מצבים מתים, אולם בהחלט ניתן לראות אותה באור יותר רחב. במציאת מצבים מסוימים עם תכונה מסוימת מבין מגוון עצום של מצבים, התברר כי שימוש בייצוגים המתמטיים עם תכונת הדואליות, כולל משתנים דואליים – הכוח בפאה, מאפשר ביעילות רבה לאתר אותם. לכן, כותבת עבודה זו מאמינה כי לעבודה זו יהיו יישומים בתחומים רבים נוספים. תיזה זו מדווחת לראשונה על שימוש במשתנה כוח חדש, שנקרא – כוח בפאה. כפי שדווח בתיזה ומהתוצאות שהתקבלו, בהחלט ניתן להסיק כי לכוח זה צפויה להיות תרומה מאוד גדולה בתחומים רבים נוספים בהנדסה.

לדוגמא, ניתן לתרגם את שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים יציבים (Form-Finding) של מבנים הבנויים מתומכים וכבלים (Tensegrity structures) (Pellegrino and Tibert, 2004). כפי שנאמר בסעיף 4.1.1, הכוח הפועל לאורך מוט של מסבך, שווה להפרש ווקטורי בין כוחות הפועלים בשתי פאות הסמוכות לאותו מוט. כלומר, אם נבחר כוחות הפועלים בכל הפאות של המבנה בצורה כזו, שכיווני הכוחות בכבלים יהיו מנוגדים לכיווני הכוחות בתומכים, נוכל למקם את המבנה בצורה יציבה. גרף המבנה ייוצג ע"י גרף מכוון, וניתן לקבוע כי האלמנט נמצא בלחיצה אם כיוון הכוח הפועל בו שווה לכיוון הקשת המייצגת אותו בגרף. זה הופך את בעיית מציאת צורה יציבה לבעיית בחירת כוחות בפאה כך שהפרשים ווקטורים ביניהן יהיו בכיוונים מוגדרים. מדוגמה זו ומאחרות, ומהעבודה שתיזה זו מבוססת ומשתמשת בכלים מתמטיים חדשים, יש לעבודה מחקר זה אפשרות לתרום מעבר למציאת המצבים המתים של מכניזמים.

נספח א

הגדרות מתורת המכונות

זוג קינמטי (kinematic pair) (Bogelsack, et al., 1983) – צורת החיבור בין חוליות, המאפשרת תנועה יחסית ביניהן. קיימים מספר סוגים של זוגות, אך עבודה זו מתייחסת לזוג סיבוב. **זוג סיבוב** מוגדר בדרך כלל כציר המחבר בין שני החוליות ומאפשר אך ורק תנועה סיבובית ביניהן.

מערכת (שרשרת) **קינמטית** (cinematic chain) – אוסף של חוליות וצמתים. התנועה של כל החוליות במערכת קינמטית היא מוגבלת (constrained motion), זאת אומרת, אם מחזיקים חוליה אחת קבועה אזי נשארת למערכת דרגת חופש אחת בתנועה יחסית. במילים אחרות, כל נקודה בכל חוליה (פרט לחוליה הקבועה) מוגבלת לנוע במסלול מוגדר יחיד. דוגמא למערכת קינמטית פשוטה ביותר ראה באיור א.1 (א).

מכניזם (mechanism) – מערכת קינמטית אשר אחת מחוליותיה (חוליה או צומת) מחוברת לאדמה ותנועותיה מוגדרות היא מכניזם. לדוגמא ראה מכניזם מאיור א.1 (ב).

ניתן לקבל מכניזמים שונים ממערכת קינמטית נתונה. אם יש במערכת n חוליות, אזי ניתן לקבל n מכניזמים שונים בהתאם לחוליה שתהיה קבועה. קבוצת מכניזמים אשר נובעים ממערכת קינמטית אחת נקראת **הפיכות קינמטיות** (Inversions) של אותה מערכת.

בחלק ממקורות הספרות, מכניזם אשר כל הצמתים שלו מסדר נמוך נקרא **Linkage**. בעבודה זו נשתמש במושגים חוליית הכניסה וחוליית היציאה.

חוליית כניסה (input link) – חוליה שתנועתה מעבירה אנרגיה מכנית (כוחות או תנועות) לתנועות וכוחות של שאר החוליות.

חוליית היציאה – (output link) – חוליה שממנה מתקבלים כוחות או מהירויות הדרושים.

חלק מהמחקרים משתמשים במושגים חוליה מניעה וחוליה מונעת.

חוליה מניעה (driving link) – חוליה שמעבירה אנרגיה מכנית לחוליה אחרת אחת לפחות כאשר יש ביניהם חיבור.

במכניזם בעל דרגת חופש אחת יכולה להיות רק חוליית כניסה אחת והרבה חוליות מניעות.

חוליה מונעת (driven link) – חוליה שמקבלת אנרגיה מכנית מחוליה אחרת אחת לפחות כאשר יש ביניהם חיבור. החוליה המניעה והחוליה המונעת יכולות להתחלף בתפקידן במחזור הפעולה של המכניזם.

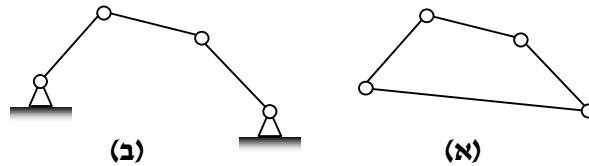
גרובלר (Gruebler, 1917) הראה את הקשר בין מספר חוליות, צמתים ודרגות חופש במערכת קינמטית מישורית. כאשר אחת החוליות קבועה (זאת אומרת שמדובר כבר במכניזם) הנוסחה היא:

$$F = 3(N - 1) - 2J$$

כאשר: J הוא מספר הצמתים, N הוא מספר החוליות, ו- F הוא מספר דרגות החופש. נוסחה זו נכונה עבור מערכות קינמטיות בהם כל חוליה מחוברת לפחות לעוד שני חוליות וכל החיבורים הם צירי סיבוב, וגם כל ציר סיבוב מחבר לפחות שתי חוליות. כמובן, עבור דרגת חופש אחת ($F=1$) ניתן לקבל קשרים אפשריים בין מספר החוליות למספר הצמתים:

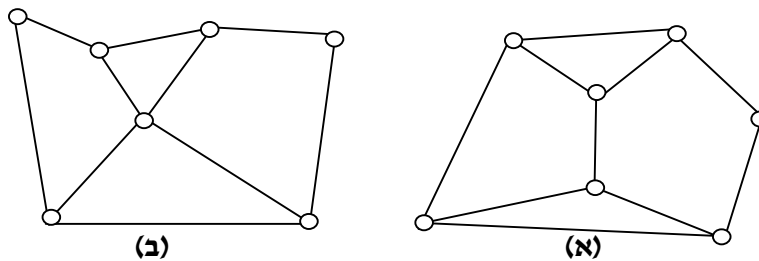
- (a) $N = 4; J = 4$
- (b) $N = 6; J = 7$
- (c) $N = 8; J = 10$

ניתן לראות שכאשר מספר החוליות הוא 4, קיימות רק מערכת קינמטית מישורית אחת (ראה איור א. 1 (א)). ממערכת קינמטית זו ניתן לקבל 4 מכניזמים וכל אחד יהיה מהצורה כמו באיור א. 1 (ב).



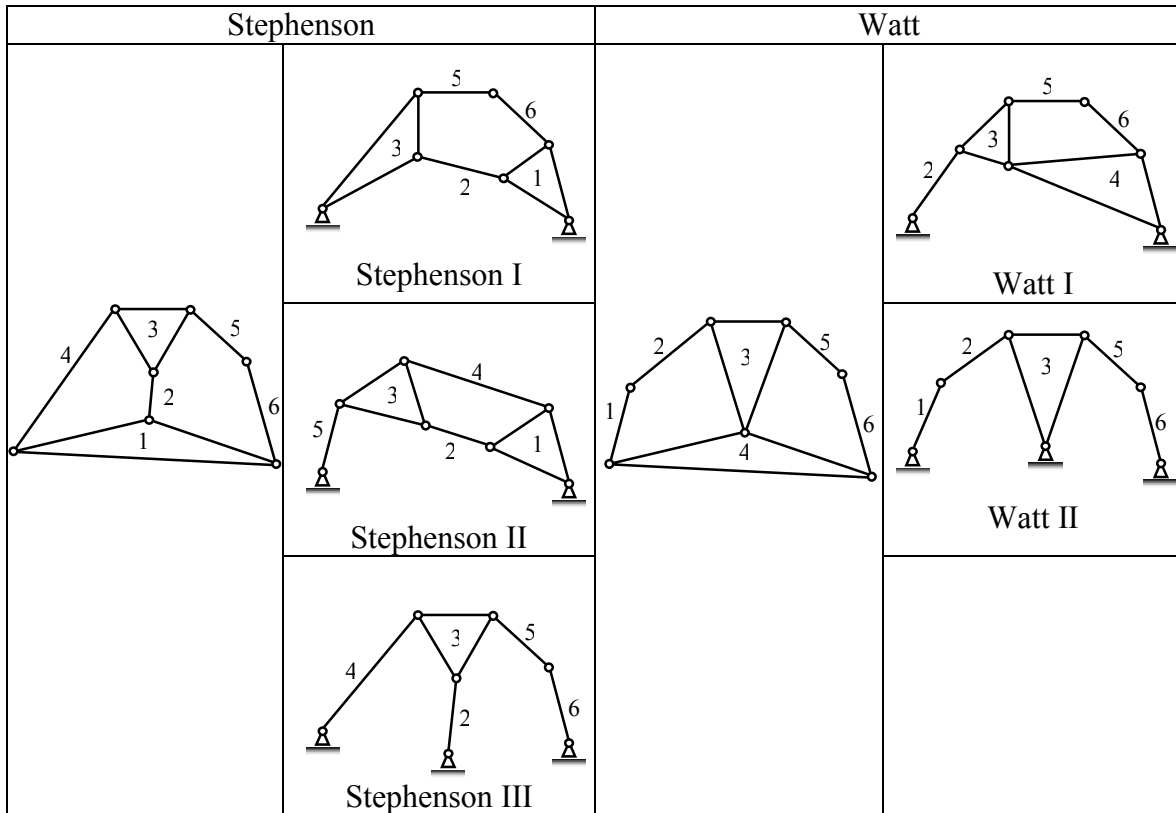
איור א. 1: מערכת קינמטית ומכניזם בעלי ארבע חוליות
 (א) מערכת קינמטית בעלת 4 חוליות. זוהי הקונפיגורציה היחידה של מערכת קינמטית בעלת 4 חוליות.
 (ב) מכניזם ארבע חוליות

כאשר מספר החוליות עולה ל-6, ישנם 2 מערכות אפשריות: Watt (נמצאה בשנת 1784) ו- Stephenson (נמצאה בשנת 1829), ראה איור מספר א. 2.



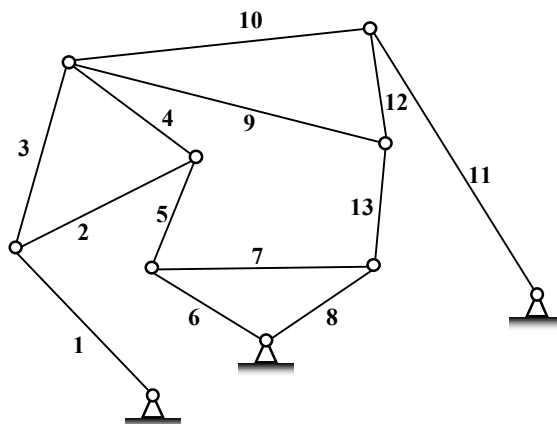
איור א. 2: שתי מערכות קינמטיות אפשריות בעלות 6 חוליות
 (א) Stephenson, (ב) Watt

באיור 3.א. הבאה נראה את ההפיכות הקינמטיות של שתי המערכות מאיור 2.א.:



איור 3.א. הפיכות קינמטיות של מערכות Stephenson ו- Watt

בעזרת משפט קנדי ניתן למצוא את כל המרכזים הרגעיים של מכניזמים עם 4 ו- 6 חוליות וגם של כל המכניזמים בעלי 8 חוליות חוץ מ- "Double Butterfly" (ראה איור 4.א.) אשר רק בשנת 2003 (Foster and Pennok, 2003) פותחה עבורו שיטה גרפית למציאת מרכזים רגעיים.



איור 4.א. מכניזם שנקרא "Double Butterfly"

נספח ב

שיטה של Yan and Wu למציאת מצבים מתים של מכניזם

מטרת השיטה (Yan and Wu, 1989) היא מציאת כל המצבים המתים של מכניזם מישורי. במילים אחרות, השיטה מאתרת את כל המצבים בהם מכניזם בעל טופולוגיה נתונה נמצא במצב תקוע (חוליית הכניסה לא יכולה לבצע תנועה).

תשתית מתורת המכונות וממכאניקה עליה מבוססת השיטה

א. חוק שימור הספק. השיטה מתייחסת למכניזם מישורי אם חוליית כניסה אחת וחוליית יציאה אחת, כאשר אין חיכוך או כוחות אינרציאליים וכל ההספק המושקע מתקבל חזרה:

$$1. \text{ב} \quad T_i \omega_i = T_o \omega_o$$

כאשר: T_i ו T_o זה המומנט בכניסה והמומנט ביציאה בהתאמה, ו ω_i ו ω_o הן מהירויות זוויתיות בכניסה וביציאה בהתאמה.
ב. למכניזם במצב מת תועלת מכנית שווה לאפס.

תועלת מכנית של המכניזם (MA) זהו יחס רגעי בין מומנט מתקבל לבין המומנט המושקע או בין מהירות זוויתית בכניסה לבין מהירות זוויתית ביציאה:

$$2. \text{ב} \quad MA = \frac{T_o}{T_i} = \frac{\omega_i}{\omega_o}$$

כאשר המכניזם נמצא במצב מת, המומנט המתקבל בחוליית היציאה הוא אפס לכן אפשר לומר שלמכניזם תקוע תועלת מכנית שווה לאפס. נסתכל על היחס בין מהירות הזווית בכניסה לבין מהירות הזוויתית ביציאה:

$$3. \text{ב} \quad \frac{\omega_i}{\omega_o} = 0$$

ג. ניתן לבטא את היחס בין מהירויות זוויתיות של חוליות במרחקים בין מרכזים רגעיים. יחס זה מתואר על ידי משוואה ב.4, כאשר חוליה מספר 1 מסמלת את האדמה.

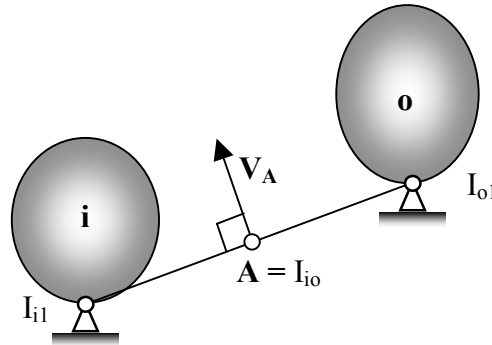
$$4. \text{ב} \quad \frac{\omega_i}{\omega_o} = \frac{(I_{o1} I_{io})}{(I_{i1} I_{io})}$$

כאשר $(I_{i1} I_{io})$ (או $(I_{o1} I_{io})$) זה המרחק בין מרכזים הרגעיים I_{i1} ל I_{io} (או בין I_{o1} ל I_{io} בהתאמה).

הוכחת משוואה ב.4 :

לפי משפט קנדי, לשלוש חוליות בתנועה מישורית ישנם שלושה מרכזים רגועים הנמצאים כולם על ישר אחד. נבחר שלוש חוליות : חוליית כניסה (i), חוליית יציאה (o) ואדמה (נסמן אותה כ-1). לפי המשפט מרכז רגועי בין כניסה ליציאה נמצא על הקו המחבר ביניהם (ראה 3).

נסתכל על הנקודה A (שהיא המרכז הרגועי בין חולית הכניסה לחוליית היציאה) פעם אחת אילו הייתה שייכת לחוליית כניסה (נסמן אותה A_i) ופעם שנייה אילו הייתה שייכת לחוליית היציאה (נסמן אותה A_o).



איור ב.1: מהירות של נקודה A כאשר היא שייכת לחוליית הכניסה או לחוליית היציאה

ברור כי המהירויות של A_i ושל A_o שוות כי הן בעצם אותה נקודה A. נבטא את המהירות בעזרת מרחקים ומהירויות זוויתיות :

5.ב
$$V_{A_i} = \omega_i (I_{i1} I_{io})$$

6.ב
$$V_{A_o} = \omega_o (I_{o1} I_{io})$$

כאשר $(I_{i1} I_{io})$ (או $(I_{o1} I_{io})$) זה המרחק בין מרכזים הרגועים I_{i1} ל- I_{io} (או בין I_{o1} ל- I_{io} בהתאמה).
לכן :

7.ב
$$\omega_i (I_{i1} I_{io}) = \omega_o (I_{o1} I_{io})$$

ואז מתקבל :

8.ב
$$\frac{\omega_i}{\omega_o} = \frac{(I_{o1} I_{io})}{(I_{i1} I_{io})}$$

עכשיו ניתן לבטא את התועלת המכנית בעזרת מרחקים בין מרכזים רגועים ולהשוות את הביטוי לאפס:

$$9.ב \quad MA = \frac{(I_{o1}I_{io})}{(I_{i1}I_{io})} = 0$$

ברור כי כדי שמשוואה 9.ב תהיה מוגדרת:

$$10.ב \quad \begin{aligned} (I_{o1}I_{io}) &= 0 \\ (I_{i1}I_{io}) &\neq 0 \end{aligned}$$

המשמעות של משוואה 10.ב היא שבמצב מת של מכניזם על גבי חוליית הכניסה נמצאות שתי נקודות סטציונריות (נקודות שהמהירות שלהן שווה לאפס), בזמן שעל גבי חוליית היציאה נמצאת רק נקודה סטציונרית אחת.

מתוך משוואה 9.ב ניתן להגיד שבעיית מציאת מצבים מתים הפכה לבעיית בניית מכניזם כך שחלק מהמרכזים הרגועים יתלכדו.

כאשר יש חיבור בין חוליית הכניסה לחוליית היציאה, ביטוי של תועלת מכנית כפונקציה של מרחקים בין מרכזים רגועים (משוואה 9.ב) הוא מיידי. כאשר אין חיבור בין חוליית הכניסה (i) לחוליית היציאה (o), צריך למצוא את כל המסלולים האפשריים בין חוליות כניסה ויציאה ולבטא את משוואה 9.ב בעזרת המסלולים האלה. כך למשל אם מסלול בין i – l – o עובר דרך חוליות j – l – k, ביטוי לתועלת מכנית יהיה:

$$11.ב \quad MA = \frac{\omega_i}{\omega_o} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \frac{\omega_j}{\omega_k} \frac{\omega_k}{\omega_o}$$

או כפונקציה של מרחקים בין המרכזים הרגועים (בעזרת משוואה 8.ב):

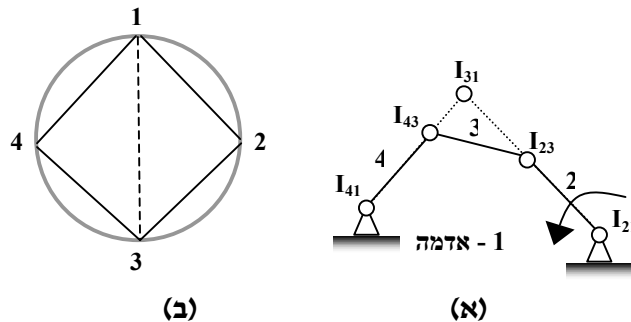
$$12.ב \quad MA = \frac{I_{j1}I_{ij} \cdot I_{k1}I_{jk} \cdot I_{o1}I_{ko}}{I_{i1}I_{ij} \cdot I_{j1}I_{jk} \cdot I_{k1}I_{ko}}$$

כמו מקודם (משוואה 9.ב) אם נאפס את המונה נקבל את התנאים בהם המכניזם יהיה במצב מת, רק הפעם יש לנו מספר אפשרויות לאיפוס המונה. איפוס של כל אחת או כל שילוב של מרכיבים המכפלה במונה יביא לקבלת תנאים שאנחנו מחפשים. לכן צריך לבנות את כל המקרים למרות שבחלק מהמקרים מתקבלים בדיוק אותם תנאים.

תהליך הפעלת השיטה

1. במכניזם נתון זהה את האדמה, חוליית הכניסה וחוליית היציאה. מצא את כל המסלולים בין חוליית הכניסה וחוליית היציאה.
2. עבור כל מסלול שנמצא בסעיף 1, רשום את הביטוי של תועלת מכנית כפונקציה של מרחקים בין מרכזים רגעיים (ראה משוואות ב.9 או ב.12).
3. עבור כל ביטוי שנרשם בסעיף הקודם רשום את כל התנאים האפשריים לאיפוס תועלת מכנית.
4. מצא את המרכזים הרגעיים המופיעים בסעיף 3 במכניזם הנתון וגם את מרכזים הרגעיים של כל החוליות ביחס לאדמה. סמן את כל מרכזים רגעיים שמהווים חיבורים בין חוליות המכניזם.
5. שרטט מחדש את החלק של המכניזם שכולל את המרכזים הרגעיים שנמצאו בסעיף הקודם, כך שיתקיימו התנאים לאיפוס תועלת מכנית המתוארים בסעיף 3 עבור קונפיגורציה זו.
6. בשרטוט של סעיף 5 מצא את המרכזים הרגעיים הנותרים כדי להשלים את המכניזם בעזרת משפט קנדי.
7. במכניזם המתקבל בדוק שעל חוליית הכניסה נמצא יותר מנקודה סטציונרית אחת בזמן שעל חוליית היציאה יש רק נקודה סטציונרית אחת.

ניקח לדוגמא מכניזם ארבע חוליות (ראה באיור ב.2) ונפעיל את השיטה לקבלת מצב מת של המכניזם, כאשר חוליית הכניסה היא חוליה 2, חוליית היציאה היא חוליה 3 ואדמה היא חוליה 1. בעזרת מעגל קנדי נמצא את כל המרכזים הרגעיים של המכניזם. את תהליך הפעלת השיטה ניתן ללמוד מאיור ב.3.



איור ב.2: מציאת מרכזים רגעיים של המכניזם ארבע חוליות (א) מכניזם ארבע חוליות, (ב) מעגל קנדי של מכניזם מ(א)

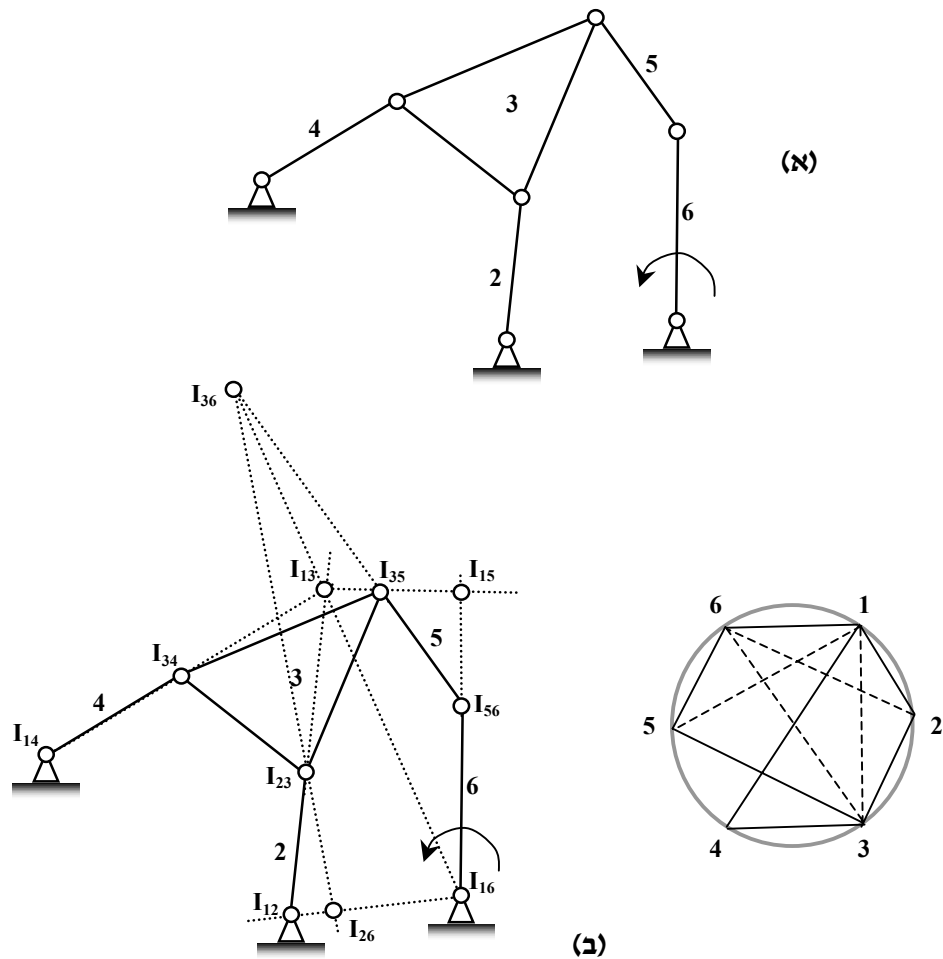
	<p>1. זיהוי האדמה, חוליית הכניסה וחוליית היציאה. מציאת כל המסלולים בין חוליית הכניסה וחוליית היציאה.</p>
$MA = \frac{(I_{3,1} I_{2,3})}{(I_{2,1} I_{2,3})}$	<p>2. רשימת ביטוי לתועלת מכנית</p>
$= 0 (I_{3,1} I_{2,3})$	<p>3. רשימת תנאים לאיפוס תועלת מכנית</p>
	<p>4. מציאת מרכזים רגועים המופיעים בסעיף 3. במכניזם הנתון וגם את מרכזים הרגועים של כל החוליות ביחס לאדמה. סימון של כל מרכזים רגועים שמהווים חיבורים בין חוליות המכניזם.</p>
	<p>5. שרטוט מחדש של החלק של המכניזם שכולל את המרכזים הרגועים שנמצאו בסעיף הקודם, כך שיתקיימו התנאים לאיפוס תועלת מכנית המתוארים בסעיף 3.</p>
<p>מציאת I_{34}: לפי משפט קנדי I_{34} נמצא על הקו המחבר בין I_{41} ו- I_{31}:</p>	<p>6. בשרטוט של סעיף 5 מצא את המרכזים הרגועים הנוותרים כדי להשלים את המכניזם בעזרת משפט קנדי.</p>
<p>במכניזם שהתקבל על גבי חוליית הכניסה (2) יש שתי נקודות על גבי חוליית היציאה נמצאת רק נקודה I_{31} ו- I_{21} סטציונריות: I_{31} סטציונרית אחת:</p>	<p>7. בדיקה שעל חוליית הכניסה נמצא יותר מנקודה סטציונרית אחת בזמן שעל חוליית היציאה יש רק נקודה סטציונרית אחת</p>

אזור ב.3: דוגמא להפעלת השיטה על מכניזם ב.2 (א)

לסיכום, ניתן לומר, כי השיטה משתמשת במרכזים הרגעיים ובמשפט קנדי ויכולה לשמש למציאת כל המצבים המתים האפשריים למכניזם נתון. במקרה של מכניזם עם מספר גדול של חוליות השימוש בשיטה דורש זמן ממושך.

בעיה נוספת היא קבלת מקרים מיותרים, כלומר בהפעלת השיטות מתקבלים מצבים מתים שמהווים מקרה פרטי של מצבים אחרים. נראה דוגמה לקבלת מקרה מיותר במציאת כל המצבים המתים במכניזם מסוג Stephenson III.

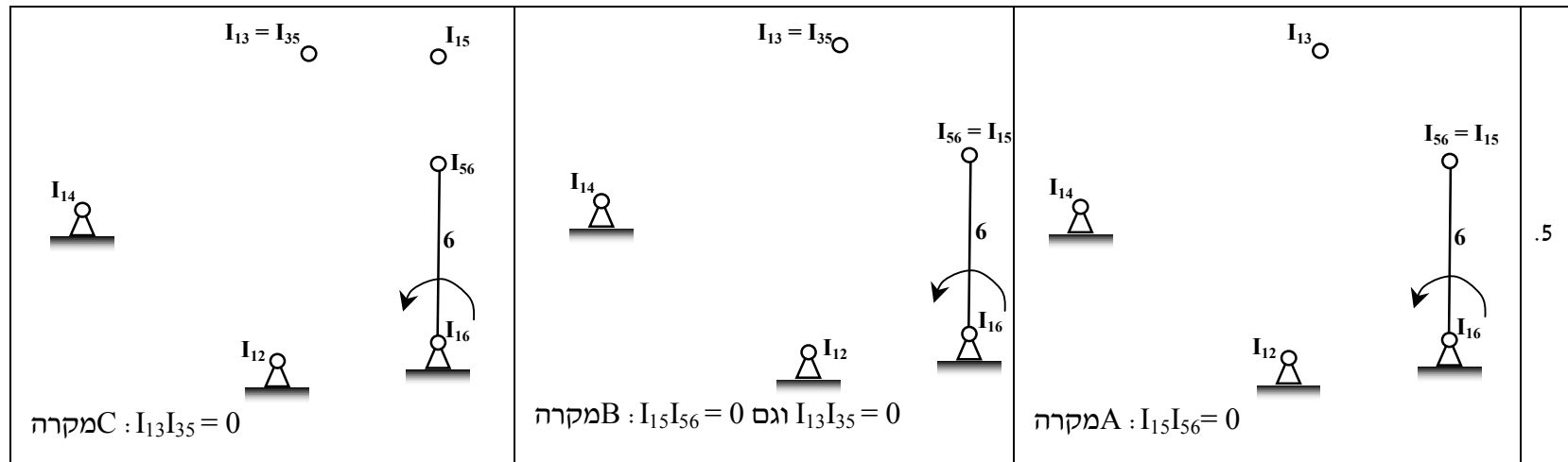
באיור 4.ב (א) ניתן לראות את המכניזם, כאשר חוליה 6 היא חוליית הכניסה, חוליה 2 היא חוליית היציאה והאדמה מסומנת כחוליה 1. איור 4.ב (ב) מציאת חלק מהמרכזים הרגעיים של מכניזם זה בעזרת מעגל קנדי, לצורך הדגמת הפעלת השיטה, המתוארת באיורים 4.ב-5.ב.



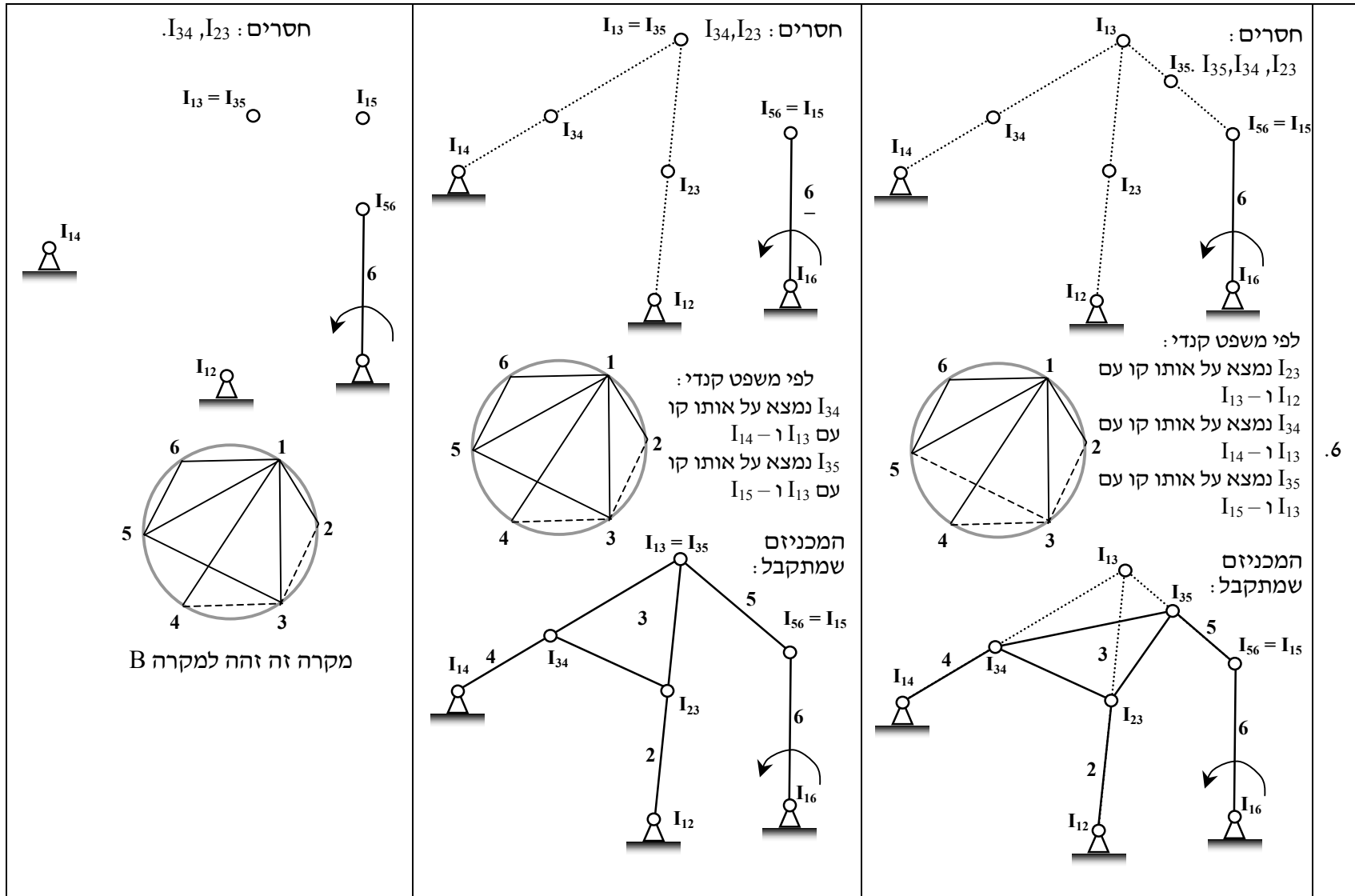
איור 4.ב: מציאת חלק מהמרכזים הרגעיים של המכניזם מסוג Stephenson III (א) מכניזם מסוג Stephenson III, (ב) מציאת חלק מהמרכזים הרגעיים של המכניזם מסוג Stephenson III בעזרת מעגל קנדי.

<p>1 - אדמה</p> <p>חוליית הכניסה: 6 חוליית היציאה: 2 אדמה: 1</p>	<p>.1</p>
<p>המסלול היחיד הוא מחוליה 6 דרך חוליות 5 ו-3 לחוליה 2</p> $M_A = \frac{(I_{12}I_{26})}{(I_{16}I_{26})} = \frac{(I_{15}I_{56})(I_{13}I_{53})(I_{12}I_{23})}{(I_{16}I_{56})(I_{15}I_{53})(I_{13}I_{23})}$	<p>.2</p>
<p>הינו אורך של חוליה 2 לכן הוא לא יכול להתאפס $I_{12}I_{23}$ המרחק לכן נשארו 3 תנאים לאיפוס הביטוי של תועלת מכנית:</p> <p>מקרה A: $I_{15}I_{56} = 0$ מקרה B: $I_{15}I_{56} = 0$ וגם $I_{13}I_{35} = 0$ מקרה C: $I_{13}I_{35} = 0$</p>	<p>.3</p>
<p>מציאת $I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}, I_{23}, I_{34}, I_{35}, I_{36}, I_{26}, I_{36}, I_{15}$</p> <p>ראה איור 4.ב</p>	<p>.4</p>

איור 4.ב: דוגמא להפעלת השיטה למציאת מצב מת של מכניזם 4.ב (א)



איור 6.ב: דוגמא להפעלת השיטה למציאת מצב מת של מכניזם (המשך)



איור 7.ב: דוגמה להפעלת השיטה למציאת מצב מת של מכניזם (המשך)

מקרה זה זהה למקרה B	במכניזם שהתקבל על גבי חולית הכניסה (6) יש שתי נקודות סטציונריות : I_{16} ו- I_{15} . על גבי חוליית היציאה (2) נמצאת רק נקודה סטציונרית אחת : I_{12} 4 – ו 3 . יש רק נקודה סטציונרית אחת, לכן הן גם יכולות להיות חוליות היציאה על גבי חוליה 5 ישנן שתי נקודות . לכן היא I_{15} – ו I_{13} סטציונריות : יכולה להיות חוליית כניסה ולא חוליית יציאה.	במכניזם שהתקבל על גבי חולית הכניסה (6) יש שתי נקודות סטציונריות : I_{16} – ו I_{15} . על גבי חוליית היציאה (2) נמצאת רק נקודה סטציונרית אחת : I_{12} . גם על חוליות 3, 4 – ו 5 יש רק נקודה סטציונרית אחת, לכן הן גם יכולות להיות חוליות היציאה	.7
---------------------------	---	---	----

איור 8.ב: דוגמא להפעלת השיטה למציאת מצב מת של מכניזם (המשך)

כפי שניתן לראות מהדוגמא, חלק מהמצבים המתים שמתקבלים הינם מקרים פרטיים של מקרים אחרים. במקרה A התקבל שכדי שהמכניזם יהיה במצב מת, I_{13} צריך להימצא על קו המשך של חוליה 5. במילים אחרות המשכי חוליות 2, 4 – ו 5 צריכים להיפגש בנקודה אחת. במקרה B המשכי חוליות אלו גם נפגשים בנקודה אחת, ולכן מקרה B הוא מקרה פרטי של מקרה A. מקרה C זהה למקרה B. כלומר, ישנו רק מקרה אחד (A) של מצב מת של מכניזם זה עם חולית כניסה 6, ואנחנו יכולים לדעת על כך רק אחרי שניתחנו את כל המקרים.

מקורות

1. Alt H., 1921, "Zur Synthese der ebenen Mechanismen", *ZAMM*, Vol. 1, No. 5, pp. 373-398.
2. Altuzarra O., *et al.*, 2003, "An Automatic and General Approach to the Computational Analysis of Singular Configurations in Planar Mechanisms", 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, August 18-21, Tianjin, China.
3. Andrews G. C., 1971, *The vector-network model – a topological approach to mechanics*, Ph. D. Thesis, University of Waterloo.
4. Au T. and Christiano P., 1993, *Fundamentals of Structural Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.
5. Balli S. and Chand S., 2003, "Synthesis of planar seven-link mechanism with variable topology for motion between two dead-center positions", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, No. 11, pp. 1271-1287.
6. Balli S. and Chand S., 2002, "Defects in link mechanisms and solution rectification", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 851-876.
7. Balli S. and Chand S., 2001, "Synthesis of a five-bar mechanism with variable topology for motion between extreme positions", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, pp. 1147-1156.
8. Beloiu A. S. and Gupta K. C., 1997, "A Unified Approach For The Investigation Of Branch And Circuit Defects", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 32, No. 5, pp. 539-557.
9. Bogelsack G., *et al.*, 1983, "Terminology for the Theory of Machines and Mechanisms, Fifth Draft, 1983 International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms Commission a Standards for Terminology", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 18, No. 6, pp. 379-408.
10. Chase T. R. and Mirth J. A., 1993, "Circuits and Branches of Single-Degree-of-Freedom Planar Linkages", *Transactions of the ASME, Journal Of Mechanical Design*, Vol. 115 (June), pp. 223-230.
11. Crossley F. R. E., 1965, "The Permutations of Kinematic Chains of Eight Members or Less from the Graph-Theoretic Viewpoint", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, W. A. Shaw ed., Volume 2, *Proc. Second Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics*, Atlanta, GA.

12. Dou X. and Ting K. L., 1996, "Branch Identification of Geared Five-Bar Chains", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 118 (September), pp. 384-389.
13. Dou X. and Ting K. L., 1998, "Module Approach for Branch Analysis of Multiloop Linkages/Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 5, pp. 565-582.
14. Even S., 1979, *Graph Algorithms*, Computer Science Press, Inc., Rockville.
15. Foster D. E. and Pennock G. R., 2003, "A Graphical Method to Find the Secondary Instantaneous Centers of Zero Velocity for the Double Butterfly Linkage", *Journal of Mechanical Design*, Trans. ASME, Vol. 125, No.2, June, pp. 268-274.
16. Gibbons A., 1985, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
17. Gosselin C. and Angeles J., 1990, "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 281-290.
18. Gosselin C. and Wang J., 1997, "Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 21, pp. 377-398.
19. Gruebler M., 1917, *Getriebelehre*, Berlin.
20. Hernández A., *et al.*, 2003, "Kinematic analysis of mechanisms via a velocity equation based in a geometric matrix", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, No. 12, pp. 1413-1429.
21. Hunt K. H., 1978, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, O. U. P., Oxford.
22. Laursen H. I., 1969, *Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York.
23. Mirth J., 1994, "Instantaneous power methods to improve the inertial characteristics of planar linkages", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 7, pp. 1007-1014.
24. Mirth J. A. and Chase T. R., 1995, "Circuit rectification for four precision position synthesis of four bar and watt six-bar linkages", *Transactions of the ASME, Journal Of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 612-619.

25. Mirth J. A. and Chase T. R., 1993, "Circuit Analysis of Watt Chain Six-Bar Mechanisms", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 115 (June), pp. 214-222.
26. Nayler G. H. F., 1996, *Dictionary of Mechanical Engineering*, 4th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford.
27. Pan C. A., *et al.*, 2000, "Double points and unstable configurations of Watt-I and Watt-II mechanisms", ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September 10-13.
28. Pellegrino, S. and Tibert, G., 2004, *Review of form-finding methods for tensegrity structures*, to appear in Accepted for publication in *Int. J. Space Structures*.
29. Pellegrino, S., *et al.*, 2000, "SAR Advanced Deployable Structure", *Technical Report CUED/D-STRUCT/TR191*, Department of Engineering, University of Cambridge.
30. Pellegrino, S., *et al.*, 2000, "Small Satellite Deployment Mechanisms", *Technical Report CUED/D-STRUCT/TR190*, Department of Engineering, University of Cambridge.
31. Rao A. C., 2004, "Parallelism in planar kinematic chains (manipulators)", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 39, pp. 1111-1122.
32. Rao A. C. and Anne J., 1998, "Topology based characteristics of kinematic chains: work space, rigidity, input-joint and isomorphism", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 5, pp. 625-638.
33. Shai O. and Rubin D., 2003, "Representing and Analyzing Integrated Engineering Systems Through Combinatorial Representations", *Engineering with Computers*, Vol. 19, No. 4, pp. 221-232.
34. Shai O., 2002, "Utilization of the Dualism between Determinate Trusses and Mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No. 11, pp. 1307-1323.
35. Shai O., 2001a, "The duality relation between mechanisms and trusses", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, pp. 343-369.
36. Shai O., 2001b, "Combinatorial Representation in Structural Analysis", *Journal of Computing in civil engineering*, Vol. 15 (July), pp. 343-369.
37. Shai O., 2001c, "Deriving Structural Theorems and Methods Using Tellegen's Theorem and Combinatorial Representations", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 8037-8052.

38. Shai O. and Preiss K., 1999, "Graph Theory Representations of Engineering Systems and their Embedded Knowledge", *Artificial Intelligence in Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 273-284.
39. Shigley J. E. and Uicker J. J., 1995, *Theory of machines and mechanisms*, McGraw-Hill, New York.
40. Swamy M. N. S. and Thulasiraman K., 1981, *Graphs, Networks, and Algorithms*, John Wiley & sons Inc., New York.
41. Ta'aseh N. and Shai O., 2002, "Derivation of Methods and Knowledge in Structures by Combinatorial Representations", The Six International Conference on Computational Structures Technology, Prague, Czech Republic, 4-6 September.
42. Ting K. L. and Dou X., 1996, "Classification and Branch Identification of Stephenson Six-Bar Chains", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 3, pp. 283-295.
43. Yan H. S. and Wu L. I., 1989, "On the Dead-Center Positions of Planar Linkage Mechanism", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 111 (March), pp. 40-46.
44. Yan H. S. and Wu L. I., 1988, "The Stationary Configurations of Planar Six-Bar Kinematic Chains", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 23, No. 4, pp. 287-293.
45. אלפרוביץ' י., 1973, מכניקה טכנית, חלק א', סטטיקה, אורט ישראל, גבעתיים.
46. אלפרוביץ' י., 1970, מכניקה טכנית, חלק ב', דינמיקה, אורט ישראל, גבעתיים.
47. פסן ד. ו – שביט א., 1975, תורת המכונות, "מכלול" הוצאה לפועל, חיפה.
48. תעשה נ., 2002, אנליזה של מבנים באמצעות ייצוגים קומבינטוריים, עבודת גמר לתואר "מוסמך אונברסיטה" בהנדסה מכנית, אוני' ת"א, המחלקה למכניקה חומרים ומערכות.

Table of Contents

List of Notations	v
List of Figures	vi
List of Tables	ix
<u>Chapter 1: Introduction</u>	<u>1</u>
1.1 Introduction	1
1.2 Research objectives	3
1.3 Definitions of dead center positions of mechanism from the literature	4
1.4 Related works	5
1.5 The importance of dead center positions of mechanisms and their applications	7
<u>Chapter 2: The Mathematical Foundation of the Thesis</u>	<u>11</u>
2.1 Graph Theory – theoretical background	11
2.2 Potential and flow	14
2.3 Flow Graph Representation (FGR)	17
2.4 Representing trusses by the flow graph	17
2.5 Potential Graph Representation (PGR)	18
2.6 Representing velocities in mechanisms by the potential graph	19
2.7 Dual graph	20
2.8 Duality relation between trusses and mechanisms	21
<u>Chapter 3: Deriving Dead Center Positions through The Displacement Method</u>	<u>23</u>
3.1 Representing displacements in determinate truss by the potential graph	23
3.2 Representing forces in mechanism in dead center positions by the flow graph	25

3.3 Displacement Method for deriving Dead Center Positions of Mechanism	26
3.3.1 Duality Relation between Forces in Dead Center Positions of Mechanism and Displacements in Truss	26
3.3.2 Description of the Method	30
3.3.3 Additional Explanations about the Displacement Method from Statics	32
3.3.3.1 The Relation between Displacements of the Truss and its Unstable Configurations	32
3.3.3.2 Relation between the Proposed Method and the Conjugate Beam Method	35
3.3.4 Proof of the Correspondence between all Existing Dead Center Positions of Mechanisms and the Displacements of the Dual Truss	37
3.3.5 The Difference between various Dead Center Positions of Mechanisms	37
3.4 Summary of Displacement Method	39
<u>Chapter 4: The Face Force method and its properties</u>	40
4.1 Description of the Face Force	40
4.1.1 Face Forces in Truss Correspond to the Linear Velocities of Joints in the Dual Mechanism	40
4.1.2 The Face Force is a Multidimensional Expansion of the Mesh Current in Electrical Networks	42
4.2 Description of the Equipomental Line and the Equipomental Line Diagram	43
4.2.1 Equipomental Line - EML	43
4.2.2 Equipomental Line Diagram - EMLD	45
<u>Chapter 5: Deriving the Dead Center Positions of Mechanism through The Face Force Method</u>	50

5.1 Movement (Potential) of a Joint in the Dual Truss Corresponds to Face Force (Flow) in Mechanism in its Dead Center Position	51
5.2 Definition of Legal Configuration of Faces for the Face Force Method	52
5.3 Characterization of the Geometrical Relations in Mechanism in Dead Center Position	53
5.3.1 Building EquiMomental Line Diagram (EMLD) of Mechanism	53
5.3.2 Conditions of Parallel Links	54
5.3.3 Conditions for Intersection of Lines of Three Links at One Point	55
5.3.4 Conditions for Three or More Points to be on One Line	56
5.3.5 Deriving the Direction of Force Activated by the Input Link	57
5.4 Face Force Method for Deriving Dead Center Positions of Mechanisms	58
5.5 The proof for the uniqueness solution provided by the method	58
5.6 Examples of Applying the Method	59
Example 1 – Four Link Mechanism	59
Example 2 – Two Dyad Mechanism	60
Example 3 – Watt II Mechanism	67
5.7 Reducing the Number of Configurations to be Checked	77
5.8 Examples of Applying the Method to Minimal Number of Configurations	80
Example 4 – Stephenson II Mechanism	80
Example 5 – Stephenson III Mechanism	88
Example 6 – Watt I Mechanism	95
Example 7 – Stephenson I Mechanism	102
Example 8 – Double Butterfly Mechanism	106
<u>Chapter 6: Summary, Conclusions and Further Research</u>	<u>112</u>
6.1 Summary	112
6.2 Conclusions and Further Research	113

Appendices **115**

Appendix A – Definitions from Mechanism and Machine Theory 115

Appendix B – Method of Yan and Wu for Finding Dead Center Configurations
of Mechanism 118

References **128**

Abstract

The aim of the thesis was to develop a computerizable method for finding the dead center positions of linkages of the given topology. Two new methods for this purpose have been developed, both founded on the graph theory duality principle projected on engineering to yield a duality relation between linkages and trusses that was first reported in 2001. According to this relation, for each plane linkage there exists a corresponding dual truss and vice versa, so that the forces in the rods of the truss correspond to the relative linear velocities of the links in the dual linkage. In the thesis this relation has been expanded to establish and employ an additional relation that exists between the two engineering systems and states that the relative displacements in the truss correspond to the forces in the dual linkages.

The first method reported in the thesis is termed 'displacement method', based on this new duality relation in which the relative displacements of the truss rods define the configuration of the dual linkage in which it can sustain forces, i.e. a configuration where the dual linkage is in a dead center position.

The second method that was developed in the thesis is based on a new physical variable – Face Force (FF), that was first reported in the literature in 2002, and was revealed through the duality between linkages and trusses. Although it is force variable, FF exhibits properties of electrical potential, a property that was widely employed in the thesis in the purpose of finding the dead center positions. The FF's exist in every static system, and of course, in linkages found in the dead center positions.

This method is applied directly upon the linkage, and the properties of the Face Forces enable to reveal and characterize the topological and geometrical relations that exist in the linkage causing the linkage to be in the dead center position.

One of the advantages of the face force method is that it can easily be computerized, and since it employs known algorithms from graph theory, it can be applied efficiently for linkages with a high number of links. In addition, a method for reducing the number of configurations to be checked was developed so that the found dead center positions will not include configurations that are the special cases of those that have already been found.

The methods have been tested upon linkages known in the literature, such as the Double Butterfly linkage, known to be difficult in finding its instant centers.

The results obtained in the thesis indicate that these methods have both theoretical and practical contributions. From the practical view, the methods were found to be computerizable and extendable for application in additional engineering fields, such as robotics and others.

From the theoretical view, since the theorems and methods upon which the thesis is based were developed and reported in the last years, it indicates that further achievements are expected to arise from proceeding in this direction.

TEL AVIV UNIVERSITY

The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering

**Deriving Dead Center Positions of Linkages
through the Graph Theory Duality Principle**

A thesis submitted toward the degree of
Master of Science in Mechanical Engineering

by

Irina Polansky

October 2004

TEL AVIV UNIVERSITY

The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering

**Deriving Dead Center Positions of Linkages
through the Graph Theory Duality Principle**

A thesis submitted toward the degree of
Master of Science in Mechanical Engineering

by

Irina Polansky

This research was carried out in the Department of Solid Mechanics, Materials and Systems
under the supervision of Dr. Offer Shai

October, 2004