

אוניברסיטת תל – אביב

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן

היבט כולל על הדואליות בין קינמטיקה וסטטיקה

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסה מכנית

על ידי

פורטנוי סבטלנה

אדר תשס"ח

אוניברסיטת תל – אביב

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן

המחלקה למכניקה, חומרים ומערכות

היבט כולל על הדואליות בין קינמטיקה וסטטיקה

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסה מכנית

על ידי

סבטלנה פורטנוי

העבודה נעשתה במחלקה למכניקה, חומרים ומערכות

בהנחיית ד"ר עופר שי

אדר תשס"ח

תודה רבה מכל הלב

תודה רבה לדר' עופר שי, על המחקר המעניין והחשוב, על הקשבה והבנה, על העידוד והתמיכה ברגעים הקשים ועל האמונה בכוחי לעשות את המחקר בהצלחה.

תודה רבה לחברי קבוצת המחקר: דר' יפית מור, דניאל רובין, ליאור פישביין, דני ליפשיץ, מיכאל ואיתי על העזרה במחקר.

תודה רבה לאריאלה רגב, מזכירת הפקולטה, על הרצון תמיד לעזור.

תודה רבה לבעלי ואדים, על כך שתמיד הייה לצידי, גם ברגעים הטובים בחיינו וגם ברגעים הקשים.

תודה רבה לאימא, אבא וחמותי, על התמיכה והאמונה לאורך כל הדרך. לקחתם על כתפכם את רוב העומס כדי לאפשר לי ללמוד ולהצליח במחקר.

תודה רבה אחרון לבני, יובל, שעם לידתו הוסיף מלא אור ושמחה לחיי.

תקציר

הנושא דואליות דווח לראשונה בספרות ב-1864 על ידי Maxwell שגילה כי, לכל מסבך בסטטיקה קיים מסבך אחר בסטטיקה, שנקרא reciprocal כאשר אורך מוט בראשון מתאים לגודל הכוח במוט המתאים ב-reciprocal ולהפך. מאז התגלו ופותחו סוגים רבים של דואליות בתחומים שונים, כגון דואליות אלגברית, דואליות בתיאורית הבורג, עבודות של קבוצת Structural Topology ועוד, כאשר קבוצה זו דווחה על דואליות בין מערכות בסטטיקה לקינמטיקה באמצעות גיאומטריה פרויקטיבית. בעשור האחרון, באופן בלתי תלוי, פותחה דואליות בין מבנים בסטטיקה ומערכות קינמטיות כאשר התשתית המתמטית כולה הינה על טהרת תורת הגרפים. בתזה יחקרו שני דואליות שהתקבלו על בסיס תורת הגרפים: דואליות בין מסבכים ומכניזמים ודואליות בין pillar systems ומכניזמים עם הקשר לעבודות אחרות שדווחו.

בתזה התגלה כי, קיים קשר בין הדואליות של מסבכים ומכניזמים ו-reciprocal של Maxwell, כמו כן התגלה אפיון חדש לכל הטופולוגיות של המבנים אשר עליהם ניתן לבצע reciprocal. התברר, כי אלו מבנים מיוחדים שדווחו בספרות הרוסית וידועים בשם מבני Assur. הקשר בין הדואליות השונות הוביל לתוצאות מעניינות בתזה. למשל, מהדואליות בין מסבכים ומכניזמים התקבלו ישויות פיזיקליות חדשות בתחום של סטטיקה, כגון: קו שווה מומנט וכוח בפאה ועל בסיס הקשר ש-Maxwell גילה בין פאונים מרחביים ו-reciprocal התברר על קיום משמעות גיאומטרית של קווים שווי מומנט וכוח בפאה, כאשר האחרונים הם ישויות פיזיקליות הדואליות למרכזי סיבובי רגועים ומהירויות מוחלטות בקינטיקה, בהתאמה. בנוסף, על בסיס שיטת Bow's notation הידועה בספרות, הורחבה הדואליות בין מסבכים ומכניזמים וכעת היא אינה מוגבלת רק לגרפים מישוריים, לכן שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים במכניזמים תקפה כעת גם למכניזמים לא מישוריים. בתזה התברר גם, כי שיטות שפותחו על-ידי מתמטיקאים שחקרו את עבודותיו של Maxwell תואמות את שיטות שידועות בקהילת המכניזמים. למשל, שיטת parallel drawing הינה למעשה שיטת בבואת מהירות (image velocity) הידועה בתורת המכונות.

דואליות נוספת המבוססת על תורת הגרפים שנחקרה בתזה היא בין pillar systems ומכניזמים והתגלה על קיום קשר הדוק בינה לבין הדואליות מגיאומטריה פרויקטיבית, אשר נעשה בה שימוש נרחב בתורת הבורג. גם פה, המבט הכולל על הדואליות הוביל לקבלת תוצאות חדשות, כגון: כוח בפאה ב-pillar systems.

לסיכום, הראיה הכוללת על הדואליות הובילה ל: הבנה כוללת, גילוי קשרים חדשים בין העבודות השונות שנעשו בתחום, קבלת משמעויות חדשות לתוצאות שהתקבלו בעבר, והרחבת שיטות וטכניקות שפותחו. יתרה מזאת, התברר כי למערכות סטטיות משולבות קינמטיות, כמו: מבני tensegrity נפרשים, גישות שנחקרו בתזה מצליחות לתת נקודה מבט משולבת הן על הסטטיקה (בזמן פרישה) והן על הקינמטיקה (בזמן ההתקפלות).

תוכן העניינים

viii	רשימת סימונים
x	רשימת איורים
xiv	רשימת טבלאות

פרק 1: מבוא

1	1.1 הקדמה
3	1.2 שימושים מעשיים בסוגי הדואליות שונים
	1.2.1 מציאת מצבים מתים של מכניזמים באמצעות עקרון הדואליות בתורת הגרפים
3	1.2.2 מציאת מצבים סינגולריים של מכניזמים מישוריים מקבילים באמצעות עקרון ה-reciprocal
3	1.2.3 בדיקה האם מסבך הוא היטל של פאון מרחבי באמצעות עקרון הדואליות בין מסבכים ומכניזמים
4	1.3 מטרת המחקר

פרק 2: דיאגרמת Maxwell כהיטל של פאון ודואליות

5	2.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
7	2.2 דיאגרמת Maxwell (reciprocal)
	2.2.1 בנייה של reciprocal למסבך שפועל בו מאמץ עצמי
8	2.2.2 דיאגרמת reciprocal ומבני Assur
10	2.2.3 שלבי הבנייה של ה-reciprocal
11	2.2.4 דוגמה לבניית ה-reciprocal
13	2.2.5 התכונות המיוחדות של ה-reciprocal
13	2.3 בנייה של reciprocal למסבך שפועל עליו כוח חיצוני
13	2.3.1 שלבי בניה של reciprocal למסבך עם כוח חיצוני
13	2.3.2 דוגמה לבניית reciprocal למסבך עם כוח חיצוני
14	2.4 מקרים שונים של reciprocal
	2.5 מבנה עם מאמץ עצמי ו-reciprocal כהיטל של פאון כדורי ופאון דואלי, בהתאמה
16	2.5.1 בניית פאון כדורי למבנה עם מאמץ עצמי
18	2.5.2 שלבי בנייה של reciprocal מפאון מרחבי
19	2.5.3 reciprocal והיטל של פאון דואלי
	2.6 קשר בין הכוחות הפועלים במסבך ללא סמכים, צלעות של פאון

20	וקשתות של היטל מישורי
	2.6.1 סוג של צלע בפאון כתלות בזווית הפנימית בין שתי הפאות
20	שהיא מפרידה
20	2.6.2 סוג של קשת בהיטל המישורי של הפאון כתלות במיקום שלה
	2.6.3 סוג של כוח במוט של מסבך ללא סמכים כתלות בסוג הצלע בפאון
21	וסוג הקשת בהיטל
22	2.6.4 קשר דואלי בין כוחות במסבך ללא סמכים וכוחות ב-reciprocal
23	2.7 סיכום הפרק

פרק 3: דואליות בין מסבכים ומכניזמים על בסיס דואליות בין גרף זרימות FGR

24	וגרף פוטנציאלים PGR
24	3.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
26	3.2 גרף זרימות וייצוג מסבכים באמצעות
26	3.2.1 גרף זרימות Flow Graph Representation
27	3.2.2 ייצוג של מסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות
27	3.2.3 שלבי הבנייה של גרף הזרימות למסבך
28	3.2.4 דוגמה לבניית טופולוגיה של גרף הזרימות למסבך
28	3.3 גרף פוטנציאלים וייצוג מכניזמים באמצעות
28	3.3.1 גרף הפוטנציאלים Potential Graph Representation
	3.3.2 ייצוג של מכניזם בעל דרגת חופש אחת באמצעות גרף
29	הפוטנציאלים
29	3.3.3 שלבי בניית גרף הפוטנציאלים עבור מכניזם
29	3.3.4 דוגמה לבניית הטופולוגיה של גרף הפוטנציאלים עבור מכניזם
	3.4 דואליות בין מסבכים ומכניזמים על בסיס דואליות בין גרף זרימות
30	וגרף פוטנציאלים
30	3.4.1 גרף דואלי
30	3.4.2 קשר בין גרף פרימלי לבין גרף דואלי
31	3.4.3 שלבים לבניית הגרף הדואלי לגרף לא מכוון
31	3.4.4 דוגמה לבניית גרף דואלי
31	3.4.5 דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים
	3.4.6 דואליות בין מסבכים מסוימים סטטית ומכניזמים בעלי דרגת
32	חופש אחת
32	3.4.7 שלבים לבניית מכניזם דואלי ממסבך
33	3.4.8 דוגמה לקבלת מכניזם דואלי ממסבך
33	3.5 כוחות בפאה וקווים שווי מומנט

33	face force כוח בפאה 3.5.1
34	3.5.2 קשר בין כוחות במסבך ומהירויות יחסיות במכניזם הדואלי
35	3.5.3 קווים שווי מומנט
37	3.6 סיכום הפרק
38	<u>פרק 4: קשר בין דואליות של מסבכים ומכניזמים לדיאגרמת reciprocal</u>
38	4.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
40	4.2 קבלת מכניזם דואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
	4.2.1 שלבי בניית המכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
40	4.2.2 דוגמה 1 לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
40	4.2.3 דוגמה 2 לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
43	דיאגרמת reciprocal
45	4.3 קבלת מסבך דואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
	4.3.1 שלבי בניית המסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
45	4.3.2 דוגמה 1 לקבלת מסבך דואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
46	4.3.3 דוגמה 2 לקבלת מסבך דואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
49	דיאגרמת reciprocal
51	4.4 סיכום הפרק
52	<u>פרק 5: Parallel drawing והדואליות</u>
52	5.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
54	parallel drawing 5.2
55	5.2.1 שלבי הבנייה של ה-parallel drawing
56	5.2.2 דוגמה לבנייה של ה-parallel drawing
58	5.3 הקשר בין ה- parallel drawing ובבואת המהירויות
59	5.4 הקשר בין דיאגרמת ה-reciprocal וה- parallel drawing
61	5.5 הקשר בין ה- parallel drawing לדואליות בין מסבכים ומכניזמים
62	5.6 parallel drawing ומבני Assur
63	5.7 סיכום הפרק

64	6.1 שיטת Bow's notation והדואליות בין מסבכים ומכניזמים
64	6.1.1 שיטת Bow's notation
64	6.1.2 שיטה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי
64	באמצעות Bow's notation
66	6.1.3 דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי
66	באמצעות Bow's notation
67	6.2 הרחבת שיטת הכוח בפאה במכניזמים לא מישוריים

פרק 7: דואליות בין pillar systems ומכניזמים על בסיס דואליות

בין גרף זרימות קווי FLGR וגרף פוטנציאלים קווי PLGR

69	7.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
71	7.2 גרף זרימות קווי וייצוג ה-pillar system באמצעותו
71	7.2.1 גרף זרימות קווי Flow Line Graph Representation
71	7.2.2 ייצוג ה-pillar system באמצעות גרף זרימות קווי
71	7.2.3 שלבי בניית גרף הזרימות הקווי ל-pillar system
72	7.2.4 דוגמה לבניית טופולוגית גרף הזרימות הקווי ל-pillar system
72	7.3 גרף פוטנציאלים קווי וייצוג מכניזם באמצעותו
72	7.3.1 גרף פוטנציאלים קווי Potential Line Graph Representation
72	7.3.2 ייצוג מכניזם באמצעות גרף פוטנציאלים קווי
73	7.3.3 שלבי בניית גרף הפוטנציאלים הקווי למכניזם
73	7.3.4 דוגמה לבניית טופולוגית גרף הפוטנציאלים הקווי למכניזם
73	7.4 הדואליות בין ה-pillar systems ומכניזמים על בסיס הדואליות
73	בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי
73	7.4.1 דואליות בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי
74	7.4.2 דואליות בין ה-pillar systems ומכניזמים
74	7.4.3 כוח בפאה ו-pillar system
75	7.4.4 קשרים דואלים נוספים בין מכניזמים ו-pillar systems
75	7.4.5 שלבים לבניית pillar system דואלי ממכניזם
76	7.4.6 דוגמה לבניית pillar system דואלי ממכניזם
77	7.5 סיכום הפרק

78	8.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
----	--

80	8.2 סקירת השיטה הידועה למציאת מרכזי סיבוב רגועים במערכת קינמטית
80	8.2.1 שלבים למציאת מרכזי סיבוב רגועים
80	8.2.2 דוגמה למציאת מרכזי סיבוב רגועים
83	8.3 הדואליות בין מרכזי הסיבוב הרגועים וקווים שווי המומנט
84	8.4 שיטה למציאת קווים שווי מומנט במערכת סטטית
84	8.4.1 שלבים למציאת קווים שווי מומנט
84	8.4.2 דוגמה למציאת קווים שווי מומנט ב-pillar system
86	8.5 סיכום הפרק

פרק 9: פרוש גיאומטרי תלת מימדי לקו שווה מומנט

87 (דואלי של מס"ר בקינמטיקה)

87	9.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
89	9.2 סקירת השיטת cross-section לבדיקת נכונותו של היטל הפאון המרחבי
89	9.2.1 שלבי בניית ה-cross-section
91	9.2.2 דוגמה לבניית ה-cross-section
94	9.3 זהות בין דיאגרמת cross-section וקווים שווי מומנט
95	9.4 משמעות קו שווה המומנט בפאון וב-line drawing שנבנה על ההיטל
97	9.5 קשר בין מעגל קנדי דואלי, קווים שווי מומנט במסבך ללא סמכים ופאון
98	9.6 קשר בין מרכזי סיבוב רגועים, קווים שווי מומנט ופאון
99	9.7 סיכום הפרק

פרק 10: המשתנה הדואלי לכוח בפאה בדואליות בין FLGR

100 ו-PLGR על בסיס הדואליות הקיימת בגיאומטריה פרויקטיבית

100	10.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה
102	10.2 דואליות בין מסבכים ללא סמכים ומבנים הבנויים מלוחות וצירים
102	10.2.1 סטטיקה של מסבכים ללא סמכים בגיאומטריה הפרויקטיבית
102	10.2.2 קבלת פאון ממסבך ללא סמכים
103	10.2.3 קינמטיקה רגועית של מבנה הבנוי מלוחות וצירים בגיאומטריה הפרויקטיבית
104	10.2.4 קבלת פאון ממבנה הבנוי מלוחות וצירים
105	10.2.5 דואליות בין מסבכים ללא סמכים ומבנים הבנויים מלוחות וצירים בגיאומטריה פרויקטיבית
107	10.3 המשתנה הדואלי לכוח בפאה בדואליות בין FLGR ו-PLGR
109	10.4 סיכום הפרק

פרק 11: הדואליות בין FLGR ו-PLGR מההיבט של תיאורית הבורג

110	11.1	קינמטיקה וסטטיקה מההיבט של תיאורית הבורג
	11.1.1	הצגת מערכת קינמטית בתיאורית הבורג
	11.1.2	הצגת מערכת סטטית בתיאורית הבורג
	11.2	הקשר הדואלי בין גרף הזרימות הקווי וגרף הפוטנציאלים הקווי לדואליות
114		בין Twist ו-Wrench

פרק 12: סיכום, מסקנות והמשך המחקר

115	12.1	סיכום
116	12.2	מסקנות והמשך המחקר

מקורות

117

רשימת סימונים

		<u>אותיות</u>
	$F(e)$	גרף G
ערך הזרימה בקשת		
זרימות בקשתות של גרף	\vec{F}	מספר קשתות בגרף או מספר מוטות במבנה e
זרימה בפאה של גרף	f	
פוטנציאל בצומת	π_i	קבוצת קשתות בגרף E
הפרש הפוטנציאלים בקשת	$\Delta(e)$	מספר צמתים בגרף או מבנה v
הפרשי הפוטנציאלים בקשתות של גרף	$\bar{\Delta}$	קבוצת צמתים בגרף V
כוח חיצוני הפועל על מבנה	\vec{P}	מספר פאות בגרף או במערכת סטטית f
כוח ריאקציה הפועל בצומת של מבנה	\vec{R}_E	צומת ראש של קשת h
כוח במערכת Wrench	\vec{R}	צומת זנב של קשת t
כוח שקול במערכת סטטית	\vec{R}'	קבוצת פאות בגרף F
מומנט שקול במערכת סטטית	\vec{T}'	מסבך T
פסיעה במערכת Wrench	h	מסבך ללא סמכים S
מהירות זוויתית שקולה במערכת קינמטית	$\vec{\Omega}'$	קבוצת מפרקים במבנה J
מהירות קווית שקולה במערכת קינמטית	\vec{V}'	קבוצת מוטות במבנה B
מהירות זוויתית במערכת Twist	$\vec{\Omega}$	מספר חוליות במכניזם n
מהירות קווית במערכת Twist	$\vec{\tau}$	reciprocal $r(T)$
כוח בפאה	h_T	מספר קווים ב-reciprocal e^*
מהירות של צומת	\vec{V}_A	מספר פאות ב-reciprocal f^*
מהירות יחסית של חוליה	$\vec{V}_{A/B}$	גרף הדואלי G^*
מומנט שכוח בפאה יוצר על קו שווה מומנט	$\vec{M}_F(m_{j,k})$	מספר קשתות בגרף הדואלי או מספר מוטות במבנה הדואלי e'
מרכז סיבוב רגעי יחסי לשתי חוליות	$I_{i,j}$	מבנה מלוחות וצירים S^*
מספר מרכזי סיבוב הרגעיים	N_{i-c}	קבוצת לוחות במבנה P
קו שווה מומנט לשני כוחות	$m_{i,j}$	קבוצת זוגות של extensors A
מהירות קווית מוחלטת של מרכז	$\vec{V}_{I_{j,k}}$	נקודה במרחב פרויקטיבי a_i
סיבוב רגעי		קואורדינטה של נקודה במרחב פרויקטיבי a_{ij}
		קו המחבר בין שני קודקודים במבנה $a_i a_j$
		זוג extensors או ציר במבנה מלוחות L_{km}
		וצירים המפריד בין שתי פאות
		מטריצת החתכים \vec{Q}
		מטריצת המעגלים של גרף \vec{B}



איורים בגרף

צומת



צומת ייחוס



מקור זרימה



מקור הפרש פוטנציאלים

סימונים וקיצורים

FGR ייצוג באמצעות גרף זרימות

(Flow Graph Representation)

PGR ייצוג באמצעות גרף פוטנציאלים

(Potential Graph Representation)

LGR ייצוג באמצעות גרף קווי

(Line Graph Representation)

FLGR ייצוג באמצעות גרף זרימות קווי

(Flow Line Graph Representation)

PLGR ייצוג באמצעות גרף פוטנציאלים קווי

(Potential Line Graph Representation)

MLG גרף פעולה של מכניזם

(Mechanism Line of Action)

$\vec{V}_i(I_{j,k})$ מהירות של חוליה במרכז סיבוב רגעי

N_{e-1} מספר קווי שווי המומנט

\vec{p}_i מיקום צומת במבנה

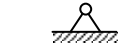
\vec{u}_i מחבר בין צומת

(I, II) קו חיתוך בין שני קווים

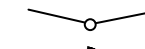
I, II, III נקודת חיתוך של שלושה קווים

איורים במבנה

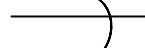
חוליה במכניזם או מוט במסבך



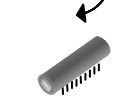
סמך ניח



חיבור צירי



חולייה מניעה במכניזם



מפרק ניח



מפרק סיבובי



מפרק פריזמטי

רשימת איורים וטבלאות

עמוד	מס' איור
6	איור 2.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 2
8	איור 2.2: דוגמה למבנה Assur ומבנה שאינו Assur
9	איור 2.3: דוגמה למבנה Assur מכווץ ומבנה Assur מקורי ממנו הוא התקבל
9	איור 2.4: הפיכת מבנה Assur שנמצא במצב סינגולרי למבנה Assur מכווץ
10	איור 2.5: סוגים של צמתים מדרגה שלוש והפאות המתאימות להם ב-reciprocal
12	איור 2.6: דוגמה לבניית דיאגרמת reciprocal למסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי
14	איור 2.7: דוגמה להפיכת מסבך עם כוח חיצוני למסבך ללא סמכים עם מאמץ עצמי
15	איור 2.8: תיאור מקרה ראשון של מבנה שבו מספר פאות שווה למספר צמתים, ודיאגרמת reciprocal המתאימה לו
15	איור 2.9: תיאור מקרה שני של מבנה שבו מספר צמתים גדול ממספר פאות
18	איור 2.10: תיאור בניית פאונים למקרים שונים של מבנים עם מאמץ עצמי
19	איור 2.11: תיאור קבלת דיאגרמת reciprocal מפאון מרחבי
19	איור 2.12: תיאור הקשר בין פאון מקורי, היטל של פאון, דיאגרמת reciprocal ופאון דואלי
20	איור 2.13: תיאור הקשר בין סוג של צלע בפאון לבין זווית פנימית בין שתי פאות
20	איור 2.14: תיאור הקשר בין סוג של קשת בהיטל של פאון לבין מיקום שלה ביחס לשתי פאות שהיא מפרידה
21	איור 2.15: תיאור הטראזדר וכוחות שמתקבלים במסבך ללא סמכים שנבנה על היטל מישורי שלו
21	איור 2.16: תיאור כוחות הפועלים במסבך ללא סמכים שנבנה על היטל מישורי של פאון עם חיתוך עצמי
22	איור 2.17: תיאור הקשר דואלי בין כוחות שפועלים במוטות של מסבך ללא סמכים וכוחות שפועלים במוטות מתאימים של reciprocal
23	איור 2.18: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 2
25	איור 3.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 3
26	איור 3.2: חישוב ערך הזרימה בקשת
28	איור 3.3: דוגמה לתיאור שלבי בניית גרף הזרימות
28	איור 3.4: חישוב ערך הפרש הפוטנציאלים בקשת
30	איור 3.5: תיאור מכניזם בעל דרגת חופש אחת וגרף פוטנציאלים מתאים לו
31	איור 3.6: דוגמה לבניית גרף דואלי

- 32 איור 3.7: תיאור המסבך מסוים סטטי והמכניזם הדואלי לו
- 33 איור 3.8: דוגמה לקבלת מכניזם בעל דרגת חופש אחת ממסבך מסוים סטטי על בסיס
דואליות בתורת הגרפים
- 34 איור 3.9: מציאת כוח במוט על ידי הפרש בין כוחות בפאות הסמוכות לאותו מוט
- 34 איור 3.10: דואליות בין מהירויות ליניאריות מוחלטות של צמתים במכניזם
וכוחות בפאות המתאימות במסבך הדואלי
- 34 איור 3.11: תיאור הקשר בין כוח שפועל במוט של המסבך ומהירות יחסית של החוליה
במכניזם הדואלי
- 35 איור 3.12: קבלת קו שווה מומנט $m_{1,2}$ לשני כוחות \vec{f}_1 ו- \vec{f}_2 הפועלים לאורך
קווים l_1 ו- l_2 , בהתאמה
- 36 איור 3.13: תיאור הקו שווה מומנט המוחלט והקו שווה מומנט היחסי
- 36 איור 3.14: תיאור הקווים שווי מומנט במסבך
- 37 איור 3.15: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 3
- 39 איור 4.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 4
- 41 איור 4.2: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
- 42 איור 4.3: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי ממסבך על בסיס הדואליות
בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים
- 42 איור 4.4: תיאור המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון ופאון דואלי
- 43 איור 4.5: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal
- 44 איור 4.6: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך על בסיס הדואליות
בין גרף הזרימות לגרף הפוטנציאלים
- 45 איור 4.7: תיאור המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון ופאון דואלי
- 47 איור 4.8: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
- 48 איור 4.9: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם על בסיס הדואליות בין גרף
זרימות לגרף פוטנציאלים
- 48 איור 4.10: תיאור המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון ופאון דואלי
- 49 איור 4.11: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal
- 50 איור 4.12: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם על בסיס הדואליות
בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים
- 50 איור 4.13: תיאור המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון ופאון דואלי
- 51 איור 4.14: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 4
- 53 איור 5.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 5
- 55 איור 5.2: תיאור הסוגים השונים של parallel drawing

57	איור 5.3: תיאור השלבים של בניית parallel drawing וקבלת מהירויות של צמתים עבור מבנה נתון
59	איור 5.4: תיאור השלבים לקבלת בבואת מהירויות מוקטורי מיקום חדשים של הצמתים שקיבלנו מ-parallel drawing
60	איור 5.5: תיאור הקשר בין המהירויות הקוויות היחסיות ב-parallel drawing לכוחות במוטות של דיאגרמת reciprocal
60	איור 5.6: תיאור הקשר בין המהירויות של הצמתים ב-parallel drawing לכוחות בפאות של דיאגרמת reciprocal
61	איור 5.7: תיאור הקשר בין parallel drawing והדואליות בין מסבכים ומכניזמים
62	איור 5.8: דוגמה לקבלת parallel drawing ו-reciprocal לקבוצת Assur טריאדה במצבה הסינגולרי
63	איור 5.9: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 5
64	איור 6.1: דוגמה להפעלת השיטה Bow's notation
65	איור 6.2: דוגמה לקבלת מכניזמים הדואלים למסבך המקורי ולמסבך האקוויוולנטי
66	איור 6.3: שלבים לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי
67	איור 6.4: דוגמה למציאת מצב סינגולרי למכניזם לא מישורי באמצעות שיטת הכוח בפאה המורחבת
70	איור 7.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 7
72	איור 7.2: pillar system וגרף זרימות קווי המתאים לו
73	איור 7.3: מכניזם וגרף פוטנציאלים קווי המתאים לו
74	איור 7.4: pillar system ומכניזם דואלים
76	איור 7.5: דוגמה לקבלת pillar system ממכניזם על בסיס הדואליות בתורת הגרפים
77	איור 7.6: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 7
79	איור 8.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 8
82	איור 8.2: דוגמה למציאת מרכזי סיבוב רגועים במכניזם
85	איור 8.3: דוגמה למציאת קווים שווי מומנט במסבך
86	איור 8.4: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 8
88	איור 9.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 9
89	איור 9.2: קו חיתוך בין פאות סמוכות
90	איור 9.3: מציאת קו חיתוך בין פאות IV ו-0 שלא סמוכות
90	איור 9.4: מציאת נקודת חיתוך בין שלוש פאות I, II ו-III שלא כולן סמוכות

- 91 איור 9.5: בדיקה שקו חיתוך בין פאות I ו-IV, שלא קו אלא נקודה מפרידה
 ביניהן, חותך את שתייהן רק בנקודת חיתוך שלהן
- 91 איור 9.6: תיאור של line drawing
- 91 איור 9.7: סימון קווים מ-1 עד 1 של line drawing
- 92 איור 9.8: סימון פאות מ-0 עד V של line drawing
- 92 איור 9.9: סימון קווי חיתוך בין פאות סמוכות. קו 1 מפריד בין פאות V ו-0,
 לכן נסמן אותו ב-(V,0)
- 92 איור 9.10: מציאת קווי חיתוך בין פאות לא סמוכות. קווי חיתוך
 (IV,0), (III,V), (II,V) ו-(I,III) מפרידים בין פאות לא סמוכות
- 93 איור 9.11: מציאת נקודות חיתוך בין כל שלוש פאות שלא כולן סמוכות
 איור 9.12: בדיקת קווי חיתוך בין פאות שצומת מפרידה ביניהן.
 קווי חיתוך (III,V) ו-(IV,0) חותכות את הפאות שהן מפרידות ביניהן
- 93 אך ורק בנקודת החיתוך בין אותן פאות
- 94 איור 9.13: פאון המתאים ל-line drawing הנתון באיור 9.5
- 99 איור 9.14: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 9
- 101 איור 10.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 10
- איור 10.2: המומנטים שנוצרים במפרקים של המסבך ללא סמכים כתוצאה מהכוחות
 בפאות
- 103 איור 10.3: הפאון המרחבי שהתקבל לאחר חיבור בין הנקודות בקצוות של המומנטים
- 104 איור 10.4: קבלת המהירויות הקוויות של הנקודות במבנה הבנוי מלוחות וצירים
- 104 איור 10.5: הפאון שהתקבל לאחר העלאת הנקודות
- איור 10.6: הגדרת צלע $a_i a_j$ על ידי $(k, m; i, j)$, כאשר הצלע הזו מחברת בין קודקודים
 a_i ו- a_j ומפרידה בין שתי פאות F_k ו- F_m
- 105 איור 10.7: הפאון וההיטל המתאים לו, כאשר פעם אחת אנו מסתכלים עליו
 כעל מערכת הבנויה ממוטות ומפרקים ופעם שנייה כעל מבנה הבנוי
 מלוחות שמחוברות על ידי צירים
- 106 איור 10.8: תיאור כי הכוחות הפועלים במוטות של המסבך ללא סמכים מתאימים
 למהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות בצירים של המבנה הדואלי
 הבנוי מלוחות
- 106 איור 10.9: תיאור כי הכוחות בפאות של המסבך ללא סמכים מתאימים
 למהירויות זוויתיות מוחלטות במבנה הדואלי הבנוי מלוחות
- איור 10.10: תיאור הקשר בין המהירויות הקוויות של הנקודות שמתקבלות
 כתוצאה מ-lifting של המבנה והמומנטים שנוצרים בנקודות של המסבך
 ללא סמכים כתוצאה מפעולת הכוחות בפאות
- 108

- 109 איור 10.11 : תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 10
- איור 11.1 : דוגמה לזרוע של רובוט טורי עם מהירויות זוויתיות יחסיות במפרקים סיבוביים וכדוריים ומהירויות קוויות יחסיות במפרקים פריזמטיים
- 110 איור 11.2 : סכימה למציאת מערכת Twist, כלומר $\$_r$ instantaneous screw axis, מהירות זוויתית הפועלת לאורך ציר זה $\bar{\Omega}$ ומהירות ליניארית הפועלת בכיוון של הציר \bar{t} בהינתן מערכת של מהירות זוויתית $\bar{\Omega}'$ ומהירות ליניארית \bar{V}' שקולות
- 112 איור 11.3 : דוגמה לגוף קשיח שפועלים עליו מערכת של n כוחות ומומנטים
- 112 איור 11.4 : סכימה למציאת מערכת Wrench, כלומר $\$$ screw axis, כוח הפועל לאורך ציר זה \bar{R} ומומנט הפועל בכיוון של הציר \bar{T} בהינתן מערכת של כוח \bar{R}' ומומנט \bar{T}' שקולים
- 113

מס' טבלה	עמוד
טבלה 3.1 : מציגה את הקשר בין גרף פרימלי וגרף דואלי	30
טבלה 8.1 : טבלה מסכמת את הקשר שקיים בין מרכזים סיבוב רגעיים וקווי שווה מומנט, ומגדירה משפט קנדי הדואלי	83
טבלה 9.1 : תיאור הקשר שקיים בין קווי שווה מומנט, פאון ו-line drawing	95
טבלה 9.2 : תיאור הקשר בין מעגל קנדי דואלי, פאון ומסבך ללא סמכים שנבנה על ההיטל שלו	97
טבלה 9.3 : תיאור הקשר בין מרכזי סיבוב רגעיים, קווים שווי מומנט ופאונים	98
טבלה 11.1 : הקשרים הדואלים בין המערכות Twist ו-Wrench	114

פרק 1

מבוא

1.1 הקדמה

הנושא של דואליות התגלה לראשונה ב-1864 על ידי מדען James Clerk Maxwell. בעבודתו הוא השתמש בכלים מגיאומטריה מרחבית על מנת להוכיח מספר משפטים חשובים שעליהם התבססו מחקרים רבים בעתיד. המשפט הראשון טוען כי, למבנה עם פאות סגורות המכונה בתזה, מסבך ללא סמכים, שפועל בו **מאמץ עצמי** (self-stress) בכל המוטות, ניתן לבנות לפי חוקי גיאומטריה מסוימים מבנה מיוחד שנקרא **reciprocal** (Maxwell, 1864). המבנה המיוחד הזה דואלי למסבך ומתאר את דיאגרמת הכוחות שלו (Cremona, 1890). הוא הוכיח גם את הצד הנגדי של המשפט, שאם למסבך ללא סמכים קיים reciprocal אזי בכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי.

כמה שנים לאחר מכן הוא גילה שיש קשר בין דיאגרמת reciprocal וגוף גיאומטרי מרחבי המכונה **פאון** (polyhedron). Maxwell סיכם את הקשר הזה במשפט שטוען כי, אם מסבך ללא סמכים הוא היטל של פאון מרחבי אזי ניתן לבנות לו reciprocal (Maxwell, 1872). למשפט הזה הוא הניח אך לא הוכיח את הנכונות של הצד הנגדי שטוען כי, אם למסבך ללא סמכים קיים reciprocal אזי הוא היטל של פאון מרחבי. בהנחה שזה נכון, ניתן לסכם את שני המשפטים האלה למשפט אחד שטוען כי, היטל של פאון מרחבי זהו מסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי והכוחות במוטות פרופורציוניים לאורכים של קווים המתאימים ב-reciprocal שהוא היטל של גוף מרחבי אחר שנקרא **פאון דואלי**.

דואליות אלגברית התגלתה על ידי עבודה של שני מתמטיקאים במאה ה-19, שפיתחו הצגה לגיאומטריה פרויקטיבית שנקראה על שם **Grassmann Cayley algebra** (Grassmann, 1844) או (Cayley, 1889-1898) ובשנות ה-70 קבוצה של מדענים הציגו צורה נוחה וקלה יותר להצגה זו (Doubilet et al., 1974). היא מבוססת על שתי פעולות אלגבריות שנקראות **meet** ו-**join**, כאשר פעולת meet מייצגת חיתוך בין שני גורמים ופעולת join מייצגת איחוד. התגלה שהפעולות האלו דואליות.

סוג נוסף של דואליות גילה ב-1876 Robert Stawell Ball לאחר שפיתח תיאוריה שנקראת תיאורית הבורג (Ball, 1900) שמאוחר יותר הורחבה על ידי Waldron (Waldron, 1969), Hunt (Hunt, 1978), Roth (Roth, 1984) ועוד. התיאוריה הזו מתבססת על שני משפטים ידועים. המשפט הראשון מתייחס לתנועה של גוף קשיח וטוען כי, ניתן לתאר אותה על ידי תנועה סיבובית סביב ציר מסוים שנקרא **ציר הבורג הרגעי** (instantaneous screw axis) ותנועת החלקה לאורך אותו ציר (Chasles, 1830). המערכת של תנועה סיבובית סביב הציר הבורג הרגעי ותנועת החלקה לאורכו נקראת **Twist**. המשפט השני מתייחס לכוחות הפועלים על גוף קשיח וטוען כי, כל מערכת כוחות הפועלים על גוף ניתן לתאר על ידי כוח אחד הפועל לאורך ציר מסוים שנקרא **ציר הבורג** (screw axis) וצמד כוחות (מומנט) במישור הניצב לו (Poinsot, 1806). המערכת של כוח לאורך ציר הבורג וצמד במישור הניצב נקראת **Wrench**. ציר הבורג הרגעי של מערכת Twist וציר הבורג של מערכת Wrench נקראים **צירים**

הופכיים (reciprocal screws), אם Wrench שפועל על גוף קשיח אינו יוצר עבודה בזמן שגוף מבצע Twist רגעי (Fang and Tsai, 2004).

עבודתו של Maxwell בתחום הדואליות זכתה מחדש ב-1979 להתעניינות רבה מצד של קבוצת מתמטיקאים ומהנדסי ארכיטקטורה (structural topology group) בקנדה וצרפת וביניהם Walter Whiteley, Henry Crapo, Janos Baracs ועוד. קבוצה זו אף הוציאה ירחון בנושא של טופולוגיה מבנית. הם שהמשיכו והרחיבו את העבודה של Maxwell. לדוגמה, Whiteley ו-Crapo גילו שניתן להתבונן על פאון מרחבי בשני אופנים. פעם אחת ניתן להסתכל על השלד של הצלעות והקודקודים שלו כעל מערכת סטטית שבנויה ממוטות ומפרקים (מסבך ללא סמכים) ופעם שנייה על הפאות והצלעות שלו כעל מערכת קינמטית רגעית שבנויה מלוחות וצירים סיבוביים המקשרים ביניהן (Crapo and Whiteley, 1982). מסתבר שהמערכות האלו דואליות ולצורך הוכחה Whiteley השתמש בהצגת שתי המערכות בעזרת כלים הידועים מגיאומטריה פרויקטיבית ו-Grassmann Cayley algebra (Whiteley, 1982). בניגוד לדואליות של Maxwell שבה מתואר קשר בין שתי מערכות סטטיות מישוריות, מדובר כאן על הדואליות בין מערכת סטטית מישורית ומערכת קינמטית תלת מימדית. יתרה מזאת, Whiteley התבסס על ההצגה של מערכת העשויה מלוחות וצירים על ידי גיאומטריה פרויקטיבית גם כדי להוכיח את הצד הנגדי של המשפט השני של Maxwell, שטוען כי, אם למסבך ללא סמכים קיים reciprocal, אזי הוא היטל של פאון מרחבי (Whiteley, 1982). מהדואליות בין מסבך ללא סמכים ומערכת שבנויה מלוחות וצירים מקבלים כי כוחות הפועלים במערכת הראשונה דואלים לתנועות רגעיות במערכת השנייה. מכאן נובע קשר בין סוגי הכוחות הפועלים במסבך ללא סמכים (לחיצה/מתיחה) לזווית פנימית בין מישורים בפאון (קמורה/קעורה) ולסוג הצלע בהיטל (פנימית/חיצונית).

ב-1986, דווח לראשונה Whiteley כי למסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי בכל המוטות ניתן לבנות מערכת קינמטית המכונה **parallel drawing** (Whiteley, 1986). זוהי דיאגרמה שמציגה מהירויות קוויות יחסיות ומחלטות של המוטות ומפרקים במבנה בהתאמה. התברר שדיאגרמה זו דואלית ל-reciprocal של Maxwell (Whiteley, 1986). הפעם מדובר על דואליות בין מערכת סטטית ומערכת קינמטית מישורית.

בתזה מדווח לראשונה, שכל הסוגים של הדואליות שפורטו לעיל מטפלים בקבוצת מבנים מיוחדים המכונים **מבנים Assur**. מה שמאפיין את המבנה Assur זה שהוא המבנה הפשוט ביותר שלא ניתן לפירוק (Assur, 1952).

באופן בלתי תלוי למחקרים שהוצגו קודם, דווח על בסיס הדואליות מתורת הגרפים וקשר בין ייצוגים גרפים שונים על קיום קשר דואלי בין מסבכים ומכניזמים (Shai, 2001a). בעבודה זו מייצגים מסבך ומכניזם על ידי ייצוג גרפי מתאים ועל סמך הדואליות בין הייצוגים הגרפים מקבלים קשר דואלי בין שתי המערכות המכניות. מהדואליות בין מסבכים למכניזמים מקבלים שכוחות הפועלים במסבך דואלים למהירויות קוויות יחסיות של המכניזם. יתרה מזאת, על בסיס הדואליות הזו התגלו ודווחו לאחרונה בספרות שני משתנים חדשים המכונים כוח בפאה וקו שווה מומנט. כוח בפאה זהו משתנה שמוגדר בכל פאה במסבך והוא דואלי למהירות קווית של צומת מתאימה במכניזם. משתנה נוסף, קו שווה מומנט, שמוגדר לכל זוג כוחות בפאות הפועלים במסבך והוא דואלי למרכז סיבוב רגעי שמוגדר לכל זוג חוליות במכניזם.

קשרים דואלים נוספים בין מערכת סטטית שנקראת **pillar system** ומכניזם וגם בין רובוט מקבילי (לדוגמה Stewart platform) ורובוט טורי (Davidson and Hunt, 2004), הכל על בסיס הדואליות בין הייצוגים הגרפיים, דווחו ב-2003 (Shai, 2003). להבדיל מהדואליות בין מסבכים למכניזמים, הפעם כוחות דואלים למהירויות זוויתיות יחסיות ומומנטים למהירויות קוויות יחסיות.

1.2 שימושים מעשיים בסוגי הדואליות שונים

כעת נראה שמלבד למחקרים תיאורטיים ישנם גם שימושים מעשיים בסוגים השונים של דואליות. חשוב לציין שבשנים אחרונות נושא של דואליות נכנס למגוון רחב של תחומים כגון, הנדסה (Shai, 2001a), ארכיטקטורה (Kurmman, 1998), רפואה (Perry and Arbiser, 2006), ביולוגיה (Oba et al., 1999) ועוד, וזאת כי היא מאפשרת לקחת מערכת בתחום אחד להעביר אותה לתחום אחר וכך לגלות מושגים ומשפטים חדשים ולהשתמש בהם לפיתוח שיטות חדשות. נציג מספר עבודות שהתבססו על סוגי הדואליות שונים.

1.2.1 מציאת מצבים מתים של מכניזמים באמצעות עקרון הדואליות בתורת הגרפים

ב-2005 פותחו שתי שיטות חדשות למציאת כל המצבים המתים (dead centers) הטופולוגיים של מכניזם כלשהו, המבוססות על עקרון הדואליות בין מסבכים ומכניזמים שהתקבל מתורת הגרפים (Shai and Polansky, 2005). השיטה הראשונה נקראת שיטת תזוזות הצמתים. מהדואליות בתורת הגרפים התקבל שלכל מסבך מסוים סטטי קיים מכניזם דואלי ולהיפך, כאשר כוח במוט במסבך מתאים למהירות יחסית של חוליה המתאימה במכניזם הדואלי (Shai, 2001a). פרוט על דואליות זו ניתן לקרוא בסעיף 3.4. על בסיס התשתית מתורת הגרפים התגלה קשר חדש בין תזוזות צמתי המסבך והכוחות הנוצרים במכניזם הדואלי. נשאלת שאלה, מתי יש במכניזם כוחות? התשובה היא, כאשר הוא תקוע. מכאן, פותחה שיטת תזוזות הצמתים, שעל בסיס תזוזות במסבך הדואלי מאתרת את הקונפיגורציות של המכניזם, בהן יש כוחות, דהיינו, הוא במצב מת. השיטה השנייה נקראת שיטת הכוח בפאה. השיטה הזו היא הרחבה של השיטה הראשונה והיא יעילה למציאת המצבים המתים, וכן, מאפשרת לאפיין גיאומטרית את הגורמים או המצב הגיאומטרי של החוליות שגרם למכניזם להיות במצב מת. משתנה **כוח בפאה** (face force) התגלה מחקירת קשר הדואליות בין מסבכים למכניזמים והוא מתאים למהירות קווית של הצומת המתאימה במכניזם הדואלי (Shai, 2002). מצד שני, מכניזם במצב מת מתנהג כמסבך ולכן גם בפאות שלו קיימים כוחות ששקולים לתזוזות של הצמתים המתאימים במסבך הדואלי.

1.2.2 מציאת מצבים סינגולריים של מכניזמים מישוריים מקבילים באמצעות עקרון ה-reciprocal

ב-2006 פותחה על ידי Alon Wolf ו-Amir Degani שיטה חדשה המאפשרת לזהות ולעקוב אחרי מצבים סינגולריים של מכניזמים מישוריים מקבילים (Planar Parallel Manipulators - PPMs) (Wolf and Degani, 2006). בכמה מילים נגדיר מהו מצב סינגולרי של מכניזם. בקונפיגורציה הזו מכניזם נוטה לאבד את קשיחותו בעוד שמקבל דרגת חופש נוספת (Hunt, 1983). באופן מעשי, כאשר מכניזם נמצא בקונפיגורציה סינגולרית, המבנה אינו יכול להתנגד ולאזן את מערכת הכוחות (wrench) המופעלת על הפלטפורמה הנעה, לכן הוא עלול לקרוס. השיטה הזו מבוססת על תיאוריה של Maxwell שמציגה את

הדואליות בין מסבכים ללא סמכים שפועל בהם מאמץ עצמי ודיאגרמת reciprocal. הם השתמשו בכלים מגיאומטריה פרויקטיבית כדי לבנות מבנה גרפי חדש שנקרא **גרף פעולה של מכניזם** (Mechanism's Line of action - MLG). זהו כלי שבעזרתו ניתן ליישם את תיאורית ה-reciprocal של Maxwell על מכניזמים. השיטה בודקת האם ל-MLG המתאים למכניזם ניתן לבנות דיאגרמת reciprocal, אם כן, אזי המכניזם הזה במצב סינגולרי.

1.2.3 בדיקה האם מסבך הוא היטל של פאון מרחבי באמצעות עקרון הדואליות בין מסבכים ומכניזמים

מחקירת הדואליות בין מסבכים למכניזמים התגלה משתנה חדש שנקרא קו שווה מומנט (Shai, 2001a). בתזה הזו פותחה שיטה, המבוססת על תכונותיו הפיזיקליות ופירושו הגיאומטרי של משתנה זה, המאפשרת לבדוק האם מסבך ללא סמכים הוא היטל של פאון מרחבי (פרק 9). מציאת כל קווי שווי המומנט במסבך שמקיימים את משפט קנדי הדואלי, האומר כי לכל שלוש כוחות, שלושת קווי שווי המומנט היחסיים חייבים להיפגש בנקודה אחת, קובעת שהמסבך יציב. אם המסבך יציב ניתן להפעיל בו מאמץ עצמי ולפי תיאורית Maxwell הוא היטל של פאון מרחבי.

1.3 מטרת המחקר

המטרה של העבודה הזו הייתה לחקור סוגים שונים של דואליות והקשרן לדואליות מבוססת תורת הגרפים. המטרה- לראות אם יש קשר בין השיטות, ואם לא מה ההבדל. במידה ויש קשר, אזי להעביר ידע בין שיטות וידע שפותח באחת לשנייה. על בסיס הראייה הכוללת, גם להרחיב את הדואליות על בסיס תורת הגרפים. כיוון שהדואליות שדווחו עוסקות בתחומים הכוללים: סטטיקה, קינמטיקה, פאונים ועוד, אזי באמצעות הראייה המוכללת שמתקבלת במחקר, לאפשר הבנה מעמיקה יותר של הנושאים אלו וכן יכולת להעביר ידע בין התחומים.

פרק 2

דיאגרמת Maxwell כהיטל של פאון ודואליות

המטרה של התזה הייתה לחקור סוגים שונים של דואליות ולהשוות אותם מול הדואליות המבוססת על תורת הגרפים. בפרק הזה נציג קשר דואלי בין מסבך ללא סמכים שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי לבין דיאגרמת הכוחות שלו המכונה reciprocal. נראה שהמסבך ללא סמכים, שפועל עליו מאמץ עצמי, הוא היטל של צורה גיאומטרית מרחבית המכונה פאון וה-reciprocal שלו הוא היטל של פאון דואלי. התגלה, כפי שמדווח בפרק, על קיומו של קשר בין reciprocal וקבוצה של מבנים מיוחדים המכונים מבני Assur.

2.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באיור 2.1 ניתן לראות תרשים זרימה המתאר את הנושאים שיוצגו במהלך פרק 2. הפרק מחולק לשלושה שלבים עיקריים שיפורטו כעת:

שלב א': הפיכת מסבך עם כוחות חיצוניים למסבך ללא סמכים וקבלת reciprocal:

א.1 הפיכת כל הכוחות החיצוניים והריאקציות למוטות מחוברים לאדמה.

א.2 חיבור בין כל הסמכים הנייחים על ידי מוטות לקבלת בסיס קשיח.

א.3 הורדת הסמכים וקבלת מבנה שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי.

כעת ניתן לבנות למבנה דיאגרמת כוחות שנקראת reciprocal. ה-reciprocal הוא מבנה דואלי למבנה המקורי, דהיינו, לכל מוט במבנה המקורי מתאים מוט ב-reciprocal, לכל פאה במבנה המקורי מתאים צומת ב-reciprocal ולהפך.

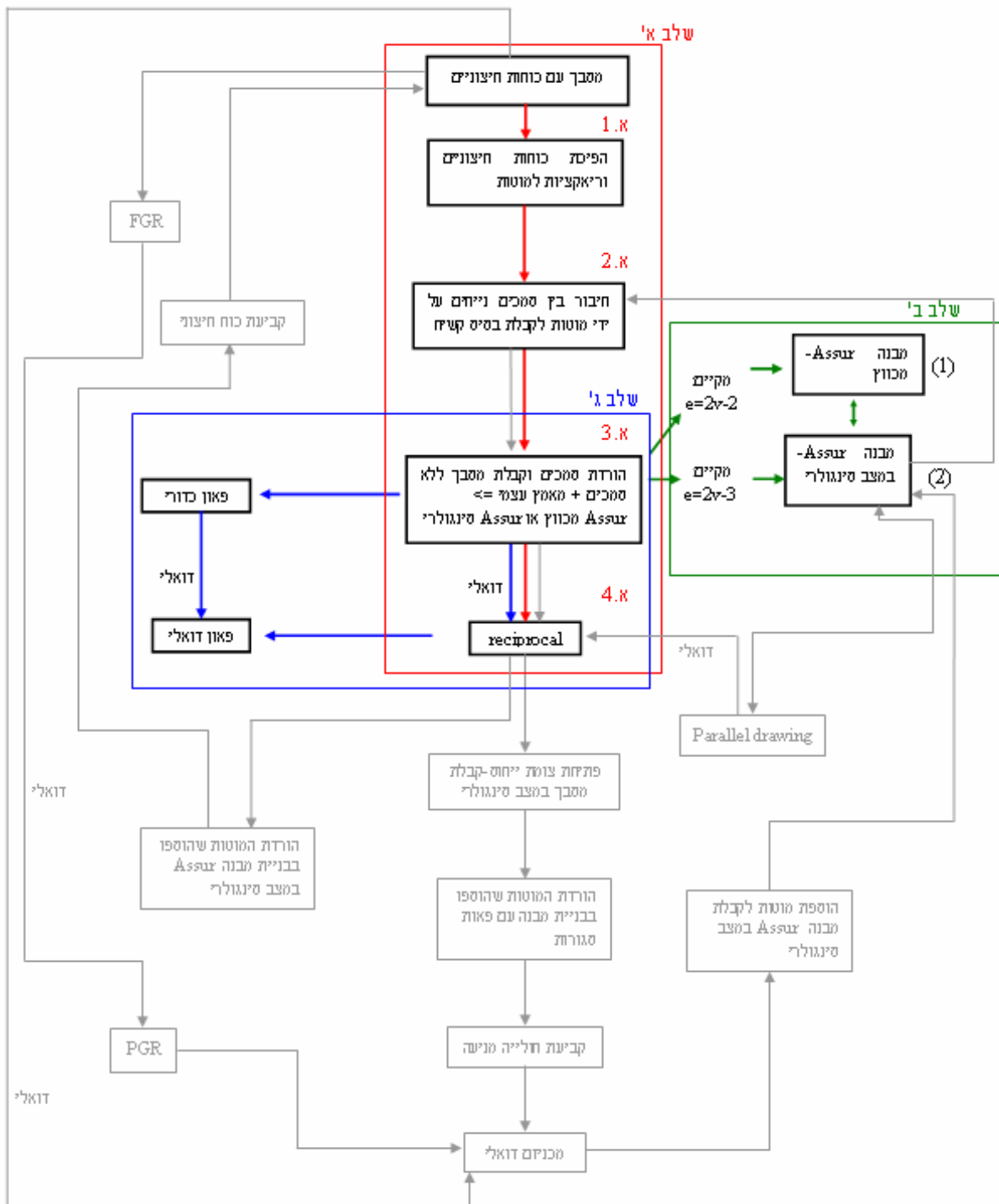
שלב ב': תיאור הקשר בין מבנה שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי וקבוצת מבנים מיוחדים שנקראים מבני Assur, כאשר הם מופיעים באחד משני המצבים הבאים:

1. המבנה שהיחס בין מספר הצמתים והקשתות הוא $e = 2 \cdot v - 2$, מתאים למבנה Assur מכווץ.

2. המבנה שהיחס בין הצמתים והקשתות הוא $e = 2 \cdot v - 3$, מתאים למבנה Assur סינגולרי.

* חשוב לציין שניתן תמיד לעבור ממבנה אחד לאחר ולהפך.

שלב ג': תיאור הקשר בין מבנה בעל גרף מישורי שפועל בו מאמץ עצמי לבין גוף מרחבי הנקרא פאון כדורי. על בסיס הדואליות בין מבנה וה-reciprocal שלו, נראה שהשני הוא היטל של פאון דואלי.



איור 2.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 2

2.2 דיאגרמת Maxwell (reciprocal)

ב-1864 המדען הנודע James Clerk Maxwell גילה, כי ניתן לקבוע אם במסבך פועל מאמץ עצמי על ידי בניית דיאגרמה מתאימה (Maxwell, 1864). דיאגרמה זו נקראת **reciprocal** והיא מתארת את תמונת הכוחות שניתן להפעיל במסבך כך שהוא יישאר בשיווי משקל (Cremona, 1890). מסבך ו-reciprocal שלו נקראים בספרות צורות הופכיות (**reciprocal figures**) (Maxwell, 1864). אם נחליף את הקווים של reciprocal במוטות וצמתים במפרקים, נקבל מבנה שדואלי למסבך המקורי. ל-reciprocal יש את התכונה המעניינת, שבהינתן מסבך T ו-reciprocal שלו $r(T)$, אם נעשה לאחורן הופכי נקבל את המסבך המקורי, דהיינו, $r(r(T))=T$.

2.2.1 בנייה של reciprocal למסבך שפועל בו מאמץ עצמי

לפני שניגש לנושא ה-reciprocal, להלן מספר הגדרות המופיעות בכל ספר בסיסי בתורת הגרפים, כגון (Swamy and Thulasiraman, 1981) שיעשה בהן שימוש בפרק זה.

הגדרה 2.1: אם כל זוג צמתים בגרף מחובר במסלול קשתות, זאת אומרת שמכל צומת i ניתן להגיע לכל צומת j באמצעות הקשתות הקיימות בגרף, הגרף נקרא **גרף קשיר** (connected graph).

הגדרה 2.2: **גרף מישורי** הוא גרף קשיר $G=(V,E)$ שניתן לשרטט אותו על מישור כך שאין חיתוך בין קשתות.

הגדרה 2.3: **גרף מישורי 2 קשיר צמתים** הוא גרף מישורי שבהסרת כל צומת ממנו הגרף עדיין נשאר קשיר, אולם כל הורדת שני צמתים או יותר פוגעת בקשירות הגרף.

הגדרה 2.4: **גרף מישורי 3 קשיר קשתות**: הוא גרף מישורי שבהסרת כל שתי קשתות או פחות ממנו הגרף עדיין נשאר קשיר, אולם הסרת שלוש קשתות או יותר פוגעת בקשירות הגרף.

דיאגרמת Maxwell מטפלת במסבכים הבנויים מפאות סגורות ללא כוח חיצוני, ריאקציות וסמכים, דהיינו, מסבכים שפועל בהם מאמץ עצמי. Maxwell מכנה מבנים אלו בשם **מסגרות** (frameworks)

(Maxwell, 1864), ואילו בתזה מבנים אלו נקראים **מסבכים ללא סמכים**. הגרף המתאים להם הוא גרף מישורי, 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות.

ניתן לחלק את המסבכים הללו לשלוש קבוצות:

1. קבוצה של מסבכים בעלי יתירות סטטית אחת. הגרף המתאים להם מקיים את המשוואה הבאה:

$$e = 2 \cdot v - 2 \quad (2.1)$$

-e מספר הקשתות בגרף.

-v מספר הצמתים.

למסבכים אלו בכל מצב כללי ניתן לבנות את דיאגרמת reciprocal.

2. קבוצה של מסבכים מסוימים סטטית. הגרף המתאים למסבכים אלה מקיים:

$$e = 2 \cdot v - 3 \quad (2.2)$$

אלה מסבכים שניתן לבנות להם דיאגרמת reciprocal אך ורק כאשר הם נמצאים במצב מיוחד.

3. קבוצה של מסבכים בעלי יתירות סטטית גדולה מאחת. במקרה וקיים מבנה בעל יתירות m ($m > 1$), על מנת לבנות לו דיאגרמת reciprocal יש צורך להגדיר לו $m - 1$ תנאים. כלומר, אם המסבך הוא יתר סטטי פעמיים, אזי על מנת לבנות reciprocal מתאים צריך להגדיר לו תנאי אחד.

בהמשך הפרק נפרט על הקבוצות האלו ונציג את הדוגמאות המתאימות. עבור מסבך מישורי, קווים של דיאגרמת reciprocal מציגים את גודל הכוחות הפועלים במסבך זה, כשהוא נמצא בשיווי משקל.

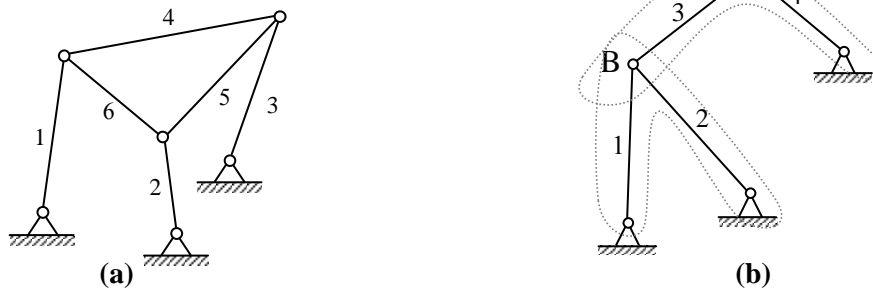
2.2.2 דיאגרמת reciprocal ומבני Assur

בסעיף זה נראה שאם מבנה נתון מקיים $e = 2 \cdot v - 2$ או $e = 2 \cdot v - 3$ וניתן לבנות לו דיאגרמת reciprocal, אזי גם המבנה וגם ה-reciprocal שייכים לקבוצה של מבנים מיוחדים הנקראים מבני Assur (Assur, 1952). יתרה מזאת, מבני Assur אלו נמצאים במצב מיוחד או במצב ממנו ניתן לקבל את המצב הזה כפי שנפרט בהמשך. לפני כן נציג מספר הגדרות:

הגדרה 2.5: קבוצות Assur מוגדרות כמבנים מסוימים סטטית ($e = 2 \cdot v - 3$) שלא ניתנים לפירוק לתת מבנים מסוימים סטטית אחרים.

הגדרה 2.6: מבנה Assur הוא מבנה המורכב מקבוצת Assur אחת בלבד.

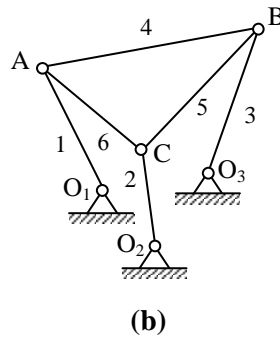
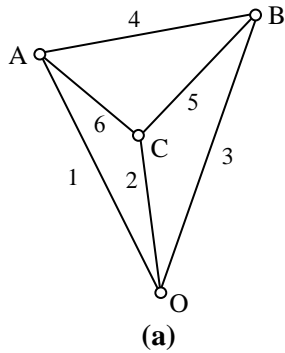
לדוגמה, באיור (a) 2.2 מתואר מבנה, אשר לא ניתן לפרק אותו לתת מבנים ולכן הוא מבנה Assur. ולעומת זאת באיור (b) 2.2 מתואר מבנה שאינו Assur, כי ניתן לחלקו לשני תת מבנים, מוטות 1 ו-2 ומוטות 3 ו-4 שנקראים דיאדות.



איור 2.2: דוגמה למבנה Assur ומבנה שאינו Assur

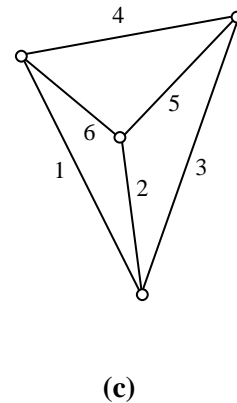
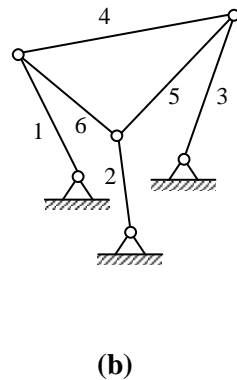
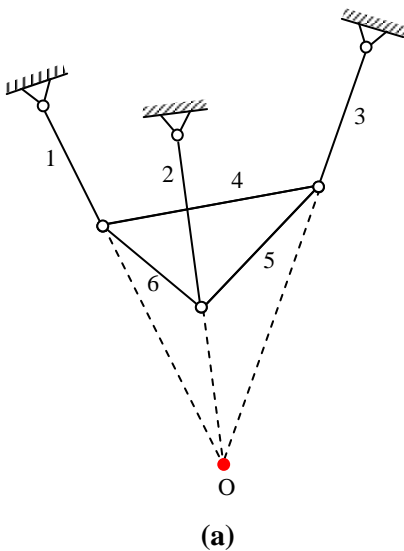
(a) מבנה Assur - לא ניתן לפרקו לתת מבנים. (b) מבנה שאינו Assur - ניתן לפרקו לשני תתי מבנים (דיאדות).

הגדרה 2.7: מבני Assur מכווצים (contracted Assur structure) אלה מבנים שהתקבלו לאחר כיווץ כל צמתי האדמה לצומת אחד. מבנים אלו הם בעלי פאות סגורות ויתירות אחת ($e = 2 \cdot v - 2$), כלומר ניתן להפעיל בהם מאמץ עצמי. לדוגמה, באיור (a) 2.3 מתואר מבנה שלאחר כיווץ שלושת הצמתים שלו, O_1 , O_2 ו- O_3 , מתקבל המבנה המתואר באיור (b) 2.3.



איור 2.3: דוגמה למבנה Assur מכווץ ומבנה Assur מקורי ממנו הוא התקבל
 (a) מבנה Assur מכווץ. (b) מבנה Assur מקורי ממנו התקבל המבנה המכווץ.

כאמור בסעיף הקודם, ניתן לחלק מבנים שקיימת להם דיאגרמת reciprocal לשלוש קבוצות עיקריות. כיוון שרק שתי קבוצות מתוך שלוש, $e = 2 \cdot v - 2$ ו- $e = 2 \cdot v - 3$, קבוצות Assur, נדבר עליהן. לפי הגדרה 2.7, כל מבנה המקיים $e = 2 \cdot v - 2$ הוא מבנה Assur מכווץ. לפי הסעיף הקודם, זהו מקרה שלכל מצב כללי שלו ניתן לבנות reciprocal מתאים. לעומת זאת למבנים המקיימים $e = 2 \cdot v - 3$ ניתן לבנות דיאגרמת reciprocal אך ורק כאשר הם נמצאים במצבם המיוחד. בדוגמה הבאה נראה, שהמבנים האלו הם מבני Assur שניתן להפוך אותם למצב המכווץ. **באיור (a) 2.4** מתואר מבנה המקיים $e = 2 \cdot v - 3$, שהוא מבנה Assur במצבו הסינגולרי, כלומר המשכי הקווים 1, 2 ו-3 נפגשים בנקודה אחת O. נהפוך את כיוונם של הקווים 1, 2 ו-3, כמתואר **באיור (b) 2.4**. וכעת נחבר בין הקווים 1, 2 ו-3, ראה **איור (c) 2.4**. התוצאה שמתקבלת היא קבוצת Assur מכווצת.



איור 2.4: הפיכת מבנה Assur במצב סינגולרי למבנה Assur מכווץ

(a) מבנה Assur במצב סינגולרי, כיוון שהמשכי הקווים 1, 2 ו-3 נפגשים בנקודה אחת. (b) מבנה Assur שהתקבל לאחר שהפכנו את כיוון הקווים 1, 2 ו-3. (c) מבנה Assur מכווץ.

לסיכום, ניתן להגיד שאם מבנה מקיים $e = 2 \cdot v - 2$ או $e = 2 \cdot v - 3$ וניתן לבנות לו דיאגרמת reciprocal, אז גם הוא וגם דיאגרמת ה-reciprocal שלו יהיו קבוצות Assur במצב המכווץ או במצב שממנו ניתן לקבל את המצב המכווץ.

2.2.3 reciprocal של הבניה של ה-

(א). סימון מוטות, צמתים ופאות של המסבך: נסמן את כל המוטות של המסבך במספרים, את הצמתים באותיות גדולות ואת הפאות בספרות רומיות.

(ב). קביעת גודלו של הקו הראשון ב-reciprocal: נקבע באופן שרירותי (במידה ולא נתון) את גודל הכוח הפועל באחד המוטות. בשלב זה נגדיר את הקו הראשון ב-reciprocal, שקבע את קנה המידה, ושאר הקווים יתקבלו בהתאם.

(ג). קביעת הצומת הראשון לטיפול: עדיף להתחיל בצומת מדרגה שלוש במסבך, כיוון שידוע מסטטיקה, שאם קיימים שלושה כוחות הפועלים בצומת וידוע גודלו ושיפועו של אחד הכוחות וכן שיפועים של שניים נוספים, אזי ניתן לחשב גם את גודל השניים האחרים. ב-reciprocal הצומת תתאים לפאת משולש, שלאחד הקווים שלה מוגדרים גם גודל וגם שיפוע ולשניים הנוספים מוגדרים השיפועים, משמע, ניתן למצוא גם את גודלם.

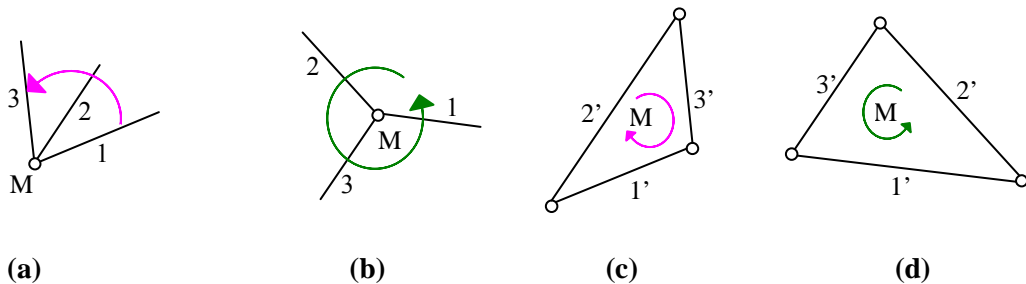
ישנם שני סוגים של צמתים מדרגה שלוש, צומת מסוג חץ שבו רק אחת מהזוויות בין הקשתות גדולה מ- 180° , כמתואר באיור 2.5 (a) וצומת מסוג Y שבו כל הזוויות בין הקשתות קטנות מ- 180° , ראה איור 2.5 (b). עבור צומת חץ- הקשתות ב-reciprocal מסודרות בסדר הפוך, דהיינו, אם במקרה זה 1, 2, 3 הם CCW אז הקשתות האלו יהיו מסודרות ב-CW. באיור 2.5 (c) ניתן לראות פאה ב-reciprocal המתאימה לצומת חץ. בצומת Y יתקבל אותו כיוון, כמתואר באיור 2.5 (d).

(ד). בניית פאה ב-reciprocal: עבור צומת מדרגה n במסבך משרטטים פאה בעלת n קווים ב-reciprocal, כך שהמוטות במסבך יהיו מקבילים לקווים המתאימים ב-reciprocal.

(ה). בדיקה שכל פאה במסבך מתאימה לצומת ב-reciprocal: נבדוק שכל המוטות שיוצרים פאה במסבך מתאימים לקווים הפוגשים את הצומת המתאים ב-reciprocal.

(ו). קביעת סדר צמתים לטיפול: הצומת הבא במסבך שנטפל בה תהיה מדרגה n, וזאת בתנאי שב-reciprocal מוגדרים לפחות 2 – n הקווים המתאימים למוטות שפוגשים צומת זה. (ז). נחזור לשלב ד'.

האלגוריתם נעצר כאשר עוברים על כל הצמתים במבנה.



איור 2.5: סוגים של צמתים מדרגה שלוש והפאות המתאימות להם ב-reciprocal

(a) צומת חץ, שקשתותיו מסודרות בכיוון CCW. צומת Y, שקשתותיו מסודרות בכיוון CCW. פאה ב-reciprocal המתאימה לצומת חץ במבנה המקורי, כאשר הקשתות בה מסודרות בכיוון הפוך לזה של צומת חץ, דהיינו כיוון CW. פאה ב-reciprocal המתאימה לצומת Y במבנה המקורי, כאשר הקשתות בה מסודרות באותו כיוון לזה של צומת Y, דהיינו בכיוון CCW.

2.2.4 דוגמה לבניית ה-reciprocal

ניקח לדוגמה את המבנה המתואר באיור 2.6 (a) שפועל בו מאמץ עצמי ונבנה לו reciprocal מתאים.

א. סימון המוטות, הצמתים והפאות במבנה הנתון: יש שישה מוטות שנסמן במספרים מ-1 עד

6, ארבעה צמתים שנסמן באותיות מ-A עד D וארבע פאות שנסמן בספרות מ-I עד IV

(איור 2.6 (a))

ב. קביעת גודלו של הקו הראשון ב-reciprocal: נקבע לדוגמה באופן שרירותי את גודל הכוח במוט 6 אשר מגדיר לנו את גודל קו 6' ב-reciprocal.

ג. קביעת הצומת הראשון לטיפול: הצומת הראשון שנטפל בו הוא צומת B. זהו צומת מדרגה שלוש, שידוע גודל הכוח במוט 6 הפוגש אותו (הגדרנו אותו בשלב ב') וגם ידועים שיפועי הכוחות במוטות 2, 5 ו-6 הפועלים בצומת. לכן ניתן למצוא את גדלי הכוחות במוטות 2 ו-5. ב-reciprocal שלושת המוטות מתאימים לפאת משולש, שידועים הגודל של אחד הקווים ושיפועי שלושת הקווים היוצרים אותה. לכן ניתן למצוא את גדלי שני הקווים הנוספים.

ד. בניית הפאה ב-reciprocal המתאימה לצומת B: במסבך שלושת המוטות 2, 5 ו-6 פוגשים את הצומת B, לכן ב-reciprocal שלושת הקווים 2', 5' ו-6' יוצרים את הפאה B **(איור 2.6 (b))**.

ה. קביעת הצומת הבא לטיפול: כעת נעבור לטפל בצומת C של המבנה. זהו גם צומת מדרגה שלוש שידוע הכוח במוט 5 שפוגש אותו (הגדרנו אותו בשלב ג') וידועים שיפועי הכוחות במוטות 3, 4 ו-5 הפועלים בצומת. לכן ניתן למצוא גם את גדלי הכוחות במוטות 3 ו-4. ב-reciprocal זה מתאים לפאת משולש, שידועים הגודל של אחד הקווים ושיפועי שלושת הקווים היוצרים אותה. לכן ניתן למצוא גם את הגדלים של שני הקווים הנוספים.

ו. בניית הפאה ב-reciprocal המתאימה לצומת C: במסבך שלושת המוטות 3, 4 ו-5 פוגשים את הצומת C וב-reciprocal שלושת הקווים המתאימים 3', 4' ו-5' יוצרים את הפאה C **(איור 2.6 (c))**.

ז. בדיקה שהפאות I ו-II במבנה יוצרות את הצמתים המתאימים ב-reciprocal: מוטות 4, 5 ו-6 יוצרים את פאה I במבנה ומוטות 2, 3 ו-5 יוצרים את פאה II, לכן ב-reciprocal הקווים 4', 5' ו-6' וגם 2', 3' ו-5' יוצרים את הצמתים I ו-II בהתאמה.

ח. בניית הפאה ב-reciprocal המתאימה לצומת D: במסבך שלושת המוטות 1, 4 ו-6 פוגשים את הצומת D וב-reciprocal שלושת הקווים המתאימים 1', 4' ו-6' יוצרים את הפאה D **(איור 2.6 (d))**.

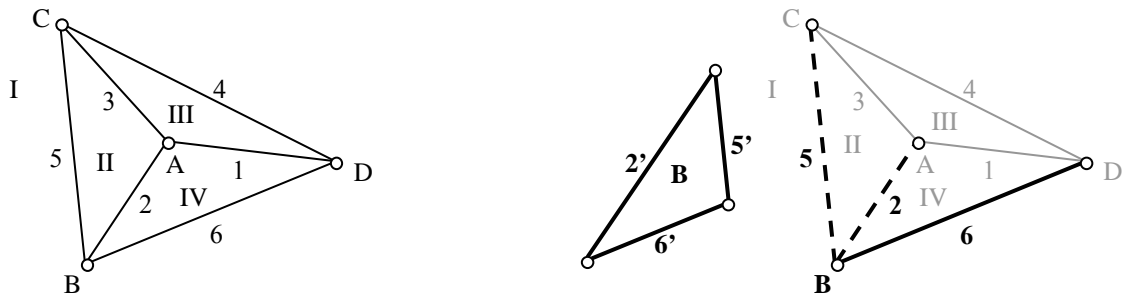
ט. בדיקה שהפאות III ו-IV במבנה יוצרות את הצמתים המתאימים ב-reciprocal: מוטות 1, 3 ו-4 יוצרים את פאה III במבנה ומוטות 1, 2 ו-6 יוצרים את פאה IV, לכן ב-reciprocal הקווים 1', 3' ו-4' וגם 1', 2' ו-6' יוצרים את הצמתים III ו-IV בהתאמה.

י. בניית הפאה ב-reciprocal המתאימה לצומת A: במסבך שלושת המוטות 1, 2 ו-3 פוגשים את הצומת A וב-reciprocal שלושת הקווים המתאימים 1', 2' ו-3' יוצרים את הפאה A **(איור 2.6 (e))**.

יא. בדיקה שפאה I במבנה יוצרת את הצומת המתאים ב-reciprocal: מוטות 4, 5 ו-6 יוצרים

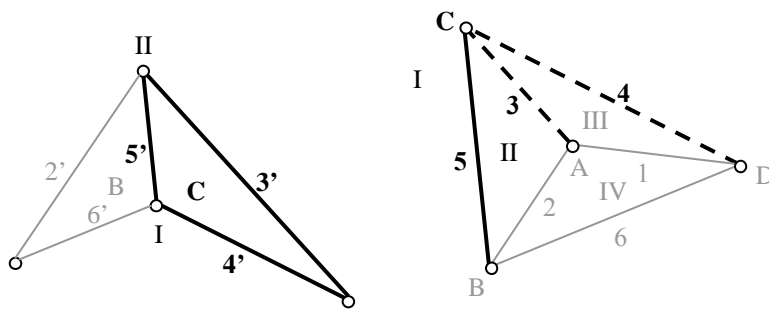
את פאה I במבנה, לכן ב-reciprocal הקווים 4', 5'-ו-6' יוצרים את הצומת I.

בשלב זה קיבלנו דיאגרמת reciprocal המתאימה למבנה הנתון, ראה איור 2.6 (f)

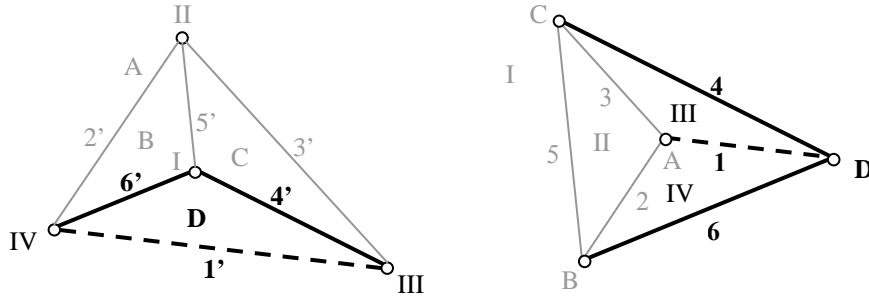


(a)

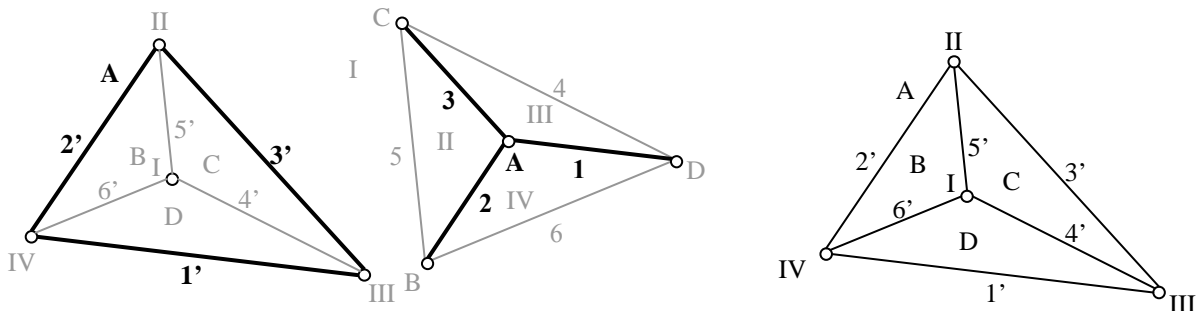
(b)



(c)



(d)



(e)

(f)

איור 2.6: דוגמה לבניית דיאגרמת reciprocal למסבך ללא סמכים שפועל בו מאמצ עצמי

(a) מסבך ללא סמכים. (b) בניית הפאה B ב-reciprocal המתאימה לצומת B במבנה המקורי. (c) בניית הפאה C ב-reciprocal המתאימה לצומת C במבנה. (d) בניית הפאה D ב-reciprocal המתאימה לצומת D במבנה. (e) בניית הפאה A ב-reciprocal המתאימה לצומת A במבנה. (f) דיאגרמת reciprocal המתאימה למבנה הנתון.

2.2.5 התכונות המיוחדות של ה-reciprocal

- מספר מוטות במסבך שווה למספר קווים ב-reciprocal, כלומר $e=e^*$, כאשר e מייצג מספר מוטות במבנה ו- e^* מספר קווים ב-reciprocal. בדוגמה שהוצגה בסעיף 2.1.3 קיבלנו ש- $e=e^*=6$.

- כל הקווים ב-reciprocal יכולים להיות מקבילים, מאונכים או בשיפוע כלשהו למוטות המתאימים במבנה, אולם יש להיות עקביים. לכן, אם בחרנו שהקווים ב-reciprocal יהיו מקבילים למוטות המתאימים במבנה, אזי כל הקווים יהיו מקבילים כפי שהוצג בדוגמה בסעיף 2.2.4.

- כל צומת מדרגה n במבנה מתאים לפאה בעלת n קשתות ב-reciprocal ולהפך. לכן מספר צמתים במבנה שווה למספר הפאות ב-reciprocal ולהפך, כלומר $v=f^*$, כאשר v מספר הצמתים במבנה ו- f^* מספר הפאות ב-reciprocal. בדוגמה שהצגנו בסעיף 2.2.4 קיבלנו ש- $v=f^*=4$. יש לשים לב, כי הצומת A במבנה מתאים לפאה החיצונית A ב-reciprocal.

2.3 בנייה של reciprocal למסבך שפועל עליו כוח חיצוני

אחד הדברים שנחקרו בתזה, קיום הקשר בין הדואליות מסבכים ומכניזמים לבין reciprocal, לכן בסעיף הבא נראה את המעבר ממסבך עם כוח חיצוני למסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי, ואז לפי סעיף 2.2.3 נוכל לבנות לו דיאגרמת reciprocal מתאימה.

2.3.1 שלבי בנייה של reciprocal למסבך עם כוח חיצוני

1. הפיכת כוח חיצוני וריאקציות למוטות: נהפוך כוח חיצוני וריאקציות בסמכים ניידיים למוטות מחוברים לאדמה. השיפועים של המוטות יהיו זהים לשיפועים של הכוחות המתאימים. סמכים נייחים נשארים ללא שינוי.
 2. חיבור בין סמכים נייחים לקבלת בסיס קשיח: נחבר בין סמכים נייחים כך שניצור בסיס קשיח.
 3. הורדת סמכים נייחים: נוריד את הסמכים הנייחים.
- קיבלנו מסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי, שכעת ניתן לבנות לו reciprocal מתאים על פי שלבים שפורטו בסעיף 2.2.3.

2.3.2 דוגמה לבניית reciprocal למסבך עם כוח חיצוני

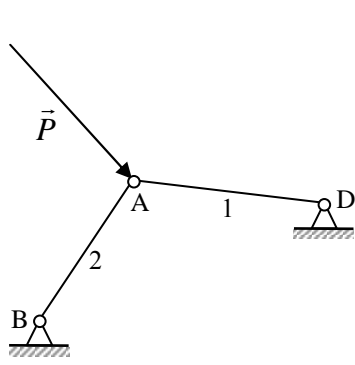
ניקח לדוגמה את המסבך המתואר באיור (a) 2.7 שפועל עליו כוח חיצוני \bar{P} .

(א). הפיכת הכוח החיצוני למוט המחובר לאדמה: נהפוך את הכוח החיצוני \bar{P} למוט המחובר לאדמה שהשיפוע שלו בכיוון הכוח. נסמן את המוט שיתקבל ב-3. את הסמכים הנייחים B ו-D נשאיר ללא שינוי (איור (b) 2.7).

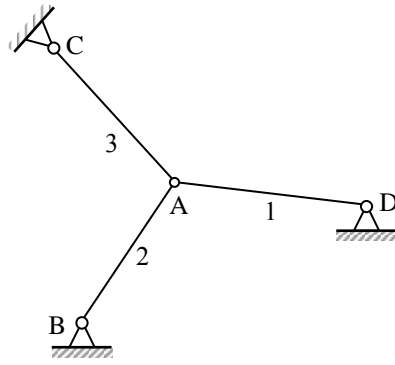
(ב). חיבור בין הסמכים הנייחים לקבלת הבסיס הקשיח: בדוגמה הנתונה יש שלושה סמכים נייחים B, C ו-D שנחבר ביניהם ונקבל את המשולש 4, 5, 6 שזוהי הצורה הקשיחה (איור (c) 2.7).

(ג). הורדת הסמכים הנייחים: נוריד את הסמכים הנייחים B, C ו-D (איור (d) 2.7).

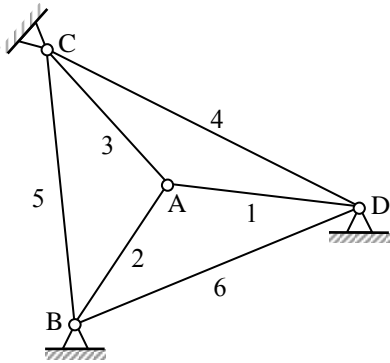
קיבלנו את המסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי כמתואר באיור (d) 2.7, וכעת נוכל לבנות לו reciprocal כפי שמפורט בסעיף 2.2.3. באיור (e) 2.7 מתוארת דיאגרמת ה-reciprocal המתאימה.



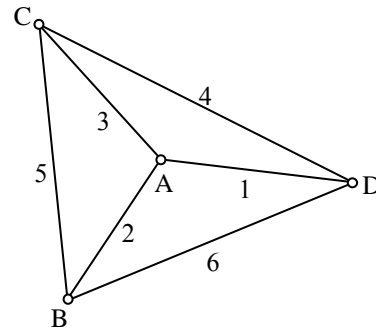
(a)



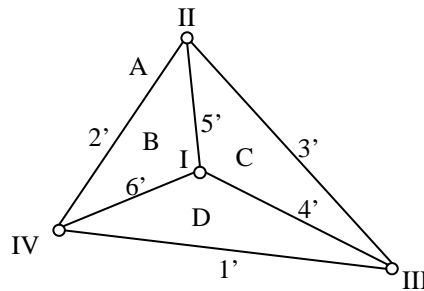
(b)



(c)



(d)



(e)

איור 2.7: דוגמה להפיכת מסבך עם כוח חיצוני למסבך ללא סמכים עם מאמץ עצמי

(a) המסבך עם הכוח החיצוני. (b) המסבך לאחר הפיכת הכוח החיצוני למוט 3 שמחובר לאדמה. (c) המסבך לאחר הוספת הבסיס הקשיח שבנוי ממוטות 4, 5 ו-6. (d) מסבך ללא סמכים עם מאמץ עצמי.

2.4 מקרים שונים של reciprocal

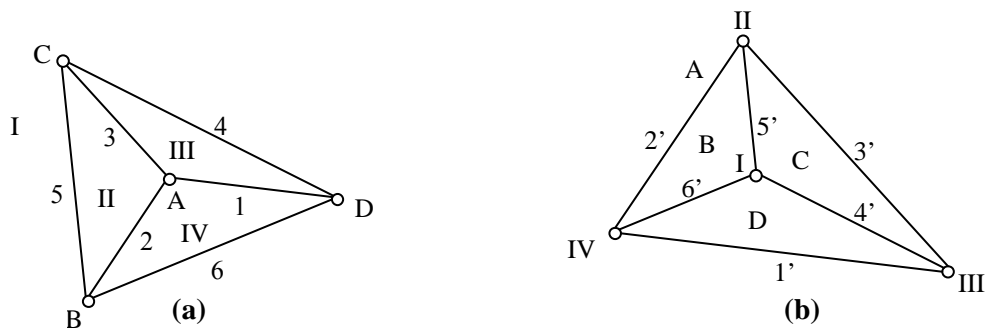
כפי שנאמר בתחילת הפרק, ניתן לחלק את כל המסבכים לשלוש קבוצות: מסבכים בעלי יתירות אחת, מסבכים מסוימים סטטית ומסבכים בעלי יתירות גדולה מאחת. ההבדל ביניהם הוא היחס בין מספר הצמתים ומספר הפאות במסבך. נציג שלושת המקרים, ונראה מהם התנאים כדי שנוכל לבנות להם reciprocal מתאים. נניח ש- e , f ו- v אלה מספר הקשתות, מספר הפאות ומספר הצמתים בהתאמה במבנה המקורי, ו- e' , f' ו- v' מספר הקשתות, מספר הפאות ומספר הצמתים בהתאמה בדיאגרמת reciprocal. ידוע שמבנה מישורי עם פאות סגורות מקיים את הקשר הבא:

$$e = v + f - 2 \quad (2.3)$$

לכן, כיוון שמספר הצמתים במבנה המקורי שווה למספר פאות ב-reciprocal ולהפך, ומספר הקשתות שווה, דיאגרמת reciprocal מקיימת את המשוואה הבאה:

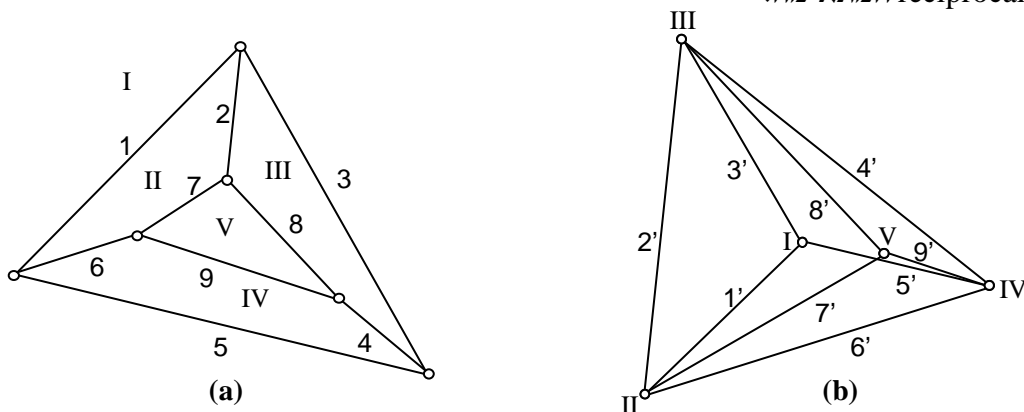
$$e' = v' + f' - 2 \quad (2.4)$$

מקרה 1: $v = f$ - מספר הצמתים שווה למספר פאות. זוהי קבוצה של מסבכים בעלי יתירות אחת. אם $v = f = i$, אזי משוואות (2.3) ו-(2.4) נראות כך $e = 2 \cdot i - 2$ ו- $e' = 2 \cdot i' - 2$. במקרה הזה תמיד נוכל לבנות דיאגרמת reciprocal מתאימה, דהיינו, עבור כל קונפיגורציה של מבנה מקורי נוכל לקבל reciprocal. ניקח לדוגמה מבנה בעל ארבע פאות וארבעה צמתים שמתואר באיור 2.8 (a). כל הקווים בדיאגרמת reciprocal המתאימה מוגדרים ולכן הבנייה היא על פי שלבים שפורטו בסעיף 2.2.3 ללא תנאים נוספים. באיור (b) מתוארת דיאגרמת reciprocal של המבנה הנתון.



איור 2.8: תיאור מקרה ראשון של מבנה שבו מספר פאות שווה למספר צמתים, ודיאגרמת reciprocal המתאימה לו
(a) מבנה בעל ארבע פאות וארבעה צמתים. (b) דיאגרמת reciprocal.

מקרה 2: $v > f$ - מספר הצמתים גדול ממספר פאות. אלה מסבכים מסוימים סטטית. אם $v > f$, ניתן לבנות דיאגרמת reciprocal אך ורק אם מתקיימים במבנה המקורי מספר תנאים ששווה ל- $(v - f)$. דוגמה לאחד התנאים היא חיתוך של קווים מסוימים. ניקח לדוגמה מבנה שמתואר באיור (a) 2.9. במקרה הזה יש לנו חמש פאות ושישה צמתים, דהיינו מספר הצמתים גדול ממספר הפאות, לכן ניתן יהיה לבנות reciprocal אך ורק אם יתקיים תנאי אחד והוא שקווים 2, 4 ו-6 יפגשו בנקודה אחת. איור (b) 2.9 מתאר את דיאגרמת ה-reciprocal המתאימה.



איור 2.9: תיאור מקרה שני של מבנה שבו מספר צמתים גדול ממספר פאות
(a) מבנה בעל חמש פאות ושישה צמתים. (b) דיאגרמת reciprocal.

מקרה 3: $v < f$ - מספר הצמתים קטן ממספר פאות. זוהי קבוצה של מסבכים בעלי יתירות גדולה מאחת. כאן $v < f$, ומשוואות (2.3) ו-(2.4) ירשמו באופן הבא: $2 \cdot v - 2 - e > 2 \cdot v' - 2 - e'$, ולכן דיאגרמת reciprocal קיימת, אבל לא מוגדרת בשיעור של $v - f$ איברים. אם אנחנו נסתכל על מבנה שמתואר באיור (b) 2.9 כעל מסבך ללא סמכים, אזי במקרה הזה יש לנו חמישה צמתים ושש פאות. זהו מקרה שמשפר הצמתים קטן ממספר הפאות, ולכן משתנה אחד בדיאגרמת reciprocal לא מוגדר. נניח נתחיל לבנות מצומת I במבנה המקורי, אזי ב-reciprocal נקבל פאה I מתאימה. קווים 2, 4 ו-6 ניתן לבנות בשני אופנים: (1) בתוך משולש שבנוי ממוטות 1, 3, 5. (2) מחוץ למשולש זה. קו 2 יחלוק צומת עם קווים 1 ו-3 כי במבנה המקורי הם יצרו פאה, קו 4 יחלוק צומת עם קווים 3 ו-5 שגם הם יצרו פאה במבנה המקורי וכנ"ל לגבי קו 6 שיחלוק צומת עם קווים 1 ו-5. בשלב אחרון נבנה פאה V ב-reciprocal שמתקבלת מצומת V במבנה המקורי. ניתן לראות שהמשתנה שאינו מוגדר חד משמעית זהו כיוון של קווים 2, 4 ו-6.

2.5 מבנה עם מאמץ עצמי ו-reciprocal כהיטל של פאון כדורי ופאון דואלי, בהתאמה

לפני כיותר ממאה שנה, Maxwell שעסק גם בגיאומטריה מרחבית, גילה קשר נוסף מאוד מעניין (Maxwell, 1869), שהורחב מאוחר יותר על ידי המתמטיקאי Walter Whiteley (Whiteley, 1979), בין מאמץ עצמי הפועל במסבך ללא סמכים והיטל ניצב של סוג מסוים של פאון- הנקרא פאון כדורי המוגדר בסעיף זה. אמצעי קישור בין מאמץ עצמי לפאון נעשה באמצעות דיאגרמת reciprocal. מכאן, דיאגרמת reciprocal היא כלי המשמש לזהות האם קונפיגורציה של מבנה המקורי היא היטל של פאון והאם במבנה המקורי פועל מאמץ עצמי (Maxwell, 1869). לפני שנציג את הקשר להלן מספר הגדרות:

הגדרה 2.8: **שדה של קשת** (edge patch) - כל קשת ניתן להגדיר על ידי ארבעה רכיבים, שני צמתים שהיא מקשרת ושתי פאות שהיא מפרידה. לדוגמה אם נרשום $e = \langle h, i, j, k \rangle$, זה מציין שקשת e מקשרת בין צמתים h ו-i ומפרידה בין פאות j ו-k.

הגדרה 2.9: **פאון קומבינטורי מכוון** (combinatorial oriented polyhedron) - קבוצה של צמתים $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, פאות $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ ושדות של קשתות $E = \{\langle h, i, j, k \rangle \mid 1 \leq h, i \leq m, 1 \leq j, k \leq n\}$ כך ש-:

- אם $\langle h, i, j, k \rangle \in E$, אז גם $\langle i, h, k, j \rangle \in E$, אבל $\langle h, i, k, j \rangle, \langle i, h, j, k \rangle \notin E$
- לכל צומת a_0 , כל שדות של קשתות עם רכיב ראשון a_0 יוצרים מעגל $\langle 0, i_s; j_s, k_s \rangle, 1 \leq s \leq t (t \geq 3)$, שבו $k_s = j_{s+1}$ ו- $j_t = k_1$, כל i_s ו- k_s שונים.
- לכל פאה F_0 , כל שדות של קשתות עם רכיב אחרון F_0 יוצרים מעגל $\langle h_s, i_s; j_s, 0 \rangle, 1 \leq s \leq t (t \geq 3)$, שבו $i_t = h_1$ ו- $i_s = h_{s+1}$, כל j_s ו- h_s שונים.
- בין כל זוג של צמתים, למשל, v_1, v_0 עובר מסלול של צמתים וקשתות, ובין כל זוג של פאות f_0, f_1 עובר מסלול של פאות וקשתות.

הגדרה 2.10: **פאון דואלי** (dual polyhedron) - אם בפאון מקורי נחליף בין פאות וצמתים, כלומר שדות של קשתות יהפכו מ- $\langle h, i, j, k \rangle$ ל- $\langle j, k, h, i \rangle$ נקבל פאון דואלי.

הגדרה 2.11: **פאון קומבינטורי כדורי** (combinatorial spherical polyhedron) זהו פאון קומבינטורי מכוון, בעל גרף מישורי פשוט, כלומר כל מסלול סגור של פאות וקשתות יוצר חתך. גרף G הוא גרף של פאון כדורי אם ורק אם הוא 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות. הדואלי של פאון כדורי הוא גם פאון כדורי.

הגדרה 2.12: **פאון קמור** (convex polyhedron) זהו פאון כדורי שכל הצלעות שלו קמורות.

הגדרה 2.13: **פאון עם חיתוך עצמי** (self-intersected polyhedron) זהו פאון כדורי שקיימים בו מישורים שנחתכים ביניהם.

בהינתן ציור שמתאים לגרף מישורי 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות שקווים שלו מתאימים לקשתות של הגרף, נשאל שתי שאלות שנראות אולי לא קשורות אחת לשנייה:

- האם הציור הנתון הינו היטל של פאון כדורי תלת מימדי?

- אם נבנה על פי ציור את המסבך המתאים ללא סמכים, האם קיים מאמץ עצמי בקונפיגורציה שהתקבלה (כוחות לחיצה וכוחות מתיחה בכל המוטות שונים מאפס המחזיקים את המבנה בשיווי משקל)?

למרבה ההפתעה התשובה לשתי שאלות אלו זהה. ציור הוא היטל של פאון כדורי אם ורק אם במסבך פועל מאמץ עצמי. מאחר והיטל של פאון כדורי זהו גרף מישורי 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות, הפאון הדואלי גם כדורי והגרף שלו גם מישורי, 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות, שהצמתים שלו מתאימים לפאות של הגרף המקורי והקשתות הדואליות ניצבות לקשתות המתאימות בגרף המקורי. כפי שראינו בפרק 4, פוליגון של כוחות עבור כל צומת שנמצא בשיווי משקל במסגרת, ביחד מהווים דיאגרמה של (reciprocal) Maxwell.

נסכם כל מה שנאמר כעת בשני משפטים:

- במסגרת מישורית (2D), שהגרף שלה מישורי, עם קשירות 2 ו-3 בצמתים וקשתות בהתאמה, יפעל מאמץ עצמי שונה מאפס בכל הקשתות אם ורק אם ניתן לבנות דיאגרמת reciprocal מתאימה.
 - במסגרת מישורית, שהגרף שלה מישורי, עם קשירות 2 ו-3 בצמתים וקשתות בהתאמה, יפעל מאמץ עצמי שונה מאפס בכל הקשתות אם ורק אם היא היטל של פאון.
- אם ניקח היטל אנכי של כל פאון קומבינטורי מכוון ניתן לבנות לו דיאגרמת reciprocal מתאימה, ואז אפשר להגיד שבמסגרת המתאימה להיטל פועל מאמץ עצמי שונה מאפס בכל הקשתות.
- נניח ציור מישורי שהוא היטל של פאון כדורי, המשפטים הבאים אקוויולנטים:
- א. במסגרת שמתאימה לציור פועל מאמץ עצמי שונה מאפס בכל הקשתות.
 - ב. לציור ניתן לבנות דיאגרמת reciprocal מתאימה, כאשר אין צמתים מתלכדים.
 - ג. בפאון המתאים לציור, לכל פאה מוגדר מישור אחר ואין פאות אנכיות.
- כל זה נכון אם מדובר על פאון כדורי. לעומת זאת בפאון לא כדורי, הכיוון ההפוך של הטענה אינו מתקיים, כלומר מאמץ עצמי במסגרת אינו מחייב קיום reciprocal, וקיום reciprocal אינו מחייב פאון מרחבי.

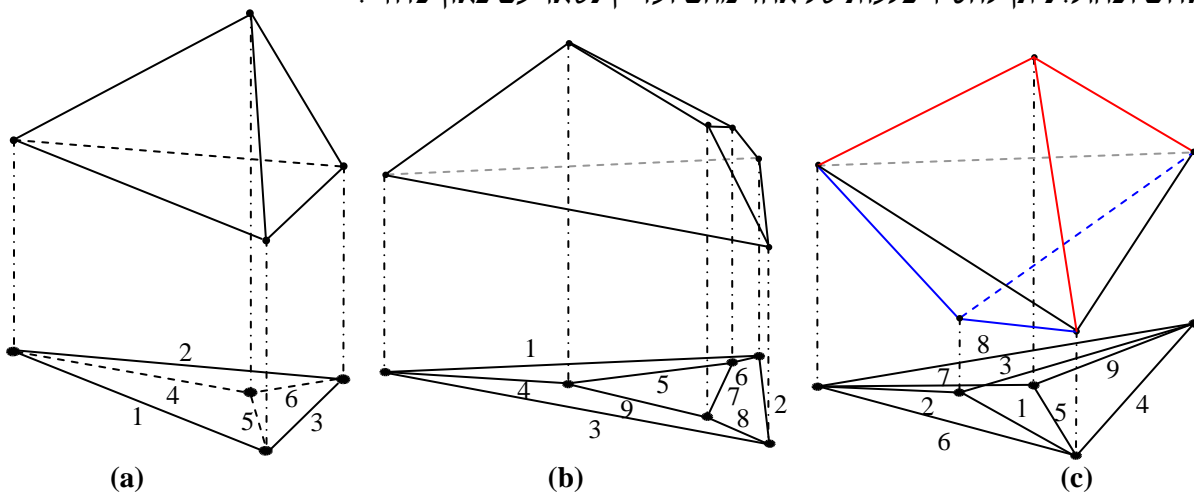
2.5.1 בניית פאון כדורי למבנה עם מאמץ עצמי

כשהצגנו בניית reciprocal למבנה עם מאמץ עצמי (סעיף 2.4) דיברנו על שלושה מקרים. מקרה ראשון אלה מבנים מסוימים סטטית, מקרה שני אלה מבנים יתר סטטים פעם אחת ומקרה אחרון אלה מבנים בעלי יתירות גדולה מאחת. גם הפעם כשנציג בניית פאון למבנה עם מאמץ עצמי נדבר על שלושת המקרים האלה.

מקרה 1: מבנה שמקיים $e = 2 \cdot v - 2$. זהו מבנה יתר סטטי פעם אחת. במקרה הזה לכל מצב כללי של המבנה ניתן לבנות פאון כדורי. **באיור (a) 2.10** מתואר מבנה יתר סטטי פעם אחת ופאון כדורי המתאים לו.

מקרה 2: מבנה שמקיים $e = 2 \cdot v - 3$. זהו מבנה מסוים סטטי. לסוג זה של מבנים ניתן לבנות פאון כדורי אך ורק במצבם הסינגולרי. **באיור (b) 2.10** מתואר מבנה מסוים סטטי במצבו הסינגולרי, שמוטות 4, 6 ו-8 נפגשים בנקודה אחת, ופאון כדורי המתאים לו.

מקרה 3: מבנה שמקיים $e = 2 \cdot v - 1$. זהו מבנה יתר סטטי פעמיים. מבחינה סטטית מבנים אלו בעלי שני מאמצים פנימיים בלתי תלויים אחד בשני, כלומר ניתן להוריד מספר מוטות מבלי לפגוע ביציבותו של המבנה, דהיינו יישאר מאמץ עצמי במבנה. אם נתבונן על הפאון המתאים למבנה מסוג זה, נראה שהוא בנוי מקומביניציה (סופרפוזיציה) של פאוונים, כך שקיימת קבוצה של צלעות שניתן להסיר ועדיין נשאר עם פאון כדורי. **באיור (c) 2.10** מתואר מבנה יתר סטטי פעמיים ופאון כדורי המתאים לו. במבנה רואים שניתן להוריד מוטות 1, 2 ו-3 או 5, 7 ו-9 ולא לפגוע ביציבותו של המבנה, כלומר להישאר עם מאמץ עצמי במערכת. ניתן לראות שפאון המתאים למבנה הזה הוא סופרפוזיציה של שני פאוונים שמסומנים בצבעים אדום וכחול. ניתן להסיר צלעות של אחד מהם ועדיין נשאר עם פאון כדורי.



איור 2.10: תיאור בניית פאוונים למקרים שונים של מבנים עם מאמץ עצמי

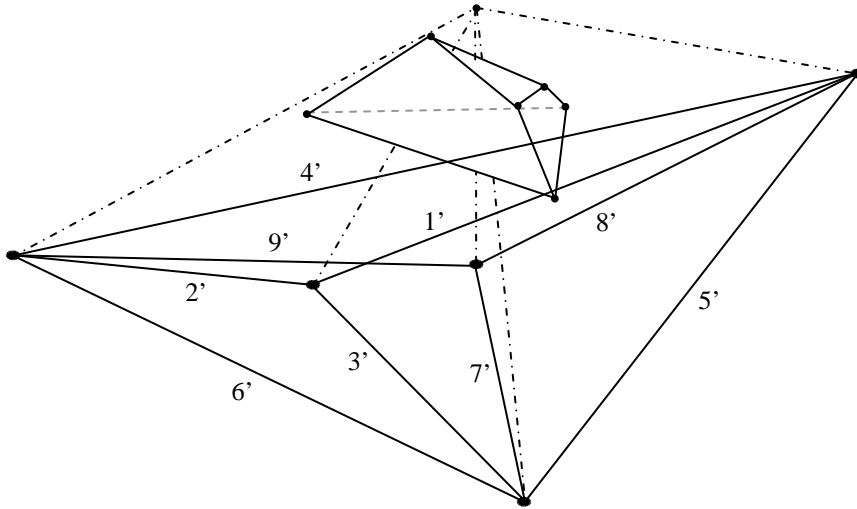
(a) בניית פאון למבנה יתר סטטי פעם אחת. (b) בניית פאון למבנה מסוים סטטי. (c) בניית פאון למבנה יתר סטטי פעמיים.

2.5.2 שלבי בנייה של reciprocal מפאון מרחבי

בסעיף 2.2.3 הצגנו דרך אחת לבנייה של reciprocal, וכעת נציג דרך נוספת שפותחה על ידי David Huffman (Huffman, 1977), אשר בנה את הדיאגרמה מפאון מרחבי.
א. מיקום של פאון במרחב: נמקם באופן שרירותי את הפאון במרחב.
ב. בחירת מישור ההטלה: נבחר איפה ממוקם מישור ההטלה.

ג. בנייה של דיאגרמה דואלית: מנקודה שנבחר במרחב נעביר ניצבים לפאות של פאון מרחבי עד לפגישתם עם מישור ההטלה ובמקום פגישתם נסמן נקודות. לאחר מכן נחבר בין נקודות שהתקבלו מפאות סמוכות.

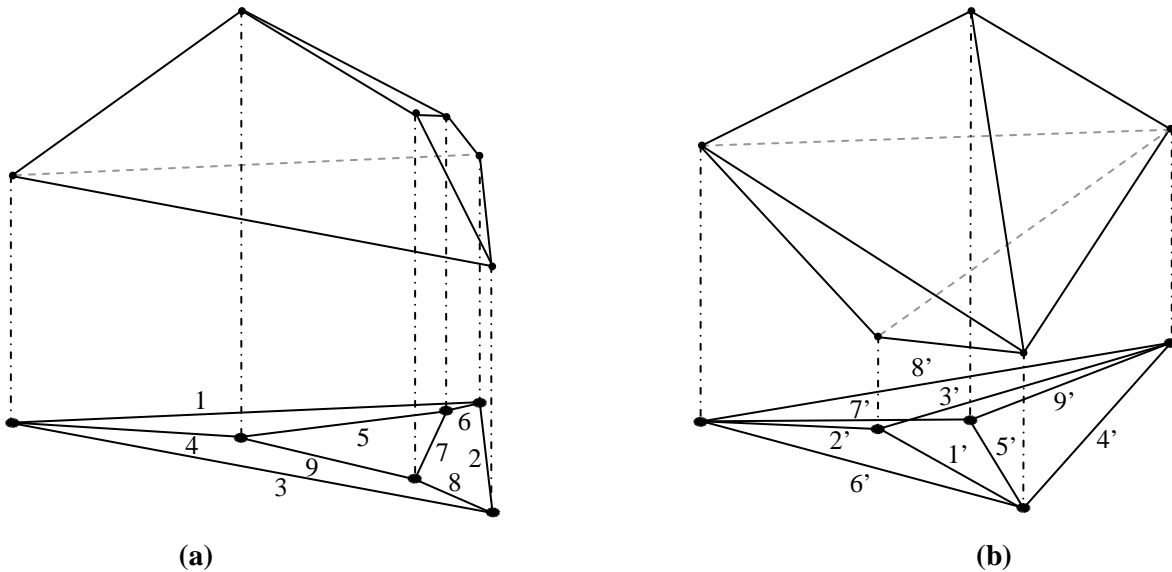
התוצאה שנקבל היא דיאגרמת reciprocal, ראה איור 2.11.



איור 2.11: תיאור קבלת דיאגרמת reciprocal מפאון מרחבי

2.5.3 reciprocal והיטל של פאון דואלי

דיאגרמת reciprocal היא דיאגרמה דואלית למסבך ללא סמכים שנבנה על היטל של פאון מקורי, כלומר, אם ניקח דיאגרמת reciprocal ונבנה לה פאון מתאים, נראה שהפאון שהתקבל והפאון המקורי דואליים. **באיור 2.12 (a)** מתואר פאון מקורי וההיטל המישורי המתאים לו, ו**באיור 2.12 (b)** אנו רואים דיאגרמת reciprocal והפאון הדואלי שהתקבל.



איור 2.12: תיאור הקשר בין פאון מקורי, היטל של פאון, דיאגרמת reciprocal ופאון דואלי
 (a) מסבך ללא סמכים שהוא היטל של הפאון הכדורי המקורי. (b) reciprocal ופאון דואלי המתאים לו.

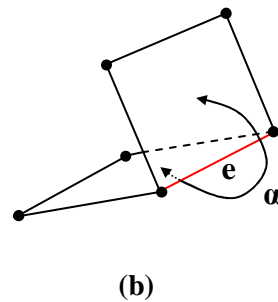
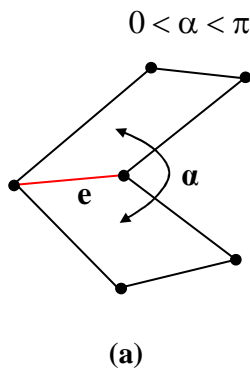
2.6 קשר בין הכוחות הפועלים במסבך ללא סמכים, צלעות של פאון וקשתות של היטל מישורי

ב-1979 גילה Whiteley קשר בין סוג של הכוח שפועל במוט של מסבך ללא סמכים, (כוח לחיצה או מתיחה), לבין סוג של הצלע בפאון (צלע קמורה או קעורה) ובין מיקום של הקשת בהיטל מישורי של הפאון (קשת חיצונית או פנימית). בעזרת הקשר הזה ניתן לקבוע את סוג הכוחות שפועלים במסבך ללא סמכים, מבלי לפתור משוואות סטטיות. קשר זה נתן הבנה נוספת לתחום הדואליות שנחקר בתזה, כפי שיפורט בהמשך. תרומה נוספת של הקשר הזה היא לנושא של Tensegrity, כי בעזרתו ניתן לדעת אילו מוטות ניתן להחליף ב-struts שיכולים לספוג רק כוח לחיצה ואלו בכבלים שיכולים לספוג רק כוח מתיחה והמבנה יישאר עדיין קשיח.

2.6.1 סוג של צלע בפאון כתלות בזווית הפנימית בין שתי הפאות שהיא מפרידה

בהינתן פאון, על מנת לקבוע אם צלע היא קמורה או קעורה נתבונן בזווית פנימית בין שתי פאות שלו שהצלע הזו מפרידה. אם הזווית $0 < \alpha < \pi$ הצלע היא קמורה (איור (a) 2.13) ואם הזווית $\pi < \alpha < 2\pi$

הצלע קעורה (איור (b) 2.13). $\pi < \alpha < 2\pi$

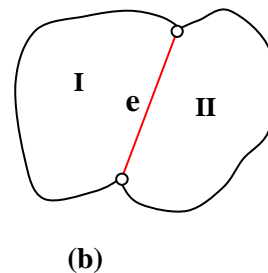
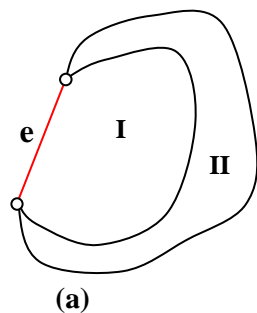


איור 2.13: תיאור הקשר בין סוג של צלע בפאון לבין זווית פנימית בין שתי פאות

(a) זווית בין שתי פאות $0 < \alpha < \pi$ לכן צלע e שמפרידה ביניהם - קמורה. (b) זווית בין שתי פאות $\pi < \alpha < 2\pi$ לכן צלע e שמפרידה ביניהן - קעורה.

2.6.2 סוג של קשת בהיטל המישורי של הפאון כתלות במיקום שלה

בהינתן היטל מישורי של פאון, קשת נקראת חיצונית אם שתי פאות שהיא מפרידה ביניהן נמצאות מאותו צד ביחס לקשת זו, ראה איור (a) 2.14, וקשת נקראת פנימית אם שתי פאות נמצאות משני הצדדים ביחס אליה, ראה איור (b) 2.14.

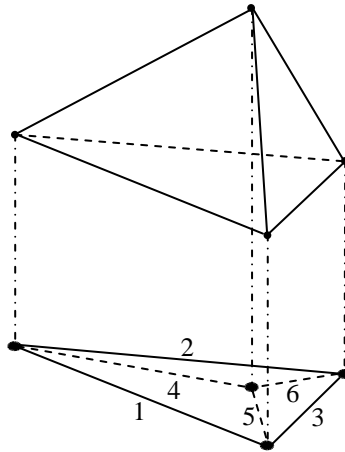


איור 2.14: תיאור הקשר בין סוג של קשת בהיטל של פאון לבין מיקום שלה ביחס לשתי פאות שהיא מפרידה (a) שתי פאות נמצאות מצד אחד ביחס לקשת e, לכן זוהי קשת חיצונית. (b) שתי פאות נמצאות משני הצדדים ביחס לקשת e, לכן זוהי קשת פנימית.

2.6.3 סוג של כוח במוט של מסבך ללא סמכים כתלות בסוג הצלע בפאון וסוג הקשת בהיטל

אם ניקח היטל מישורי של פאון כדורי ונבנה עליו מסגרת מתאימה, נקבל שמוטות שמתאימים לקשתות קמורות-פנימיות או קעורות-חיצוניות יהיו במתיחה, לעומת זאת מוטות שמתאימים לקשתות קעורות-פנימיות או קמורות-חיצוניות יהיו בלחיצה.

ניקח לדוגמה טטראדר (tetrahedron), שהוא פאון קמור. אם נבנה על היטל מישורי שלו מסגרת מתאימה, נקבל כוחות מתיחה במוטות פנימיים, שהם מתאימים לקשתות קמורות-פנימיות, וכוחות לחיצה במוטות חיצוניים, שהם מתאימים לקשתות קמורות-חיצוניות, כמתואר באיור 2.15.

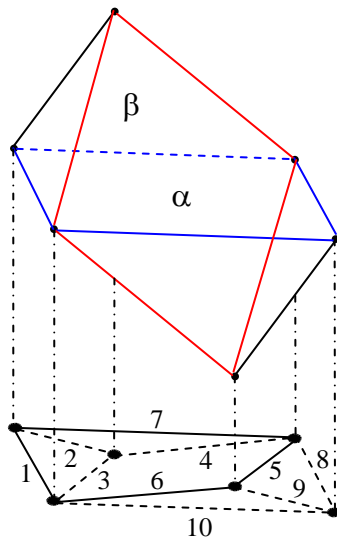


איור 2.15: תיאור הטטראדר וכוחות שמתקבלים במסבך ללא סמכים שנבנה על היטל מישורי שלו

מוטות 4, 5 ו-6 מתאימים לקשתות קמורות-פנימיות, לכן יהיו במתיחה ומוטות 1, 2 ו-3 מתאימים לקשתות קמורות-חיצוניות, לכן כוח שיפעל בהם יהיה כוח לחיצה. מוטות בלחיצה יסומנו באיור כקווים רציפים ומוטות במתיחה כקווים מקוקווים.

בפאון עם חיתוך עצמי במסגרת המתאימה של ההיטל שלו נקבל כי בצד אחד למישור החיתוך עצמי, קשתות קמורות-פנימיות, הופכים למוטות במתיחה וקשתות קמורות-חיצוניות, למוטות בלחיצה ובצד

השני ההפך, ראה איור 2.16.

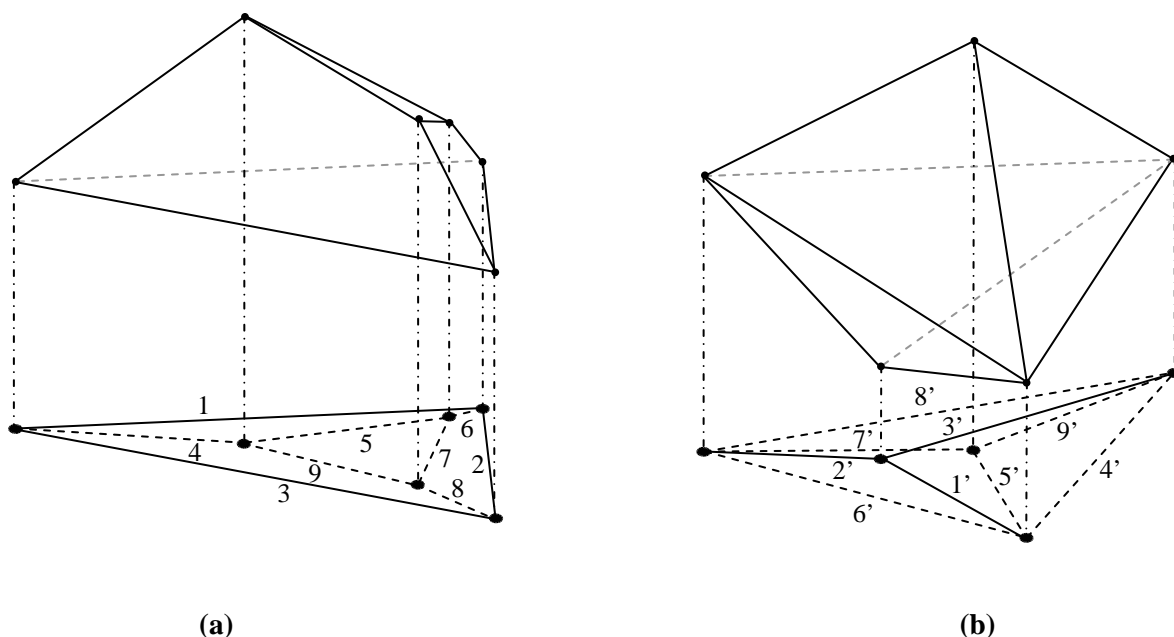


איור 2.16: תיאור כוחות הפועלים במסבך ללא סמכים שנבנה על היטל מישורי של פאון עם חיתוך עצמי

במקרה הזה מישור α (המסומן בכחול) נחתך עם מישור β (המסומן באדום), וכתוצאה מכך במוטות 2, 3, 4, 8, 9, 10 פועל כוח מתיחה ובמוטות 1, 5, 6, 7 כוח לחיצה.

2.6.4 קשר דואלי בין כוחות במסבך ללא סמכים וכוחות ב-reciprocal

עד כאן ראינו שאם נבנה reciprocal למסבך ללא סמכים נתון, נקבל שתי צורות דואליות זו לזו. לכן אם נדע, מבלי לפתור את המשוואות, את סוג הכוח הפועל בכל מוט של המסבך המקורי, נוכל גם, מבלי לפתור משוואות, לדעת מהם הכוחות הפועלים ב-reciprocal המתאים. הטענה היא, שסוגי הכוחות במוטות של המבנה המקורי נשארים ללא שינוי במוטות המתאימים ב-reciprocal. כדי להמחיש את מה שנאמר עכשיו, נציג דוגמה הבאה. **באיור (a) 2.17** רואים מסבך ללא סמכים שנבנה על היטל הפאון, שבכל מוט מסומן סוג הכוח שפועל בו. כפי שנאמר בסעיף 2.6.3, סוג הכוח במוט נקבע על פי סוג הצלע בפאון וסוג הקשת בהיטל המישורי. מכאן רואים שהמוטות 1, 2 ו-3 מתאימים לקשתות קמורות-חיזוניות, לכן הם בלחיצה ומסומנים בקו מלא. לעומת זאת, מוטות 4, 5, 6, 7, 8 ו-9 מתאימים לקשתות קמורות-פנימיות, ולכן הם במתיחה ומסומנים בקו מקוקוו. **באיור (b) 2.17** רואים reciprocal של המסבך המקורי. הפעם סוג הכוח בכל מוט של reciprocal נקבע בהתאמה לסוג הכוח שפועל במסבך המקורי, דהיינו מוטות בלחיצה נשארו להיות בלחיצה ואלה שבמתיחה נשארו להיות גם במתיחה. נוכל לאמת זאת על ידי כך שנבדוק שהקשר שפורט בסעיף 2.6.3 מתקיים. ניתן לראות שהמוטות 1', 2' ו-3' מתאימים לקשתות קמורות-פנימיות ב-reciprocal, ולכן צריכים להיות בלחיצה, וזה אכן כך. לעומת זאת המוטות 4', 5', 6', 7', 8' ו-9' מתאימים לקשתות קמורות-פנימיות ומוטות 4', 5', 6', 7', 8' ו-9' מתאימים לקשתות קמורות-חיזוניות, ולכן צריכים להיות במתיחה, וגם זה מתקיים. מכאן ניתן להגיד שראינו עדות לטענה האומרת שסוגי הכוחות במוטות של המסבך המקורי נשארים ללא שינוי במוטות המתאימים ב-reciprocal.

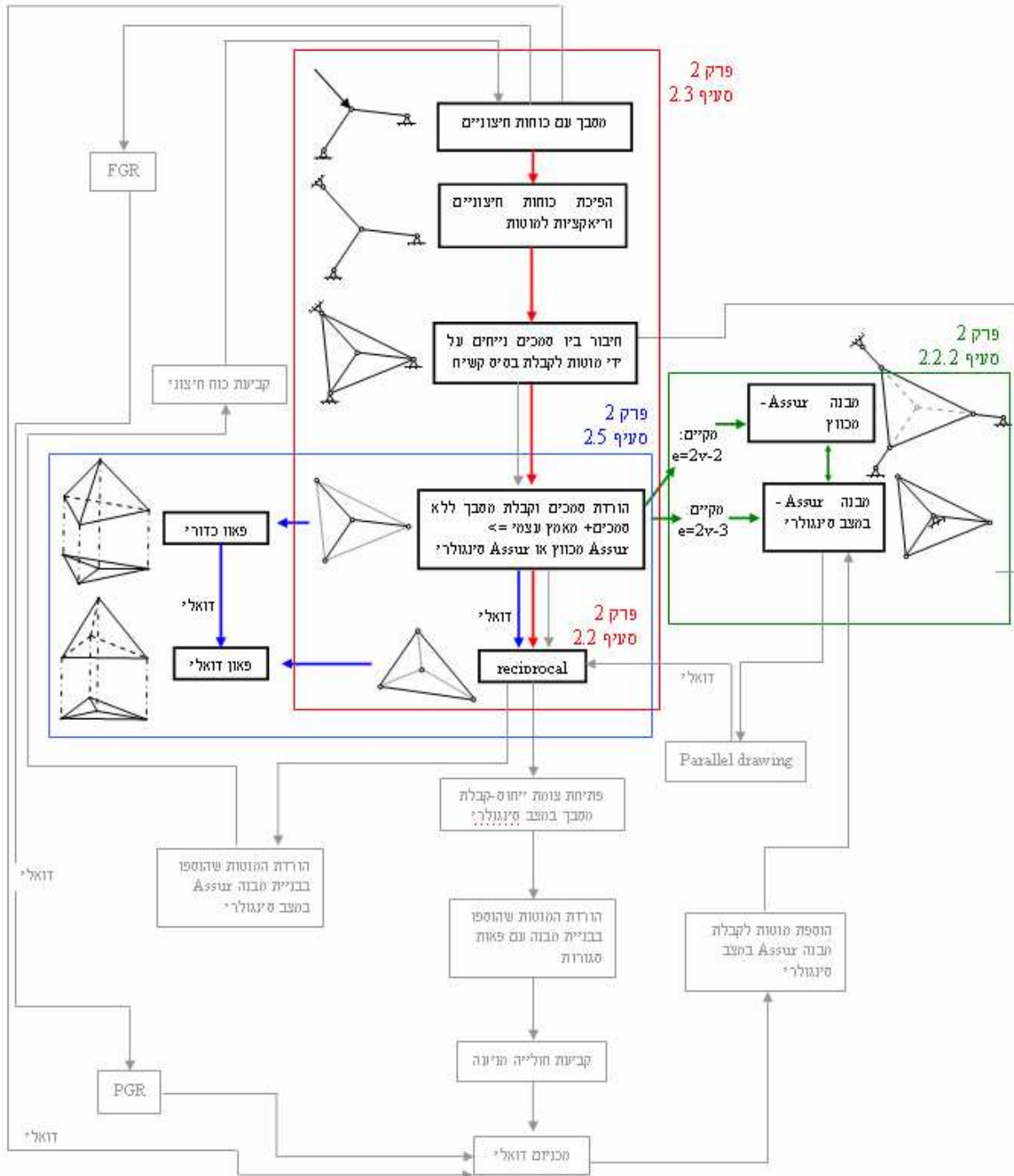


איור 2.17: תיאור הקשר דואלי בין כוחות שפועלים במוטות של מסבך ללא סמכים וכוחות שפועלים במוטות מתאימים של reciprocal

(a) מסבך ללא סמכים מקורי שבכל מוט מסומן סוג הכוח הפועל בו. מוטות בלחיצה מסומנים בקו מלא ובמתיחה בקווים מקוקווים. סוג הכוח בכל מוט נקבע לפי סוג הצלע המתאימה בפאון וסוג הקשת בהיטל שלו. (b) דיאגרמת reciprocal שבה מסומנים סוגי הכוחות הפועלים בה. הכוחות במוטות של ה-reciprocal דואלים לכוחות במוטות מתאימים של המסבך המקורי.

2.7 סיכום הפרק

לסיכום, באיור 2.18 נציג את תרשימים הזרימה שראינו באיור 2.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 2.18: תרשימים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 2

פרק 3

דואליות בין מסבכים ומכניזמים על בסיס דואליות בין גרף זרימות FGR וגרף

פוטנציאלים PGR

בפרקים הקודמים ראינו קשר דואלי בין מבנים סטטיים באמצעות *reciprocal*. כעת נציג קשר דואלי בין מסבכים ומכניזמים שנובע מדואליות בתורת הגרפים. הוא מבוסס על ייצוג של מסבכים ומכניזמים כמודלים מתמטיים המבוססים על תורת הגרפים:

גרף זרימות (Flow Graph Representation - FGR)

וגרף פוטנציאלים (Potential Graph Representation - PGR).

הוכח בספרות ששני מודלים אלו דואליים, לכן כל שתי מערכות הנדסיות המיוצגות על ידי מודלים אלו הן דואליות. כיוון שהוכח כי מסבכים מסוימים סטטית ניתנים להצגה על ידי גרף זרימות ואילו מכניזמים על ידי גרף פוטנציאלים, התקבל הקשר הדואלי בין מסבכים למכניזמים.

3.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באור 3.1 מתואר תרשים זרימה של הנושאים אשר יוצגו בפרק 3. בפרק נדבר על שלושת הנושאים העיקריים הבאים:

שלב א': נראה שעל סמך דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים קיימת דואליות בין מסבך מסוים סטטי למכניזם בעל דרגת חופש אחת.

א.1 נראה כי כל מסבך מסוים סטטי ניתן להציג באמצעות גרף זרימות

(Flow Graph Representation-FGR), כאשר נציג כל מוט במסבך על ידי קשת בגרף וכל מפרק

במסבך על ידי צומת בגרף. את הכוח חיצוני הפועל במסבך נציג באמצעות קשת מקור זרימה בגרף.

א.2 נראה כי כל מכניזם בעל דרגת חופש אחת ניתן להציג באמצעות גרף פוטנציאלים

(Potential Graph Representation-PGR), כאשר נציג כל חוליה במכניזם על ידי קשת בגרף וכל

מפרק במכניזם על ידי צומת בגרף. חוליה מניעה במכניזם נציג באמצעות קשת מקור

הפוטנציאלים בגרף.

א.3 נראה שגרף זרימות וגרף פוטנציאלים הם ייצוגים דואלים.

א.4 מהדואליות בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים נקבל שגם מסבך מסוים סטטי דואלי למכניזם

בעל דרגת חופש אחת, כאשר הכוחות במוטות המסבך מתאימים למהירויות קוויות יחסיות של

חוליות במכניזם.

שלב ב': על סמך הדואליות בין מסבכים ומכניזמים נגדיר משתנה חדש בסטטיקה, כוח בפאה (face

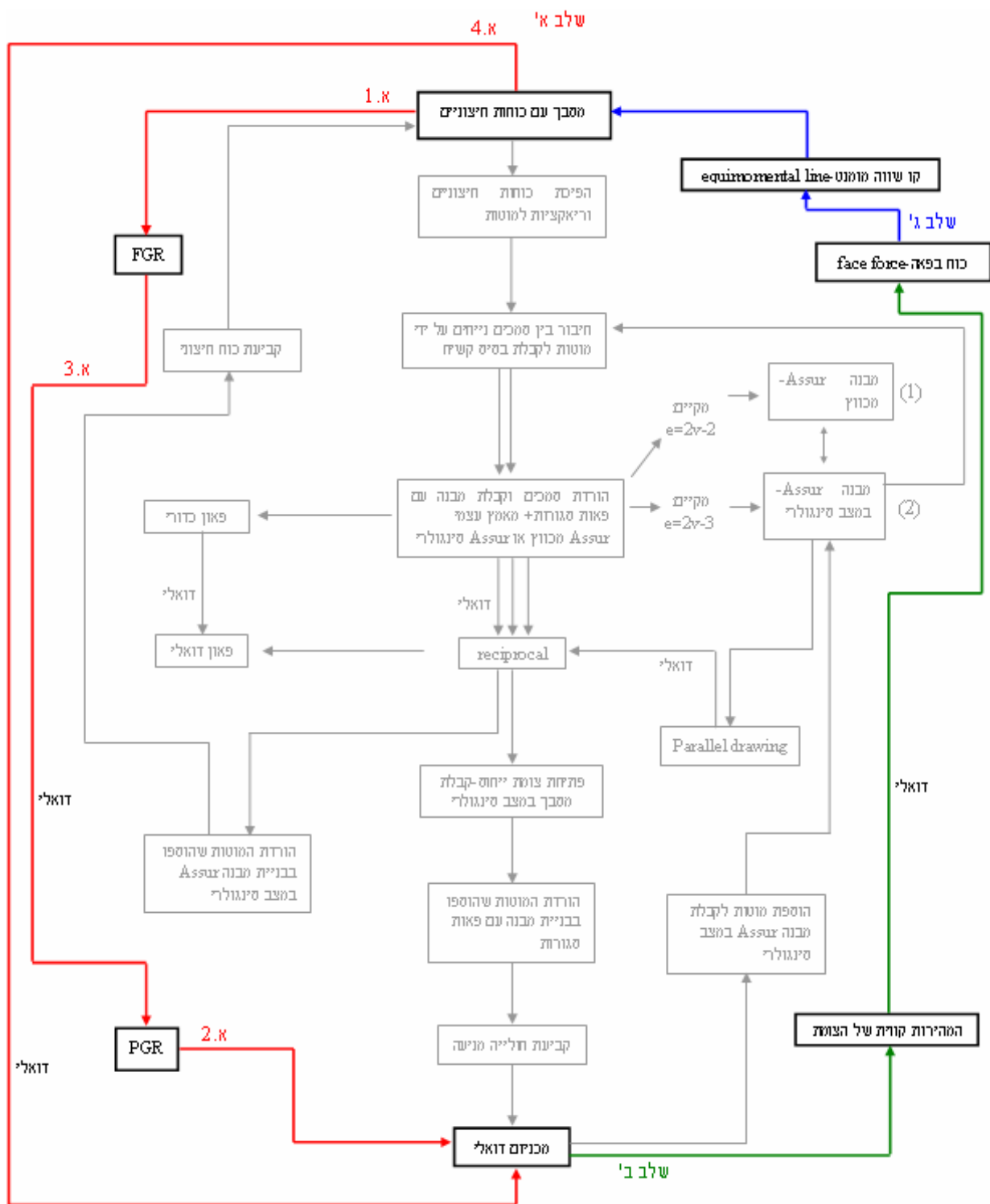
force), שהוא דואלי למהירות קווית של צומת במכניזם.

שלב ג': לאחר שהצגנו כוח בפאה, נראה כי הוא מגדיר לנו משתנה חדש אחר בסטטיקה הנקרא קו שווה

מומנט (equipomental line). נציג שני סוגים של קווים שווי מומנט הקיימים: (א) קו שווה מומנט

מוחלט- שמוגדר בין כוח בפאת ייחוס לבין כוח בפאה כלשהי. (ב) קו שווה מומנט יחסי- שמוגדר בין זוג

כוחות בפאות שאינן פאת ייחוס.



איור 3.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 3

3.2 גרף זרימות וייצוג מסבכים באמצעותו

בסעיף זה יוצג גרף הזרימות, שדווח בספרות, כגון (Shai, 2001a), באמצעותו ניתן לייצג מסבך, כאשר הזרימות בקשתות הגרף מתאימות לכוחות הפועלים במוטות המסבך (Shai, 2001a), (Shai, 2001b). ייצוג זה הביא לגילוי שני משתנים חדשים בסטיקה הנקראים: **כוח בפאה** (face force) ו**קו שווה מומנט** (equipomental line).

3.2.1 גרף זרימות Flow Graph Representation

להלן מספר הגדרות שייעשה בהם שימוש בפרק זה וניתן למצוא אותן בכל ספר בסיסי בתורת הגרפים (Swamy and Thulasiraman, 1981).

מעגל (circuit) זהו מסלול שבו צומת ההתחלה וצומת הסוף הם אותו צומת.

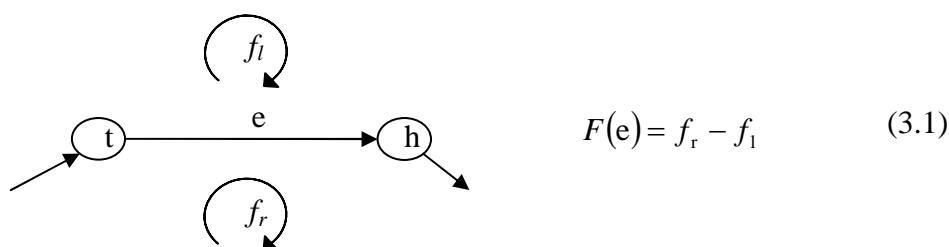
עץ (tree) זהו גרף קשיר חסר מעגלים. **עץ פורס** זהו עץ המכיל את כל צמתי הגרף. הקשתות שיוצרות עץ פורס נקראות ענפים ושאר הקשתות נקראות קישורים.

חתך (cutset) זוהי קבוצת קשתות בגרף, המקיימת:

1. הורדת קשתות של הקבוצה מהגרף הופכת אותו ללא קשיר.

2. כל תת קבוצה שלה אינה מקיימת את תכונה 1.

זרימה בקשת מוגדרת כהפרש זרימות בפאות סמוכות לה. לשם אחידות נקבע כי זו תהיה זרימה בפאה ימנית מינוס זרימה בפאה שמאלית, כמתואר באיור 3.2.



איור 3.2: חישוב ערך הזרימה בקשת

מטריצת החתכים Q (Cutset Matrix) מתארת את החתכים הבסיסיים של הגרף. מספר העמודות של המטריצה שווה למספר הקשתות בגרף ומספר השורות בה שווה למספר הענפים בעץ פורס. כל איבר במטריצה יכול להיות $+1$, 0 או -1 . איבר זה יהיה $+1$ אם קשת j נמצאת בחתך המוגדר על ידי ענף i וכיוונה בכיוון חתך, -1 אם כיוונה מנוגד לכיוון החתך ו- 0 אם היא לא נמצאת בחתך.

חוק הזרימות אומר שסכום וקטורי הזרימות בכל חתך גרף G שווה לאפס. יש לשים לב, שחוק הזרמים של קירכהוף (KCL - Kirchoff's Current Law), הידוע בתורת החשמל (Franco, 1995), זהו מקרה פרטי (חד מימדי) של חוק הזרימות המוכלל הרב מימדי. ייצוג מטריציוני של חוק הזרימות הוא:

$$\vec{Q} \cdot \vec{F} = 0 \quad (3.2)$$

כאשר \vec{Q} היא מטריצת החתכים ו- \vec{F} הוא וקטור הזרימות בקשתות הגרף.

גרף זרימות (Flow Graph) זהו גרף מכון G , שניתן להגדיר זרימות בכל הקשתות של הגרף, כך שהן יקיימו את חוק הזרימות. באמצעות גרף זרימות FGR ניתן לייצג קבוצה גדולה של מערכות הנדסיות דו

ותלת-מימדיות, לדוגמה מסבכים מסוימים סטטית, מעגלים חשמליים פשוטים וכו'. במסגרת העבודה הזאת נשתמש בסוג גרף זה על מנת לייצג מסבכים מסוימים סטטית.

3.2.2 ייצוג של מסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות

כל מסבך מסוים סטטית ניתן לייצג באמצעות גרף זרימות, כאשר המפרקים והמוטות במסבך מיוצגים בגרף על-ידי צמתים וקשתות, בהתאמה. את הכוחות הפועלים במוטות המסבך נייצג על ידי זרימות בקשתות הגרף. מסבך יכול להיות חד, דו או תלת מימדי לכן, גם הזרימות בגרף יהיו בהתאם. כיוון שהכוחות במוטות המסבך מתאימים לזרימות בקשתות הגרף וסכום הכוחות בכל צומת שווה לאפס, אזי הם מקיימים את חוק הזרימות. בגרף זרימות קיים משתנה נוסף והוא זרימה בפאה, כאשר זרימה בכל קשת מוגדרת על ידי הפרש בין זרימות בפאות הסמוכות לה. בייצוג המסבך על ידי גרף זרימות ישנו משתנה המתאים לזרימה בפאה, שבאמצעותו ניתן יהיה להגדיר כוחות במוטות. את המשתנה הזה נגלה בהמשך הפרק.

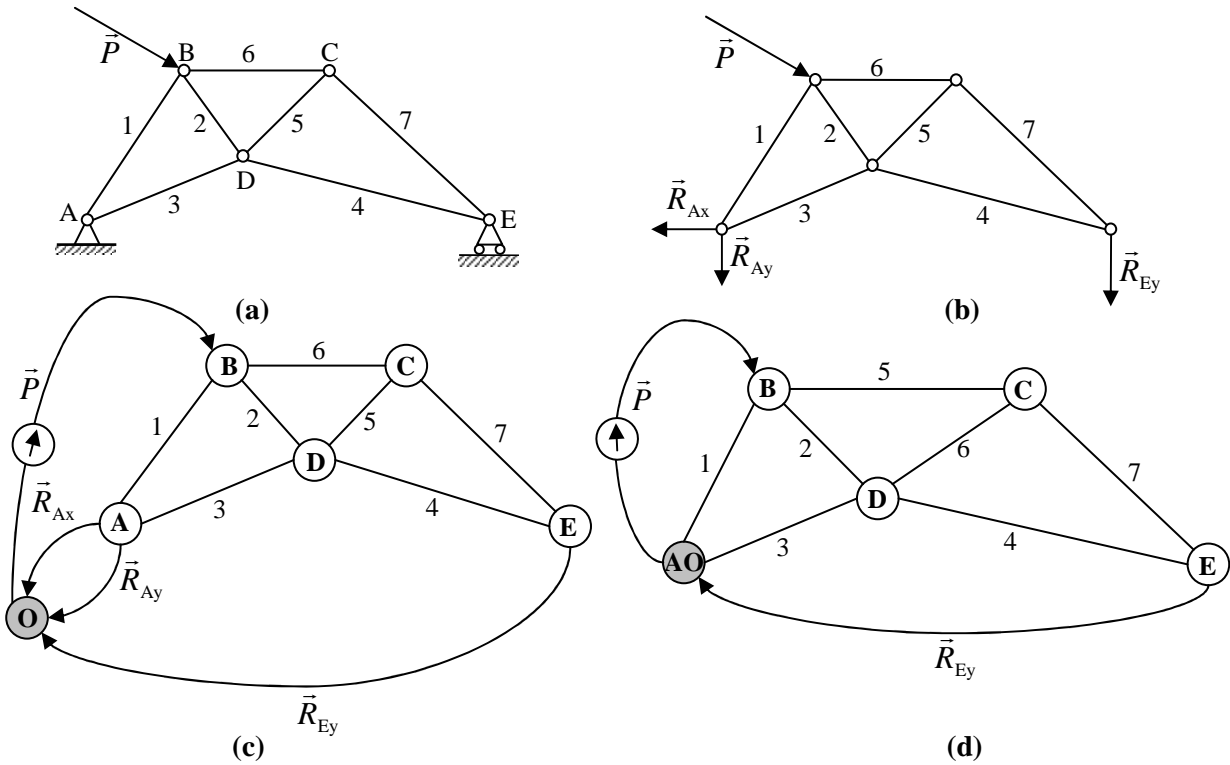
3.2.3 שלבי הבנייה של גרף הזרימות למסבך

נחלק את בניית הגרף לשני שלבים עיקריים: שלב ראשון הוא בניית הטופולוגיה של המסבך המתארת חיבור של מוטות למפרקים, צמתים עליהם פועלים כוחות חיצוניים וריאקציות. שלב שני הוא הוספת הגיאומטריה של המסבך המתארת את שיפועי המוטות (שיפועי הכוחות הפועלים במוטות), של כוחות חיצוניים וריאקציות. בניית טופולוגיה:

- א. האדמה מיוצגת על-ידי צומת מיוחד, שיקרא-צומת ייחוס.
- ב. כל מפרק במסבך מיוצג על-ידי צומת בגרף.
- ג. כל מוט במסבך מיוצג על-ידי קשת בגרף, כאשר שני צמתי הקצה של הקשת מתאימים לשני מפרקים המחברים את המוט למסבך.
- ד. את הכוח החיצוני הפועל על המסבך נייצג כקשת עם מקור זרימה המחברת בין צומת הייחוס לבין הצומת המתאים למפרק בו פועל כוח.
- ה. את הריאקציות הנוצרות במפרקי המסבך כתוצאה מהפעלת הכוח נייצג כקשתות בגרף המחברות בין צומת ייחוס לבין צמתים המתאימים למפרקים בהם פועלות אותן ריאקציות. הוספת גיאומטריה:

- א. קביעה שרירותית של כיווני קשתות הגרף למעט קשתות מקורות זרימה.
- ב. קביעת שיפועי המוטות שהינם למעשה הכוחות הפועלים במוטות, שיפועי כוח חיצוני וריאקציות. שיפוע נקבע כאשר אנחנו נמצאים בצומת הזנב של הקשת המתאימה ומוודדים זווית מציר X החיובי עד לקשת בכיוון נגד כיוון השעון.

3.2.4 דוגמה לבניית טופולוגיה של גרף הזרימות למסבך



איור 3.3: דוגמה לתיאור שלבי בניית גרף הזרימות

(a) מסבך מסוים סטטית שפועל עליו כוח חיצוני. (b) דיאגרמת גוף קשיח של המסבך הנתון. (c) גרף זרימות המתאים למסבך הנתון ב-(a). (d) גרף זרימות לאחר צמצום קשתות מקבילות המתאימות לריאקציות במסך הנייח.

3.3 גרף פוטנציאליים וייצוג מכניזמים באמצעותו

סעיף זה יציג גרף פוטנציאליים שבאמצעותו ניתן לייצג מכניזם (Shai, 2001a), כאשר הפרשי הפוטנציאליים בקשתות הגרף מתאימים למהירויות קוויות יחסיות של החוליות במכניזם ופוטנציאליים של הצמתים מתאימים למהירויות קוויות מוחלטות של המפרקים במכניזם (Shai, 2001a; 2001b).

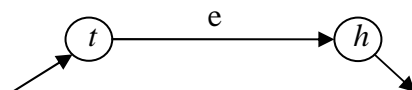
3.3.1 גרף הפוטנציאליים Potential Graph Representation

נגדיר מספר מושגים בתורת הגרפים שייעשה בהם שימוש בפרק הזה. להרחבה על תורת הגרפים ניתן להיעזר בכל ספר בסיסי בנושא (Swamy and Thulasiraman, 1981).

מטריצת מעגלים B (Circuit Matrix) מתארת את מעגלי הגרף. מספר העמודות של המטריצה שווה למספר הקשתות בגרף ומספר השורות בה שווה למספר הקישורים בגרף. כל איבר במטריצה יכול להיות +1, 0 או -1. איבר זה יהיה +1 אם קשת j נמצאת במעגל המוגדר על ידי קישור i וכיוונה בכיוון חתך, -1 אם כיוונה מנוגד לכיוון המעגל ו-0 אם היא לא נמצאת במעגל.

הפרש פוטנציאליים בקשת מוגדר כפוטנציאל של צומת הראש מינוס פוטנציאל של צומת הזנב, ראה איור

3.4



$$\Delta(e) = \pi_h - \pi_t \quad (3.3)$$

איור 3.4: חישוב ערך הפרש הפוטנציאליים בקשת

חוק הפוטנציאלים אומר, שסכום וקטורי הפרשי הפוטנציאלים בכל מעגל של גרף G שווה לאפס. גם במקרה הזה, ניתן לראות שחוק הפוטנציאלים של קירכהוף, הקיים בתורת החשמל (Franco, 1995), הוא מקרה פרטי של חוק הפוטנציאלים המוכלל הרב מימדי. ייצוג מטריציוני של חוק הפוטנציאלים הוא:

$$\vec{B} \cdot \vec{\Delta} = 0 \quad (3.4)$$

כאשר \vec{B} היא מטריצת המעגלים ו- $\vec{\Delta}$ הוא וקטור הפרשי הפוטנציאלים בקשתות הגרף. **גרף הפוטנציאלים** (Potential Graph) הוא גרף מכון G , שהפרשי הפוטנציאלים בקשתות אינם תלויים בזרימות בקשתות, ומקיימים את חוק הפוטנציאלים. באמצעות גרף פוטנציאלים PGR ניתן לייצג מערכות הנדסיות רב מיימדיות כמו מכניזמים, מעגלים חשמליים פשוטים, מערכות גלגלי שיניים וכו'. במסגרת עבודה זו נמצא את גרף הזרימות מתאים למסבך כלשהו, נבנה לו גרף הפוטנציאלים דואלי, ועבורו נמצא מכניזם דואלי למסבך.

3.3.2 ייצוג של מכניזם בעל דרגת חופש אחת באמצעות גרף הפוטנציאלים

כל מכניזם בעל דרגת חופש אחת ניתן לייצג באמצעות גרף פוטנציאלים, כאשר למפרקי המכניזם יתאימו צמתים בגרף ולחוליות יתאימו קשתות. את המהירויות הקוויות היחסיות של החוליות נייצג כהפרשי הפוטנציאלים בקשתות של הגרף. כמו במקרה של המסבך, מכניזם יכול להיות בעל מימד אחד, דו-מימדי או תלת מימדי, ולכן גם הפרשי הפוטנציאלים יהיו בהתאם. כיוון שהמהירויות הקוויות היחסיות של החוליות במכניזם מתאימות להפרשי הפוטנציאלים בקשתות הגרף, וסכום המהירויות היחסיות בכל מעגל שווה לאפס, אזי הן מקיימות את חוק הפוטנציאלים. בסעיף הקודם ראינו שהפרש פוטנציאלים בקשתות הוא הפרש פוטנציאלים של צמתי הקצה שלה, ובקינמטיקה ידוע שהמהירות היחסית של החוליה במכניזם שווה להפרש המהירויות המוחלטות של המפרקים המחברים את החוליה למכניזם. כיוון שבייצוג זה פוטנציאלים מייצגים מהירויות, ניתן להסיק שפוטנציאלים של צמתים בגרף מתאימים למהירויות מוחלטות של מפרקים במכניזם.

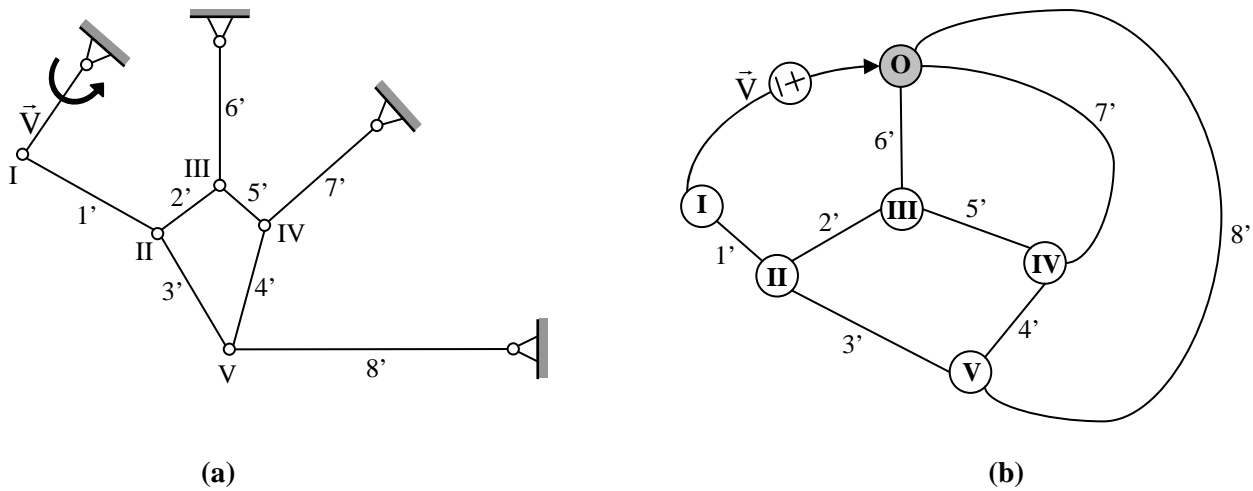
3.3.3 שלבי בניית גרף הפוטנציאלים עבור מכניזם

גם במקרה הזה נחלק את בניית הגרף לשני שלבים עיקריים: שלב ראשון הוא בניית הטופולוגיה של המכניזם המתארת את החיבור בין החוליות למפרקים ואת מיקומה של החוליה המניעה. שלב שני הוא הוספת הגיאומטריה של המכניזם המתארת את שיפועי המהירויות היחסיות של חוליות המכניזם. בניית טופולוגיה:

- א. נצייר צומת ייחוס בגרף שמייצג חיבור לחוליית אדמה (בסיס).
- ב. עבור כל מפרק במכניזם נצייר צומת בגרף.
- ג. עבור כל חוליה במכניזם נצייר קשת בגרף, כאשר שני צמתי הקצה של הקשת מתאימים לשני המפרקים המחברים את החוליה למכניזם.
- ד. נייצג חוליה מניעה של המכניזם כקשת עם מקור הפרש פוטנציאלים. הוספת גיאומטריה:
- א. קביעה שרירותית של כיווני הקשתות של הגרף.

ב. קביעת שיפועי המהירויות הקוויות היחסיות של החוליות במכניזם. יש לזכור שמהירות קווית יחסית ניצבת לחוליה, ולכן שיפועה נמדד כאשר אנחנו נמצאים בצומת הזנב של הקשת המתאימה ומודדים את הזווית מציר ה-X בכיוון נגד כיוון השעון.

3.3.4 דוגמה לבניית הטופולוגיה של גרף הפוטנציאלים עבור מכניזם



איור 3.5: תיאור מכניזם בעל דרגת חופש אחת וגרף פוטנציאלים המתאים לו (a) מכניזם. (b) גרף פוטנציאלים המתאים למכניזם שנתון ב-(a).

3.4 דואליות בין מסבכים למכניזמים על בסיס דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים

בסעיפים הקודמים בנינו גרף זרימות המתאים למסבך מסוים סטטי וגרף פוטנציאלים המתאים למכניזם בעל דרגת חופש אחת. בסעיף זה נראה על בסיס דואליות מתורת הגרפים ששתי מערכות אלו הן מערכות דואליות.

3.4.1 גרף דואלי

לפני שנראה את הדואליות בין מסבכים מסוימים סטטיים ומכניזמים בעלי דרגת חופש אחת, נציג כלי טופולוגי חשוב והוא גרף דואלי (Gibbons, 1985). גרף דואלי ניתן לבנות לכל גרף מישורי, כאשר נקרא לגרף המקורי גרף פרימלי.

3.4.2 קשר בין גרף פרימלי לבין גרף דואלי

בסעיף זה נסכם בטבלה את הקשר בין גרף פרימלי וגרף דואלי.

גרף דואלי	גרף פרימלי
צומת	פאה
פאה	צומת
קשת	קשת

טבלה 3.1: תיאור הקשר בין גרף פרימלי וגרף דואלי

3.4.3 שלבים לבניית הגרף הדואלי לגרף לא מכוון

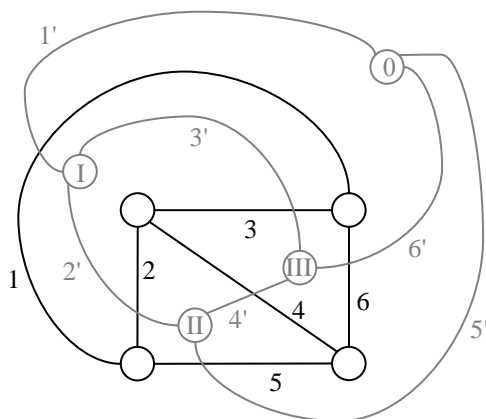
כדי לבנות גרף דואלי לגרף כלשהו יש לבצע את השלבים הבאים.

- א. סימון פאות: נסמן בספרות רומיות את הפאות בגרף הפרימלי, כולל פאת ייחוס (פאת אפס).
- ב. סימון קשתות: נסמן במספרים את הקשתות בגרף הפרימלי.
- ג. בניית צמתים דואלים: לכל פאה בגרף הפרימלי נתאים צומת בגרף דואלי.
- ד. בניית קשתות דואליות: לכל קשת בגרף הפרימלי שמפרידה בין שתי פאות נצייר קשת המחברת בין שני צמתים מתאימים לאותן פאות בגרף הדואלי.

3.4.4 דוגמה לבניית גרף דואלי

באיור 3.6 ניתן לראות דוגמה לבניית גרף דואלי.

- א. סימון פאות: בדוגמה שלנו בגרף הפרימלי יש ארבע פאות שנסמן מ-0 עד III.
- ב. סימון קשתות: בגרף הפרימלי יש שש קשתות שנסמן מ-1 עד 6.
- ג. בניית צמתים דואלים: לכל פאה בגרף הפרימלי נבנה צומת בגרף דואלי, כאשר בדוגמה שלנו נבנה ארבעה צמתים.
- ד. בניית קשתות דואליות: בגרף הפרימלי יש לנו שש קשתות, לכן גם בגרף דואלי יהיו לנו שש קשתות. לדוגמה עבור קשת 1 בגרף הפרימלי נבנה קשת מתאימה 1' בגרף דואלי.



איור 3.6: דוגמה לבניית גרף דואלי.
הגרף השחור הוא גרף פרימלי והאפור גרף דואלי.

3.4.5 דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים

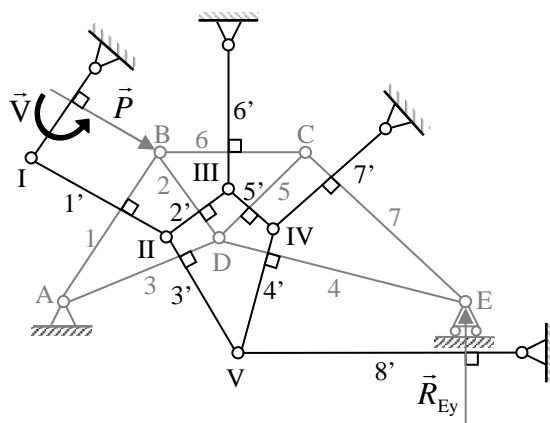
נניח שהגרף הפרימלי הוא גרף פוטנציאלים. אם כך הרי שערך הפוטנציאל של צומת בגרף הפרימלי יהיה שקול לערך הזרימה בפאה המתאימה בגרף דואלי, ולהיפך. מכאן, ערך הפרש פוטנציאלים בקשת בגרף הפרימלי שקול לערך הזרימה בקשת המתאימה בגרף הדואלי, ולהיפך. נסכם זאת באופן הבא: גרף דואלי של גרף זרימות מקיים חוק הפוטנציאלים ואילו גרף דואלי של גרף פוטנציאלים מקיים חוק זרימות. ובצורה מטריציונית, אם גרף G הוא גרף זרימות וגרף G^* הוא גרף דואלי, אזי מתקיים:

$$\Delta(G^*) = F(G) \quad (3.5)$$

יש לשים לב שגרף זרימות וגרף פוטנציאלים אלה גרפים אורטוגונלים, כלומר כיווני הזרימות והפרשי פוטנציאלים מאונכים זה לזה.

3.4.6 דואליות בין מסבכים מסוימים סטטית ומכניזמים בעלי דרגת חופש אחת

נסכם מה שנאמר עד עכשיו. ראשית, ניתן לייצג מסבך מסוים סטטית באמצעות גרף זרימות ומכניזם בעל דרגת חופש אחת באמצעות גרף פוטנציאלים. דבר שני, הראנו שהגרפים האלו דואלים. מכאן ניתן להסיק שמסבך מסוים סטטית דואלי למכניזם בעל דרגת חופש אחת. אם הזרימות בקשתות של גרף הזרימות מייצגות כוחות הפועלים במוטות המסבך, והפרשי הפוטנציאלים בקשתות גרף הפוטנציאלים מייצגים את המהירויות יחסיות של חוליות המכניזם, וכיוון שהזרימות בקשתות של גרף הזרימות מתאימות להפרשי הפוטנציאלים בקשתות של גרף הפוטנציאלים הדואלי לו, ניתן לומר כי כוחות הפועלים במוטות המסבך מתאימים למהירויות היחסיות של חוליות המכניזם הדואלי. כיוון שזרימות מאונכות להפרשי פוטנציאלים, הכוחות במוטות המסבך יהיו מאונכים למהירויות היחסיות של המכניזם ושווים בגודלם, וכדי לקבל זאת יש למקם את מוטות המסבך ב- 90° לחוליות המכניזם הדואלי. באיור 3.7 מתוארים מסבך מסוים סטטי ומכניזם בעל דרגת חופש אחת הדואלים אחד לשני.



איור 3.7: תיאור המסבך מסוים סטטי והמכניזם הדואלי לו מכניזם מצויר בשחור והמסבך הדואלי באפור.

3.4.7 שלבים לבניית מכניזם דואלי ממסבך

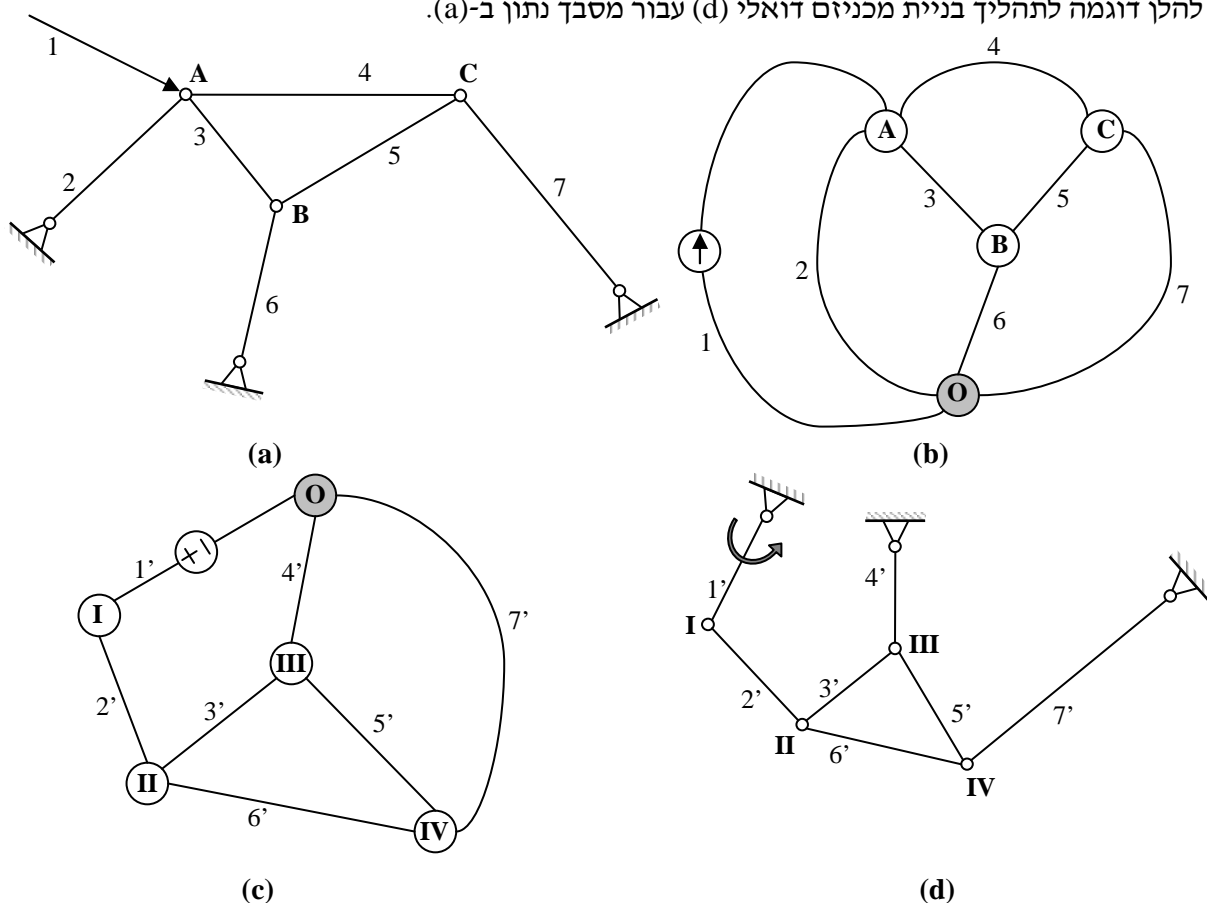
נפרט מה הם השלבים לקבלת מכניזם דואלי ממסבך מסוים סטטי, כאשר השיטה מבוססת על הדואליות הקיימת בתורת הגרפים.

נניח כי נתון מסבך מסוים סטטית.

- בניית גרף זרימות: נבנה גרף זרימות המתאים למסבך נתון.
- בניית גרף דואלי: נבנה גרף פוטנציאלים כך שיהיה דואלי לגרף זרימות.
- קבלת מכניזם דואלי: מגרף הפוטנציאלים נבנה מכניזם מתאים בעל דרגת חופש אחת שהוא דואלי למסבך המקורי.

3.4.8 דוגמה לקבלת מכניזם דואלי ממסבך

להלן דוגמה לתהליך בניית מכניזם דואלי (d) עבור מסבך נתון ב-(a).



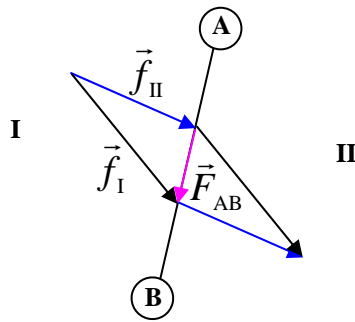
איור 3.8: דוגמה לקבלת מכניזם בעל דרגת חופש אחת ממסבך מסוים סטטי על בסיס דואליות בתורת הגרפים
 (a) מסבך מסוים סטטי. גרף זרימות המתאים למסבך ב-(a). (c) גרף פוטנציאלים דואלי לגרף זרימות ב-(b).
 (d) מכניזם בעל דרגת חופש אחת המתאים לגרף פוטנציאלים שמיוצג ב-(c).

3.5 כוחות בפאה וקווים שווי מומנט

בסעיף זה נציג את שני משתנים חדשים בסטטיקה, כוח בפאה וקו שווה מומנט ונראה לאיזה משתנים הם מתאימים במערכת הדואלית.

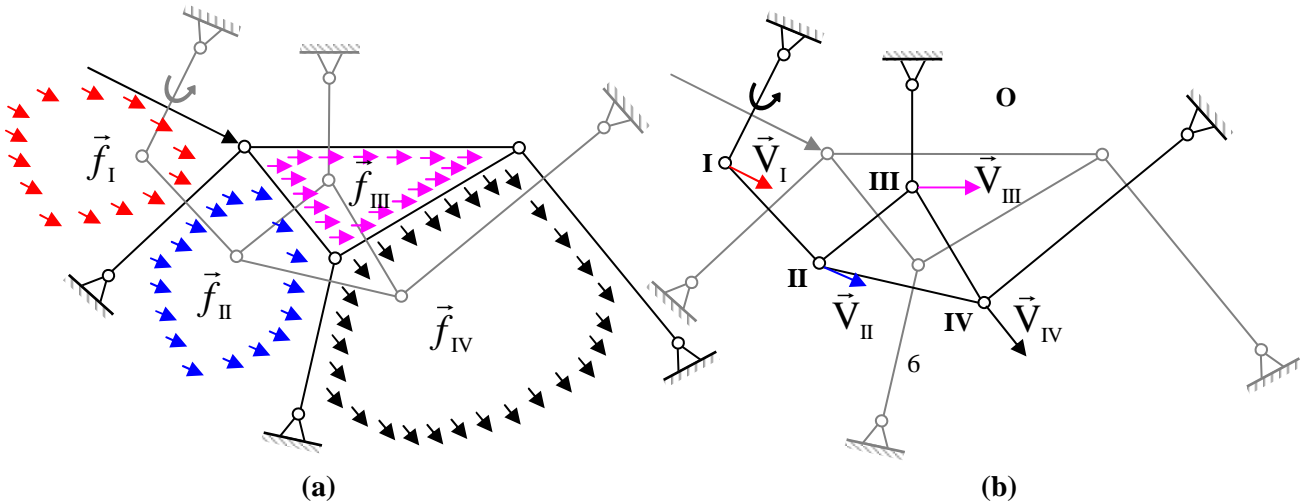
3.5.1 כוח בפאה face force

ראינו שזרימות בקשתות גרף זרימות מייצגות את הכוחות הפועלים במוטות המסבך המתאים. ראינו גם שמלבד לזרימות בקשתות ישנן זרימות בפאות הגרף. מכאן נשאלת השאלה מה מייצגות זרימות בפאה? מהקשר הקיים בין זרימות לכוחות התגלה ודווח בעבר משנתה חדש בסטטיקה והוא "כוח בפאה" (Shai, 2002) (face force). מהקשר האומר כי זרימה בקשת שווה להפרש הזרימות בין הפאה הימנית והפאה השמאלית, ניתן להסיק כי כוח במוט שווה להפרש בין כוח בפאה ימנית וכוח בפאה שמאלית, כמתואר באיור 3.9.



איור 3.9: מציאת כוח במוט על ידי הפרש בין כוחות בפאות הסמוכות לאותו מוט

בנוסף לכך, ראינו כי כוח במוט של המסבך מתאים למהירות יחסית של החוליה במכניזם הדואלי. אז נשאלת שאלה נוספת, לאיזה משתנה מתאימה מהירות מוחלטת של צומת במכניזם? לצורך זיהוי נחזור לקשרים הקיימים. צמתים במכניזם מתאימים לפאות במסבך הדואלי ומהירויות במכניזם מתאימות לכוחות במסבך, כאשר אם נסכם ביחד את הדברים, נראה כי מהירות של הצומת במכניזם שקולה לכוח בפאה במסבך הדואלי. **באיור (a) 3.10** ניתן לראות את הכוחות בפאות של המסבך הנתון, ו**באיור (b) 3.10** את המהירויות של הצמתים המתאימים לפאות במכניזם הדואלי.

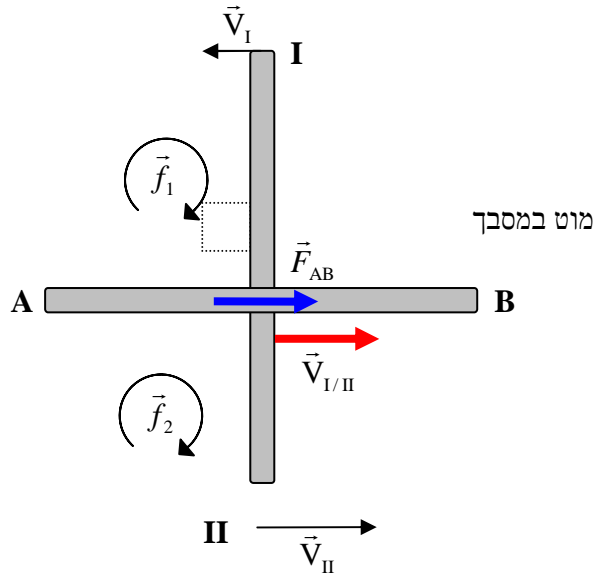


איור 3.10: דואליות בין מהירויות קוויות מוחלטות של צמתים במכניזם וכוחות בפאות המתאימות במסבך הדואלי (a) כוחות בפאות של המסבך. (b) מהירויות ליניאריות מוחלטות מתאימות במכניזם דואלי.

3.5.2 קשר בין כוחות במסבך ומהירויות יחסיות במכניזם הדואלי

כידוע מקינמטיקה, מהירות יחסית של החוליה במכניזם שווה להפרש וקטורי בין מהירויות מוחלטות של צמתי הקצה של החוליה. כיוון שמהירויות בצמתים במכניזם שקולות לכוחות בפאות מתאימות במסבך ומהירויות יחסיות של החוליות במכניזם שקולות לכוחות במוטות במסבך, אזי ניתן להסיק שכוח הפועל לאורך המוט במסבך שווה להפרש וקטורי בין כוחות בפאות הסמוכות לאותו מוט. ניתן לראות את הקשר בין מהירויות וכוחות **באיור 3.11**.

חוליה המתאימה במכניזם הדואלי

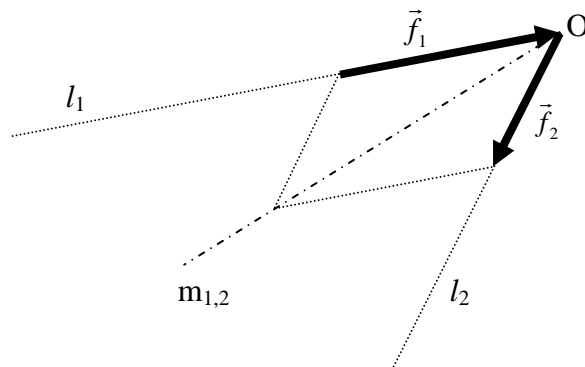


$$\begin{aligned}\vec{V}_I &= \vec{f}_1 \\ \vec{V}_{II} &= \vec{f}_2 \\ \vec{V}_{I/II} &= \vec{V}_I - \vec{V}_{II} \\ \vec{F}_{AB} &= \vec{f}_1 - \vec{f}_2 \\ \vec{F}_{AB} &= \vec{V}_{I/II}\end{aligned}$$

איור 3.11: תיאור הקשר בין כוח שפועל במוט של המסבך ומהירות יחסית של החוליה במכניזם הדואלי
 כוח בפאה של המסבך שקול למהירות של הצומת המתאימה במכניזם הדואלי. כיוון שמהירות יחסית של החוליה שווה להפרש וקטורי בין מהירויות צמתי הקצה של החוליה, כוח במוט במסבך דואלי שווה להפרש וקטורי בין כוחות סמוכות של המסבך המתאימות לאותם צמתיים במכניזם הדואלי.

3.5.3 קווים שווי מומנט

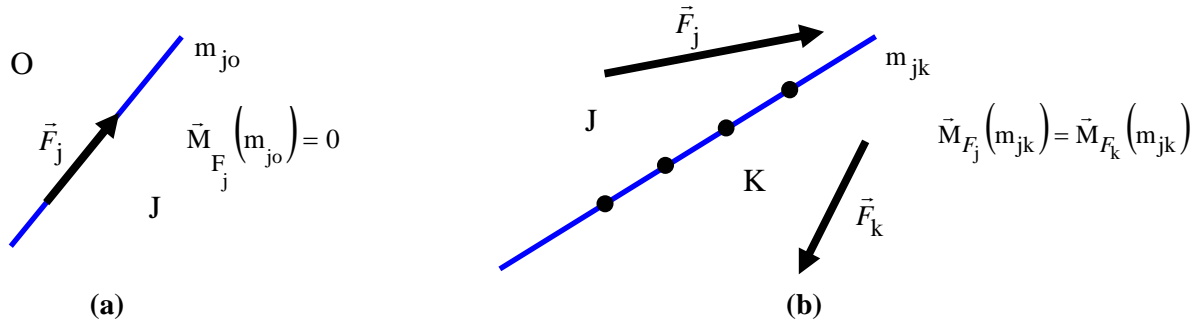
לכל שני כוחות במישור ניתן למצוא קו שהם יוצרים עליו מומנט זהה. קו זה נקרא קו שווה מומנט (equimomental line-EQML) (Shai, 2002). נניח כי נתונים שני כוחות \vec{f}_1 ו- \vec{f}_2 הפועלים לאורך קווים l_1 ו- l_2 בהתאמה. כמובן שקו שווה מומנט של שני כוחות אלו עובר דרך נקודת חיתוך של l_1 ו- l_2 , שהמומנט של שני כוחות בנקודה זו מתאפס, וכיוונו הוא כיוון של וקטור ההפרש שלהם. נסמן את הקו שווה מומנט זה ב- $m_{1,2}$. ניתן לראות את ההדגמה של קו שווה מומנט זה באיור 3.12.



איור 3.12: קבלת קו שווה מומנט $m_{1,2}$ לשני כוחות \vec{f}_1 ו- \vec{f}_2 הפועלים לאורך קווים l_1 ו- l_2 בהתאמה
 קו $m_{1,2}$ זהו מיקום גיאומטרי של כל הנקודות בהן שני כוחות אלו מפעילים מומנט שווה. יש לשים לב ש- $m_{1,2}$ עובר דרך נקודת חיתוך של קווים l_1 ו- l_2 , וכיוונו זהה לכיוון וקטור ההפרש של שני הכוחות.

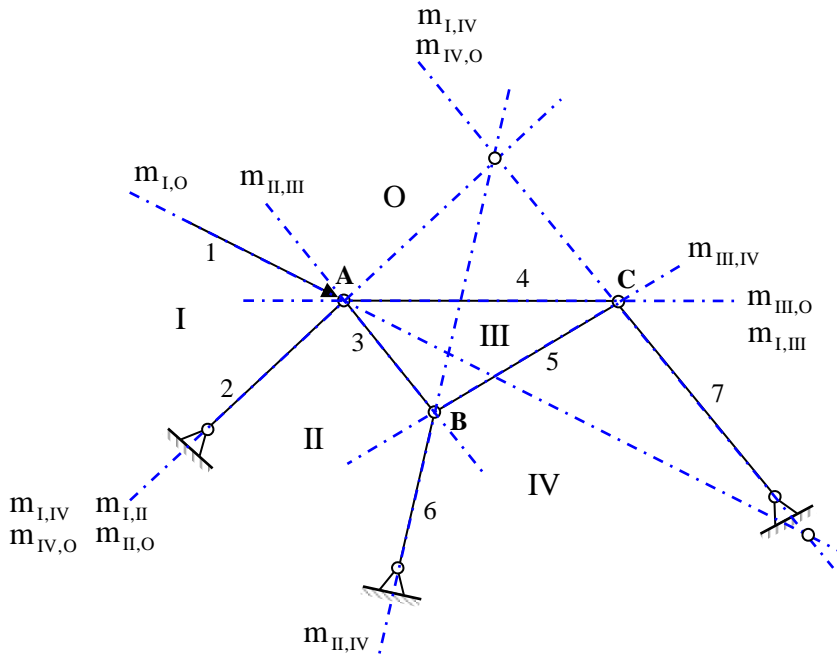
קיימים שני סוגים של קווים שווי מומנט: (א) קווים שווי מומנט מוחלטים. (ב) קווים שווי מומנט יחסיים. ראשית, נדבר על קווים שווי מומנט מוחלטים. בהצגה של פאות במסבך קובעים אחת מהן כייחוס- O וכוח שפועל בה שווה לאפס. מכאן כוח בפאת ייחוס יוצר מומנט שווה לאפס על כל קו שעובר במישור, לכן אם נתבונן על כוח בפאת ייחוס וכוח בפאה אחרת כלשהי- J, קו שווה מומנט שלהם יהיה קו שהם יוצרים עליו

מומנט שווה לאפס. קו יחידי שיענה על דרישה הזו זהו קו פעולה של כוח בפאה I. קו שווה מומנט בין כוח בפאת ייחוס O לכוח בפאה אחרת J נקרא **קו שווה מומנט מוחלט**, ראה איור 3.13 (a). קו שווה מומנט בין כוחות בפאות J ו-K (שאף אחת מהפאות אינה פאת ייחוס) נקרא **קו שווה מומנט יחסי** ראה איור 3.13 (b). יש לשים לב שאם מדובר בפאות סמוכות, אזי קו שווה מומנט יחסי עובר דרך מוט במסבך שמפריד ביניהן.



איור 3.13: תיאור הקו שווה מומנט מוחלט והקו שווה מומנט יחסי
 (a) קו שווה מומנט מוחלט. (b) קו שווה מומנט יחסי.

ניקח לדוגמה מסבך המתואר באיור 3.8 (a) ונניח כי פועלים עליו כוחות כמתואר באיור 3.10 (a). באיור 3.14 מתוארים כל הקווים שווים מומנט של המסבך הזה. בהמשך נראה שיטה למציאת קווים שווים מומנט.

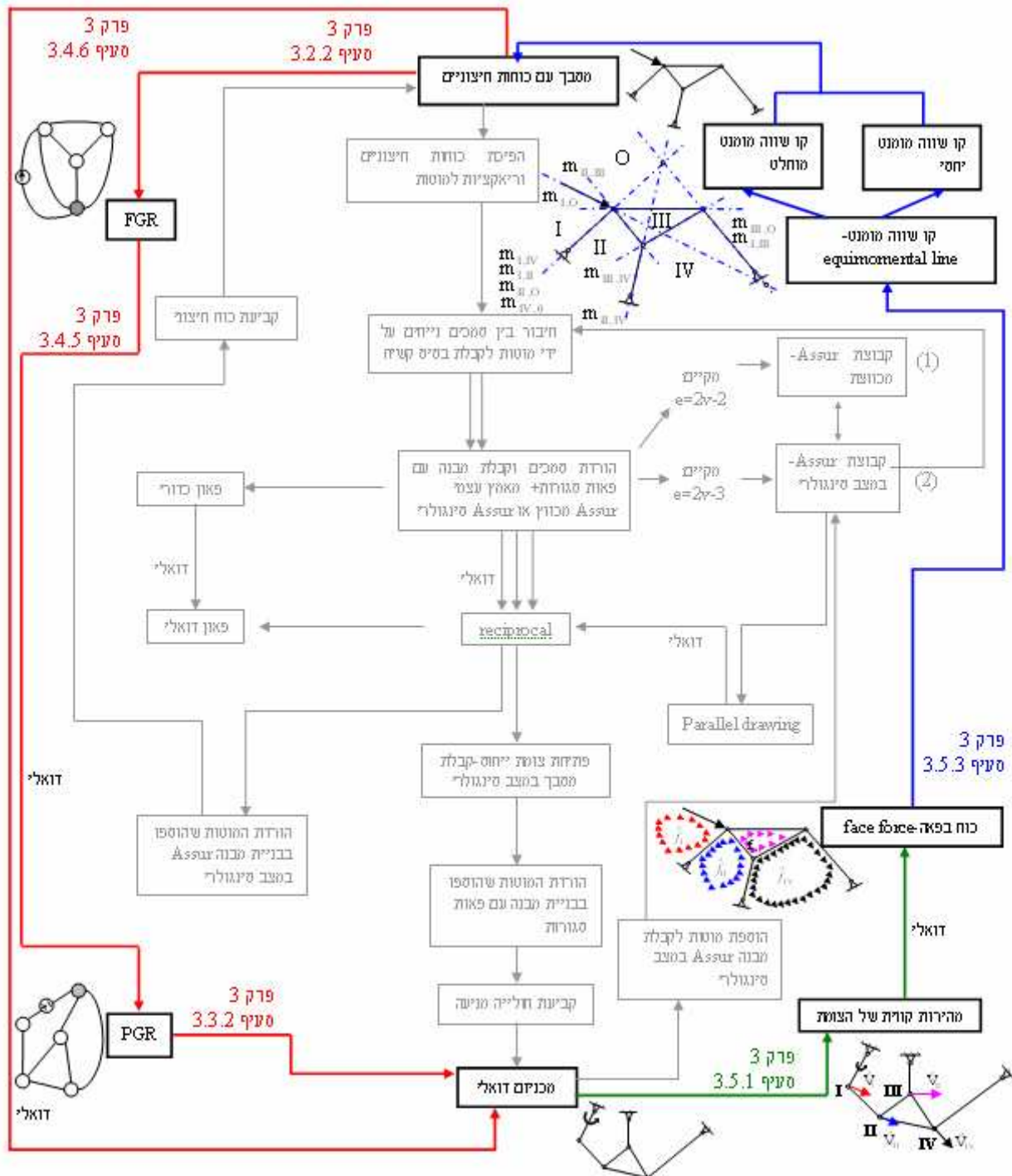


איור 3.14: תיאור הקווים שווים מומנט במסבך

נראה בהמשך גם כי קו שווה מומנט במסבך מתאים למרכז סיבוב רגעי במכניזם הדואלי.

3.6 סיכום הפרק

לסיכום באיור 3.14 נציג את תרשים הזרימה שראינו באיור 3.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 3.14: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 3

פרק 4

קשר בין דואליות של מסבכים ומכניזמים לדיאגרמת reciprocal

נסכם מה ידוע לנו עד כה. בסעיף 2.2 הראינו כי דיאגרמת reciprocal היא למעשה דיאגרמת הכוחות הפועלים במסבך, ובסעיף 3.4.6 הראינו זווית חדשה על הכוחות במסבך. הפעם על בסיס הדואליות מתורת הגרפים התקבל כי הכוחות במוטות המסבך מתאימים למהירויות היחסיות של החוליות במכניזם הדואלי. בפרק זה נקבל זווית ראיה חדשה על ה-reciprocal של המסבך גם כעל דיאגרמת מהירויות המכניזם הדואלי אשר מכונה בקינמטיקה בבואת המהירויות של המכניזם. כאשר ניקח בבואת מהירויות ובעזרת סינתזה נבנה את המכניזם המתאים לה, הוא יהיה דואלי למסבך ממנו התחלנו.

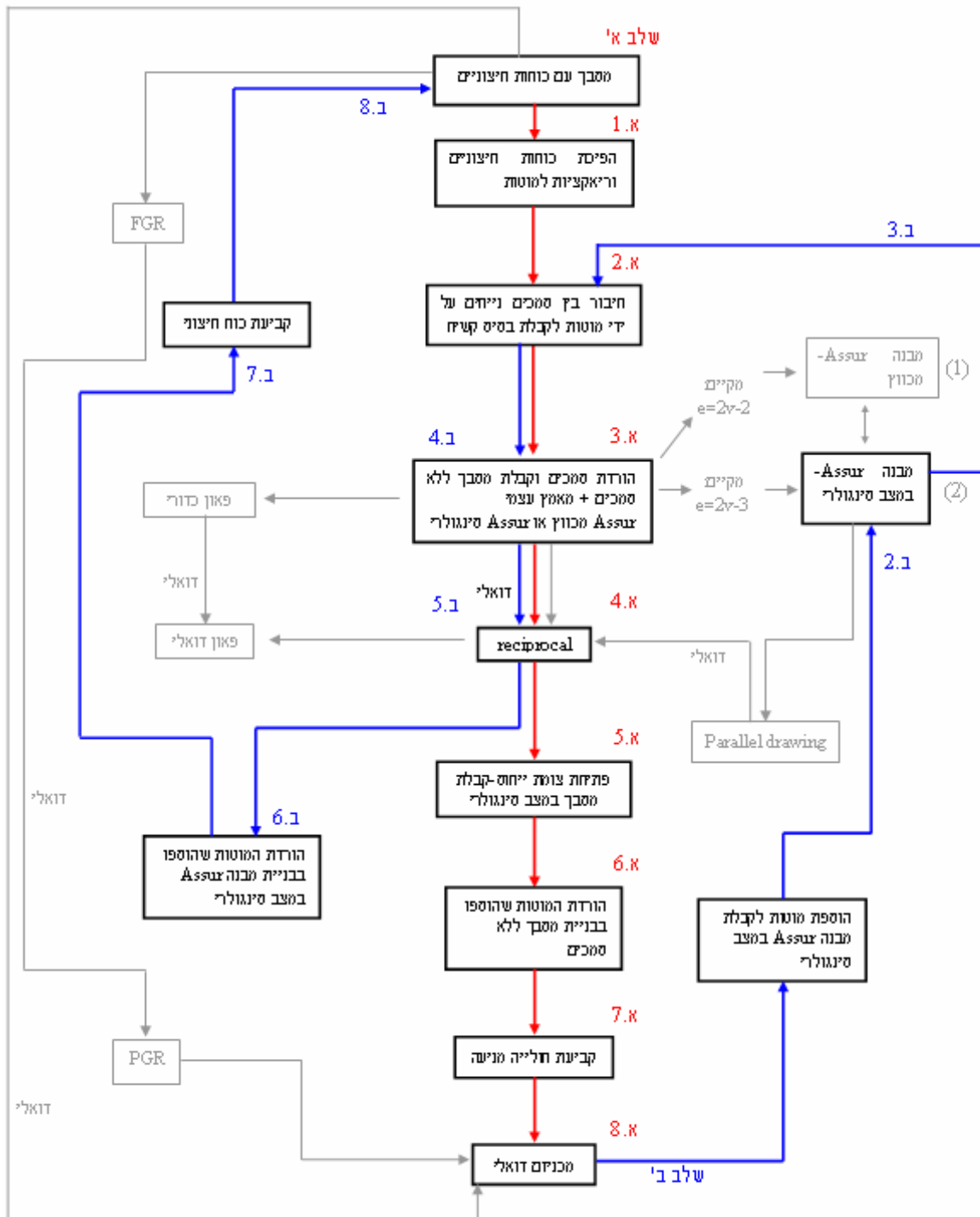
4.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באיור 4.1 ניתן לראות תרשים זרימה של הנושאים שנדבר עליהם בפרק 4. הפרק מחולק לשני שלבים:

שלב א': קבלת מכניזם דואלי למסבך על ידי שימוש בדיאגרמת reciprocal. ניקח לדוגמה מסבך מסוים סטטי.

- א.1 הפיכת כוחות חיצוניים וריאקציות למוטות מחוברים לאדמה.
 - א.2 חיבור בין כל הסמכים הנייחים על ידי מוטות לקבלת בסיס קשיח.
 - א.3 הורדת הסמכים וקבלת מסבך ללא סמכים שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי.
 - א.4 בניית דיאגרמת reciprocal למבנה עם פאות סגורות שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי. נקבל כי ה-reciprocal והמבנה בעל הפאות הסגורות הם מבנים דואלים.
 - *עד כאן המבנה שעבדנו עליו היה מבנה סטטי. משלב זה והלאה נטפל במבנה קינמטי.
 - א.5 פתיחת צומת ייחוס לקבלת מסבך במצב סינגולרי, כלומר מצב בו המסבך אינו יציב סטטית.
 - א.6 הורדת המוטות שהוספו בבניית הבסיס הקשיח (שלב א.2).
 - א.7 קביעת חוליה מניעה במכניזם הדואלי. כוח חיצוני במסבך המקורי מתאים לחוליה מניעה במכניזם הדואלי.
 - א.8 נסובב את המערכת שקיבלנו ב- 90° ונקבל את המכניזם הדואלי.
- שלב ב': קבלת מסבך דואלי למכניזם על ידי שימוש בדיאגרמת reciprocal (תהליך הפוך לזה המפורט בשלב א'). נתחיל ממכניזם.

- ב.1 הוספת מוטות כך שנקבל מבנה Assur במצב סינגולרי.
- ב.2 קבלת מבנה Assur במצב סינגולרי, כלומר, מצב שאינו יציב סטטית.
- ב.3 חיבור בין כל הסמכים הנייחים על ידי מוטות לקבלת בסיס קשיח.
- ב.4 הורדת הסמכים וקבלת מבנה עם פאות סגורות שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי.
- ב.5 בניית דיאגרמת reciprocal למבנה עם פאות סגורות שבכל המוטות שלו פועל מאמץ עצמי.
- ב.6 הורדת המוטות שהוספו בבניית מבנה Assur במצב סינגולרי (שלב ב.1).
- ב.7 קביעת כוח חיצוני במסבך הדואלי. חוליה מניעה במכניזם המקורי מתאימה לכוח חיצוני במסבך הדואלי.
- ב.8 נסובב את המערכת שקיבלנו ב- 90° ונקבל את המסבך הדואלי.



איור 4.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 4

4.2 קבלת מכניזם דואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal

בסעיף הבא נציג איך ניתן לקבל את המכניזם הדואלי למסבך נתון על ידי שימוש בדיאגרמת reciprocal. ראינו שהדיאגרמה מתאימה לכוחות הפועלים במסבך (סעיף 2.2), ובסעיף 3.4.6 ראינו כי כוחות במסבך דואלים למהירויות במכניזם. מכאן נובע שדיאגרמת ה-reciprocal של המסבך שקולה לדיאגרמת המהירויות, המכונה בבואת מהירויות (Maibie and Ovevirk, 1963), ומתאימה למכניזם הדואלי. בתורת המכונות ידוע שעל ידי שימוש בסיתתזה (Erdman and Sandor, 1997), ניתן לקבל מבבואת המהירויות את המכניזם המתאים, לכן ניתן לסכם שמדיאגרמת reciprocal שנבנית למסבך כלשהו נוכל לבנות את המכניזם הדואלי.

4.2.1 שלבי בניית המכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal

- א). הפיכת מסבך עם כוח חיצוני וסמכים למסבך ללא סמכים: שלב זה מתבצע לפי השלבים שפורטו בסעיף 2.3.1.
 - ב). בניית ה-reciprocal המתאים: בשלב הקודם התקבל מבנה שיש בו מאמץ עצמי לכן, ניתן לבנות לו reciprocal על פי השלבים שפורטו בסעיף 2.2.3.
 - ג). פתיחת צומת מתאים לאדמה (צומת ייחוס): ב-reciprocal נפתח את הצומת המתאים לפאת הייחוס במסבך המקורי ובמקומו נשים סמכים קבועים.
 - ד). הורדת הקשתות שהוספו בזמן בניית המסבך ללא סמכים: נוריד את כל הקשתות שהוספנו בשלב א', שנדרשו לבניית מסבך ללא סמכים.
 - ה). קביעת החוליה המניעה: קו המתאים ב-reciprocal לכוח החיצוני הופך להיות החוליה המניעה במכניזם שמתקבל.
 - ו). קביעת שיפועים של החוליות במכניזם: נמקם את החוליות של המכניזם שהתקבל כך שכל חוליה תהיה ניצבת למוט המתאים במסבך המקורי, וכל צומת במכניזם תתאים לפאה המתאימה במסבך.
- עם סיום הפעלת השלבים הנ"ל נקבל מכניזם דואלי למסבך הנתון.

4.2.2 דוגמה 1 לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal

- ניקח לדוגמה את המקרה הפשוט ביותר והוא דיאדה שפועל עליה כוח חיצוני כמתואר באיור 4.2 (a).
- א). הפיכת מסבך עם כוח חיצוני וסמכים למסבך ללא סמכים: נוסיף את מוטות 4, 5 ו-6 כך שניצור מבנה עם פאות סגורות. את המוטות שהוספנו נסמן בצבע אפור בכדי להדגיש כי הם אינם מוטות מקוריים של המסבך, ראה איור 4.2 (b).
 - ב). בניית reciprocal מתאים: במבנה המקורי קימות 4 פאות מ-O עד III ו-4 צמתים מ-A עד D, לכן ב-reciprocal נקבל 4 צמתים מ-O עד III ו-4 פאות מ-A עד D, והקשתות במבנה המקורי מקבילות לקשתות מתאימות ב-reciprocal, ראה איור 4.2 (c).
- הצלחנו לבנות דיאגרמת reciprocal. לכן, המסבך ללא סמכים שהתקבל בשלב א' הוא היטל של פאון, ראה איור 4.2 (d).

ג. פתיחת צומת מתאים לאדמה (צומת ייחוס): נפתח את צומת O שהוא מפגש של שלוש קשתות,

וכך נקבל מבנה המחובר על ידי שלושה סמכים קבועים, ראה איור 4.2 (e).

ד. הורדת הקשתות שהוספו בעת בניית המסבך ללא סמכים: נוריד ב-reciprocal את קשתות 4', 5'

ו-6' המתאימות לקשתות 4, 5 ו-6 במבנה המקורי שהוספו לצורך בניית המסבך ללא סמכים,

ראה איור 4.2 (f).

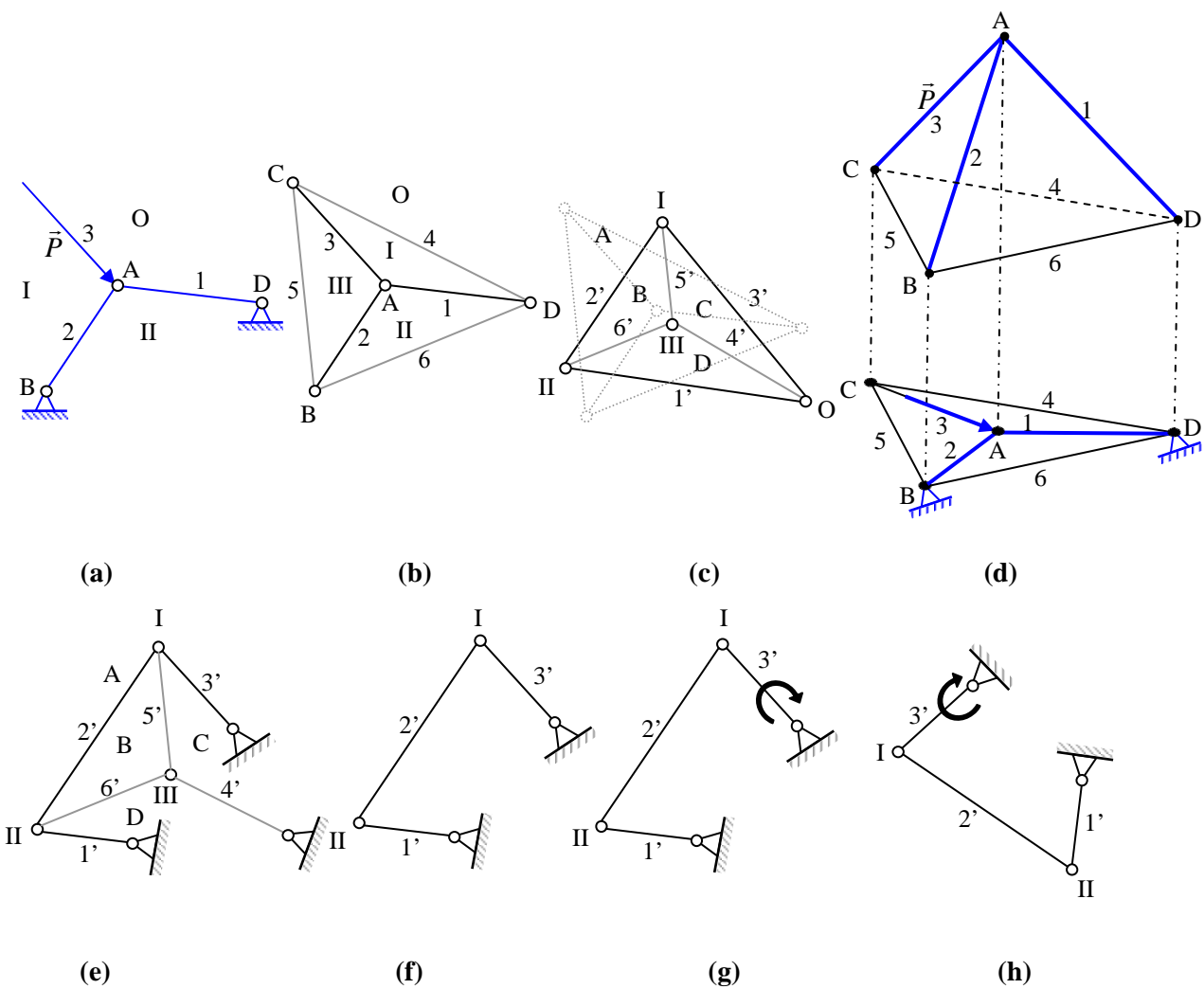
ה. קביעת חוליה מניעה: במבנה המקורי קשת 3 מייצגת כוח חיזוני, לכן, במכניזם שהתקבל, קשת

3' מייצגת חוליה מניעה, ראה איור 4.2 (g).

ו. קביעת שיפועי החוליות במכניזם: נסובב את המכניזם שהתקבל כך שכל חוליה תהיה ניצבת

למוט המתאים במסבך המקורי וצמתים I ו-II במכניזם יתאימו לפאות I ו-II במסבך, ראה איור

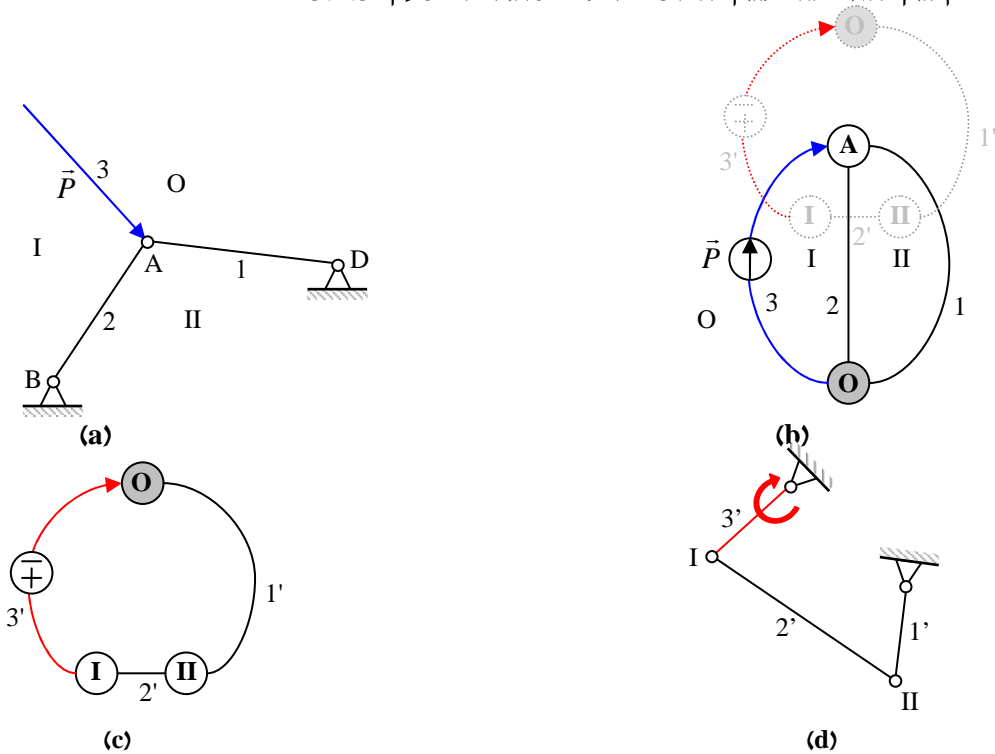
4.2 (h).



איור 4.2: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal

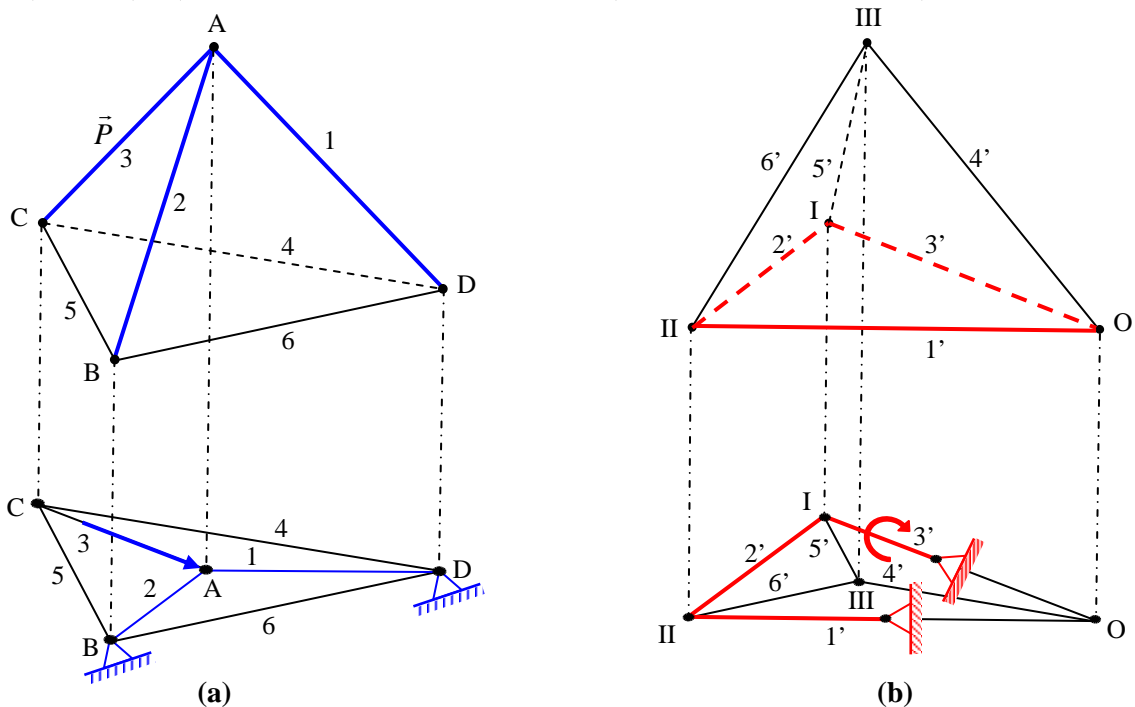
(a) מסבך עם כוח חיזוני. (b) מסבך ללא סמכים שהתקבל ממסבך. (c) דיאגרמת reciprocal. (d) פאון שהיטלו הוא המסבך ללא סמכים. על הפאון ועל ההיטל מסומן החלק המתאים למסבך (בצבע כחול). (e) דיאגרמת reciprocal לאחר הורדת צומת הייחוס O ומיקום הסמכים הקבועים במקומו. (f) מכניזם שהתקבל לאחר הורדת קשתות 4', 5', 6'. (g) קביעת החוליה המניעה 3'. (h) מכניזם הדואלי.

על בסיס הדואליות בין גרף הזרימות לגרף הפוטנציאלים ניתן לקבל את אותו מכניזם, וכל זאת על בסיס הדואליות בין גרף הזרימות לגרף הפוטנציאלים שהראנו בסעיף 3.4.5.



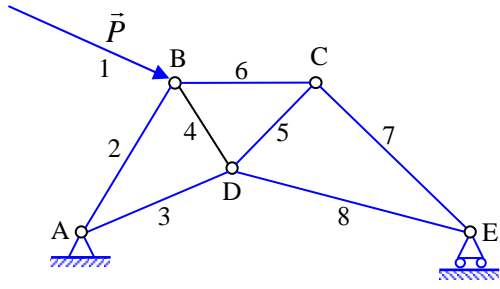
איור 4.3: דוגמה לקבלת המכניזם הדואלי ממסבך על בסיס הדואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים
 (a) מסבך עם כוח חיצוני. גרף זרימות. קשת מקור הזרימה בגרף מתאימה לכוח חיצוני במסבך (בצבע כחול).
 (c) גרף הפוטנציאלים הדואלי. קשת דואלית לקשת מקור הזרימה היא קשת מקור הפוטנציאלים (בצבע אדום).
 (d) המכניזם הדואלי. קשת מקור הפוטנציאלים בגרף מתאימה לחוליה המניעה במכניזם (בצבע אדום).

באיור 4.4 ניתן לראות את המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי.

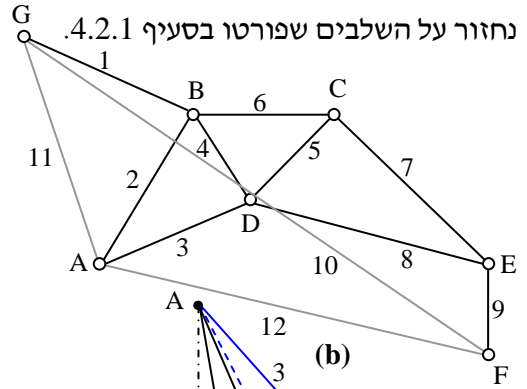


איור 4.4: תיאור המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי
 (a) פאון שהיטל שלו הוא מבנה בעל פאות סגורות שהתקבל ממסבך. על הפאון וההיטל מסומן החלק המתאים למסבך (בצבע כחול).
 (b) על הפאון הדואלי וההיטל שלו מסומן החלק המתאים למכניזם הדואלי (בצבע אדום).

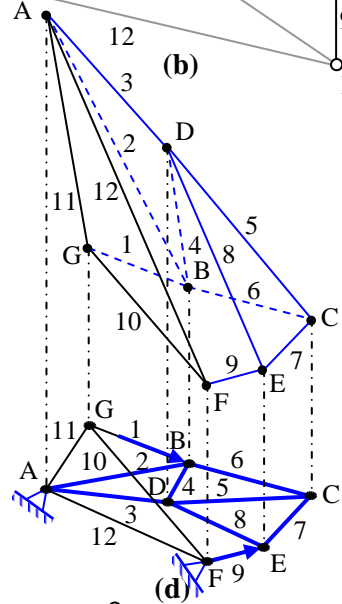
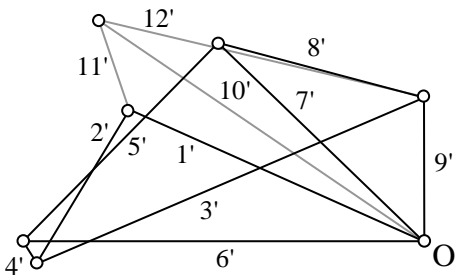
4.2.3 דוגמה 2 לקבלת מכניזם הדואלי למסבך בעזרת דיאגרמת reciprocal



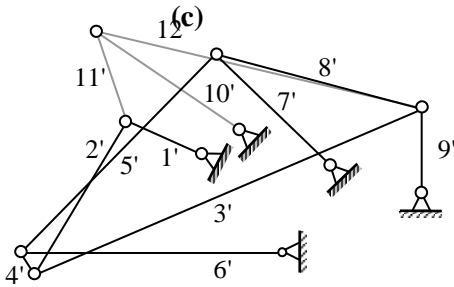
(a)



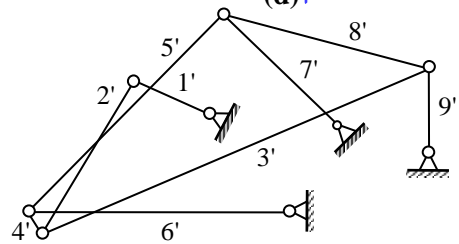
(b)



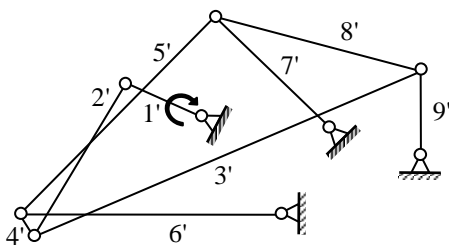
(d)



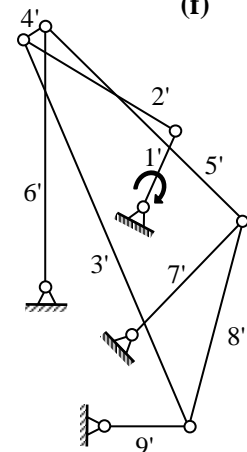
(e)



(f)



(g)

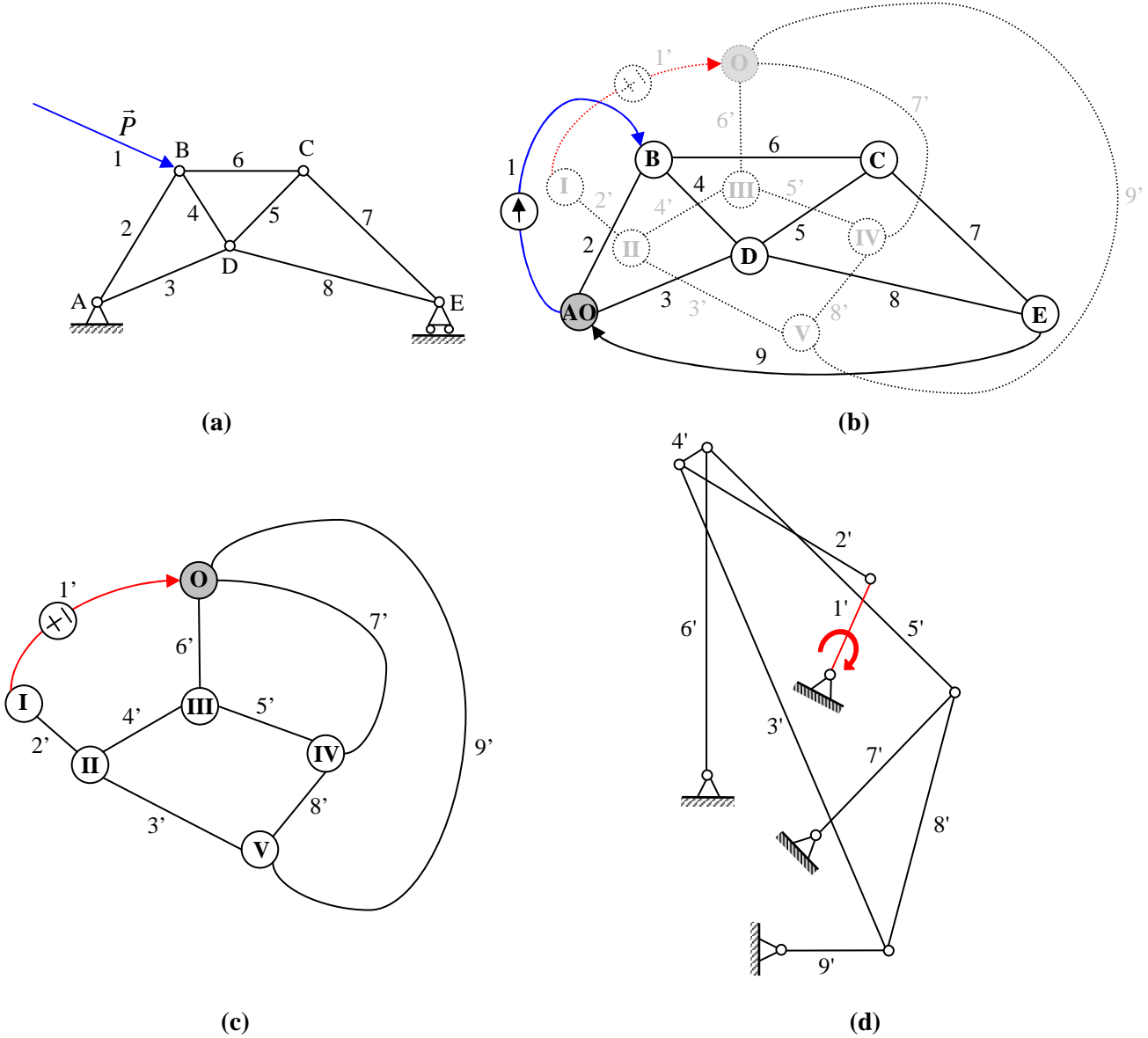


(h)

איור 4.5: דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך באמצעות דיאגרמת reciprocal

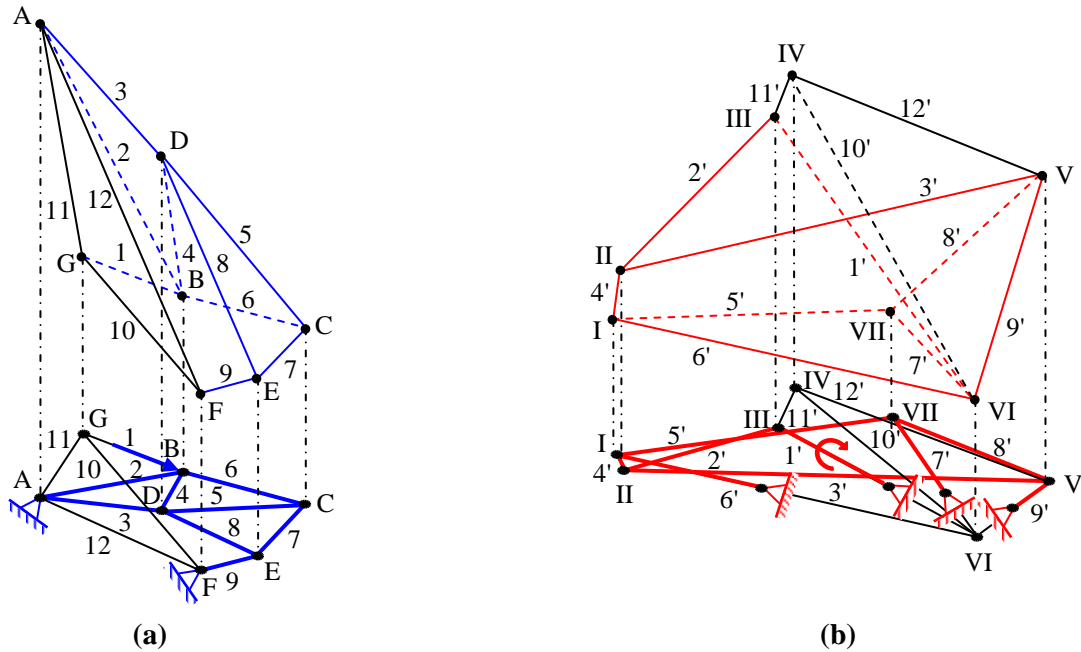
(a) מסבך עם כוח חיצוני. (b) המסבך ללא סמכים שהתקבל ממסבך. (c) דיאגרמת reciprocal. (d) פאון שהיטל שלו הוא המסבך ללא סמכים. החלק המתאים למסבך מסומן על הפאון והיטל (בצבע כחול). (e) דיאגרמת reciprocal לאחר הורדת צומת הייחוס O ומיקום הסמכים הקבועים במקומו. (f) מכניזם שהתקבל לאחר הורדת קשתות 10', 11', 12'. (g) קביעת החוליה מניעה 1'. (h) המכניזם הדואלי.

השלבים לקבלת אותו מכניזם דואלי על בסיס שיטת הדואליות בין גרף הזרימות וגרף הפוטנציאלים שפורטה בסעיף 3.4.5:



איור 4.6: דוגמה לקבלת המכניזם הדואלי למסבך על בסיס הדואליות בין גרף הזרימות לגרף הפוטנציאלים
 (a) מסבך עם כוח חיצוני. גרף זרימות. קשת מקור הזרימה בגרף מתאימה לכוח החיצוני במסבך (בצבע כחול).
 (c) גרף הפוטנציאלים הדואלי. קשת דואלית לקשת מקור הזרימה היא קשת מקור הפוטנציאלים (בצבע אדום).
 (d) המכניזם הדואלי. קשת מקור הפוטנציאלים בגרף מתאימה לחוליה המניעה במכניזם (בצבע אדום).

באיור 4.7 ניתן לראות את המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי.



איור 4.7: תיאור המעבר ממסבך למכניזם הדואלי על ידי שימוש בפאון ופאון דואלי

(a) פאון שהיטל שלו הוא המסבך ללא סמכים שהתקבל ממסבך. על הפאון וההיטל מסומן החלק המתאים למסבך (בצבע כחול). (b) על הפאון הדואלי וההיטל שלו מסומן החלק המתאים למכניזם הדואלי.

4.3 קבלת מסבך דואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal

בסעיף זה נתבונן במקרה הפוך לזה שתיארנו בסעיף 4.2. כאן נתחיל ממכניזם נתון ועל ידי שימוש בדיאגרמת reciprocal נבנה מסבך הדואלי.

4.3.1 שלבי בניית המסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal

- א. הוספת קשתות למכניזם לקבלת מבנה Assur במצב סינגולרי: נוסיף קשתות למכניזם הנתון כך שנקבל מבנה Assur במצב הסינגולרי, כלומר בכל הקשתותיו פועל מאמץ עצמי.
- ב. הוספת בסיס הקשיח: נחבר על ידי קשתות את סמכים הקבועים, כך שניצור בסיס הקשיח ולאחר מכן נוריד את הסמכים.
- בשלב זה קיבלנו מסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי, ולכן ניתן לבנות לו reciprocal מתאים כפי שנעשה בשלב הבא.
- ג. בניית דיאגרמת reciprocal מתאימה: נבנה דיאגרמת reciprocal על פי השלבים שפורטו בסעיף 2.2.3.
- ד. הורדת הקשתות ב-reciprocal שאותם הוספנו למכניזם בזמן הבנת המבנה Assur והבסיס הקשיח, והשמת סמכים הקבועים: נוריד ב-reciprocal את הקשתות שמתאימות לאותן הקשתות שהוספנו למכניזם בסעיף א' ו-ב' והשמת סמכים הקבועים במקומות בהם הקשתות הבסיס מתחברים למסבך.

- ה. קביעת קשת מתאימה לכוח חיצוני: קשת ב-reciprocal שמתאימה לחוליה המניעה במכניזם הופכת להיות כוח חיצוני במסבך.
- ו. קביעת שיפועים של המוטות במסבך: נשים את המוטות של המסבך שיתקבל, כך שכל מוט יהיה ב- 90° לחוליה מתאימה במכניזם המקורי וכל צומת במכניזם יתאים לפאה מתאימה במסבך. נקבל מסבך דואלי למכניזם המקורי ממנו התחלנו.

4.3.2 דוגמה 1 לקבלת מסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal

נתחיל לדוגמה מכניזם ארבעה מוטות, כמתואר באיור 4.8 (a).

(א). הוספת קשתות למכניזם לקבלת מבנה Assur במצב הסינגולרי: נוסיף קשתות $4'$, $5'$ ו- $6'$, כך שקשתות $1'$, $3'$ ו- $6'$ יפגשו בנקודה אחת, ונקבל מבנה Assur שנקרא טריאדה במצב הסינגולרי, כלומר מצב שפועל מאמץ עצמי בכל הקשתותיו. נסמן בצבע אפור לצורך זיהוי את אותן הקשתות שנוספו, ראה איור 4.8 (b).

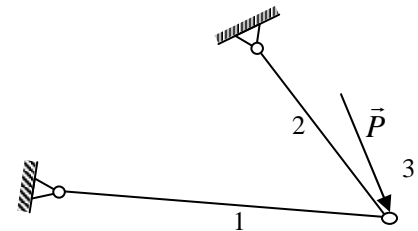
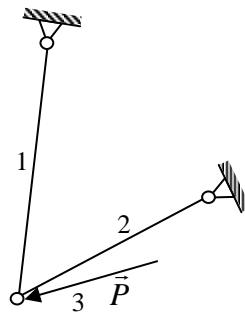
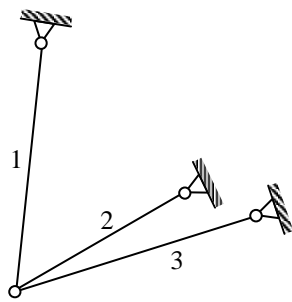
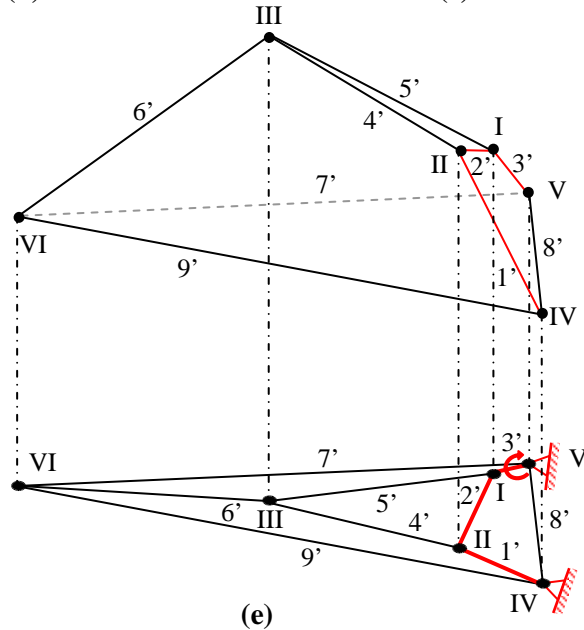
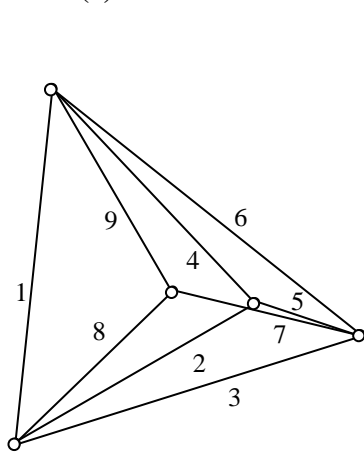
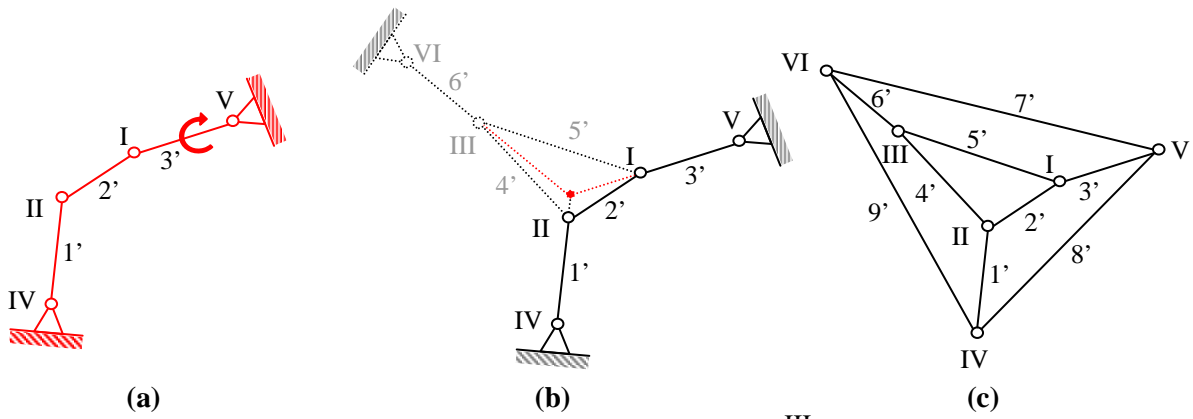
(ב). הוספת בסיס קשיח והורדת סמכים קבועים: נחבר בין סמכים קבועים על ידי קשתות $7'$, $8'$ ו- $9'$ וניצור משולש שהוא מייצג בסיס קשיח. לאחר מכן נוריד את הסמכים הקבועים, והתוצאה שנקבל היא מבנה עם פאות סגורות שיש בו מאמץ עצמי. נסמן את הקשתות של בסיס קשיח בקווים מקווקווים, ראה איור 4.8 (c).

(ג). בניית reciprocal מתאים: במבנה המקורי יש לנו 4 פאות מ-A עד D ו-4 צמתים מ-I עד IV, לכן ב-reciprocal נקבל 4 צמתים מ-A עד D ו-4 פאות מ-I עד IV, והקשתות במבנה המקורי מקבילות לקשתות מתאימות ב-reciprocal, ראה איור 4.8 (d).

(ד). הורדת הקשתות ב-reciprocal שהוספנו למכניזם בזמן בניית מבנה Assur והשמת סמכים קבועים: נוריד ב-reciprocal את הקשתות 4 , 5 ו- 6 שמתאימים לקשתות $4'$, $5'$ ו- $6'$ שהוספנו למכניזם בסעיף א' על מנת לקבל מבנה Assur, ונשים סמכים קבועים בצמתים B, C ו-D, כמתואר באיור 4.8 (e).

(ה). קביעת קשת המתאימה לכוח חיצוני: חוליה $3'$ במכניזם המקורי זוהי חוליה מניעה, לכן במסבך שהתקבל מוט 3 מייצג כוח חיצוני, ראה איור 4.8 (f).

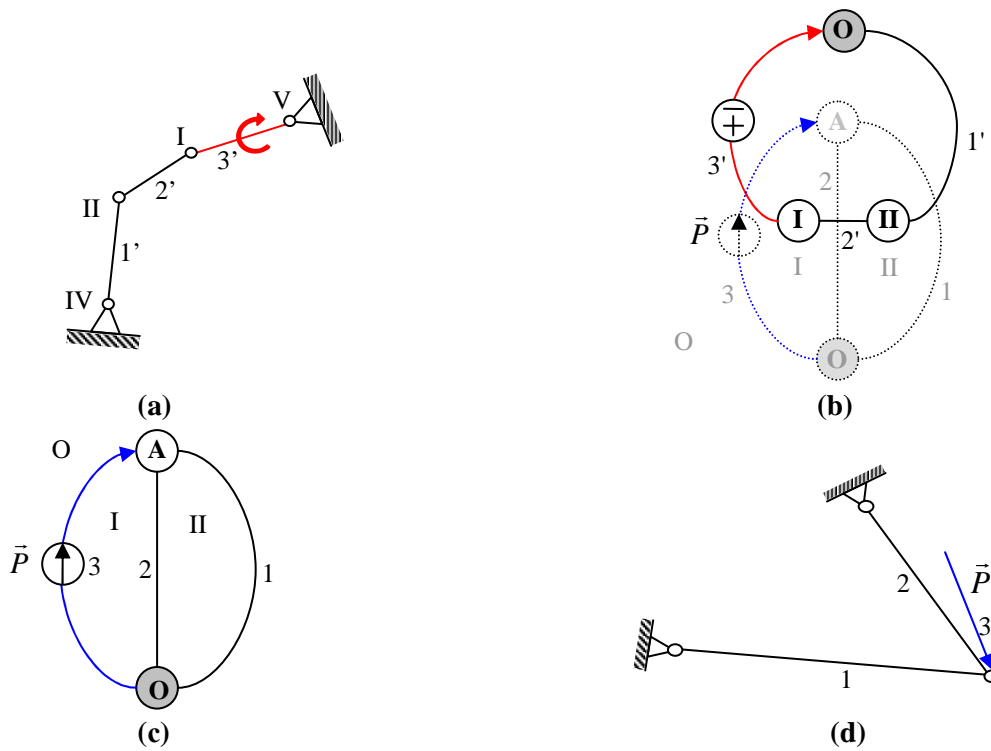
(ו). קביעת שיפועים של המוטות במסבך: נסובב את המסבך שהתקבל כך שמוטות יהיו ניצבות לחוליות מתאימות במכניזם וצמתים I ו-II במכניזם יתאימו לפאות I ו-II במסבך, ראה איור 4.8 (g).



איור 4.8: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת reciprocal

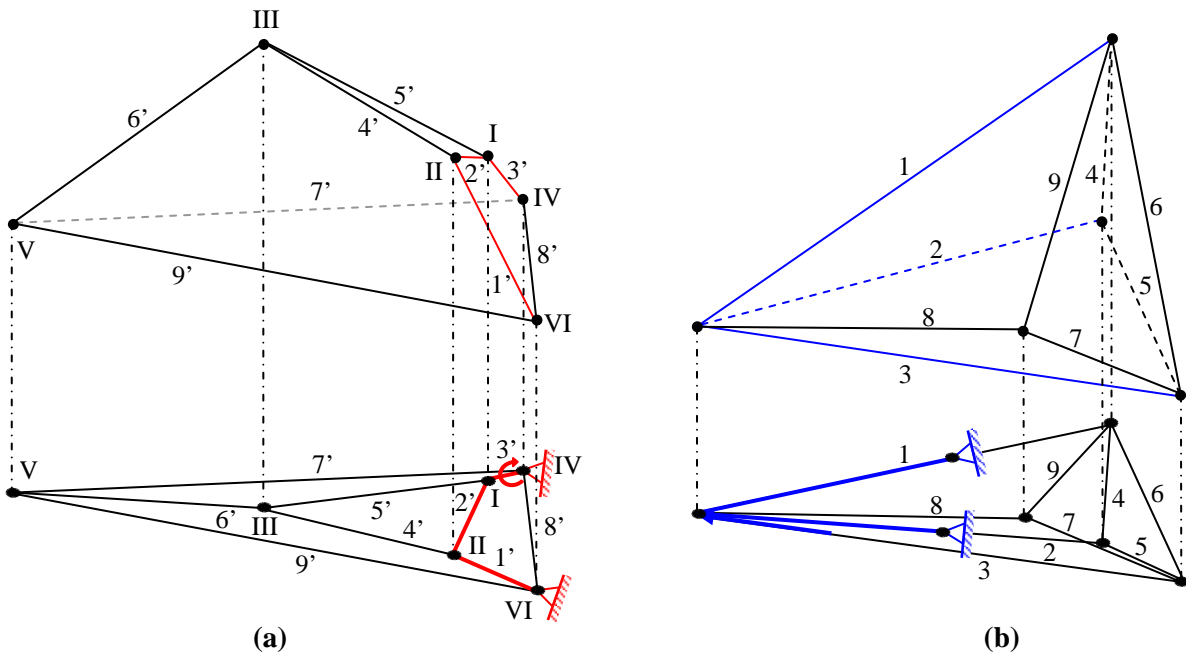
(a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) הרחבה למבנה Assur-טריאדה, שהתקבל לאחר הוספת קשתות 4', 5' ו-6' למכניזם הנתון. (c) מסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי שהתקבל לאחר איחוד של סמכים קבועים במבנה Assur (d) דיאגרמת reciprocal. (e) פאון. (f) מסבך שהתקבל לאחר הורדת קשתות שהוספנו על מנת להפוך מכניזם למבנה Assur וקשתות שהוספנו בבניית הבסיס. (g) מסבך לאחר שמוט 3 במסבך המתאים לחוליה 3' במכניזם, שהיא חוליה מניעה, הפך להיות כוח חיצוני. (h) מסבך דואלי.

והשלבים לקבלת אותו מסבך על ידי הפעלת שיטת הדואליות בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים שפורטה בסעיף 3.4.5.



איור 4.9: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי למכניזם על בסיס הדואליות בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים (a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) גרף פוטנציאלים. (c) גרף זרימות דואלי. (d) מסבך דואלי.

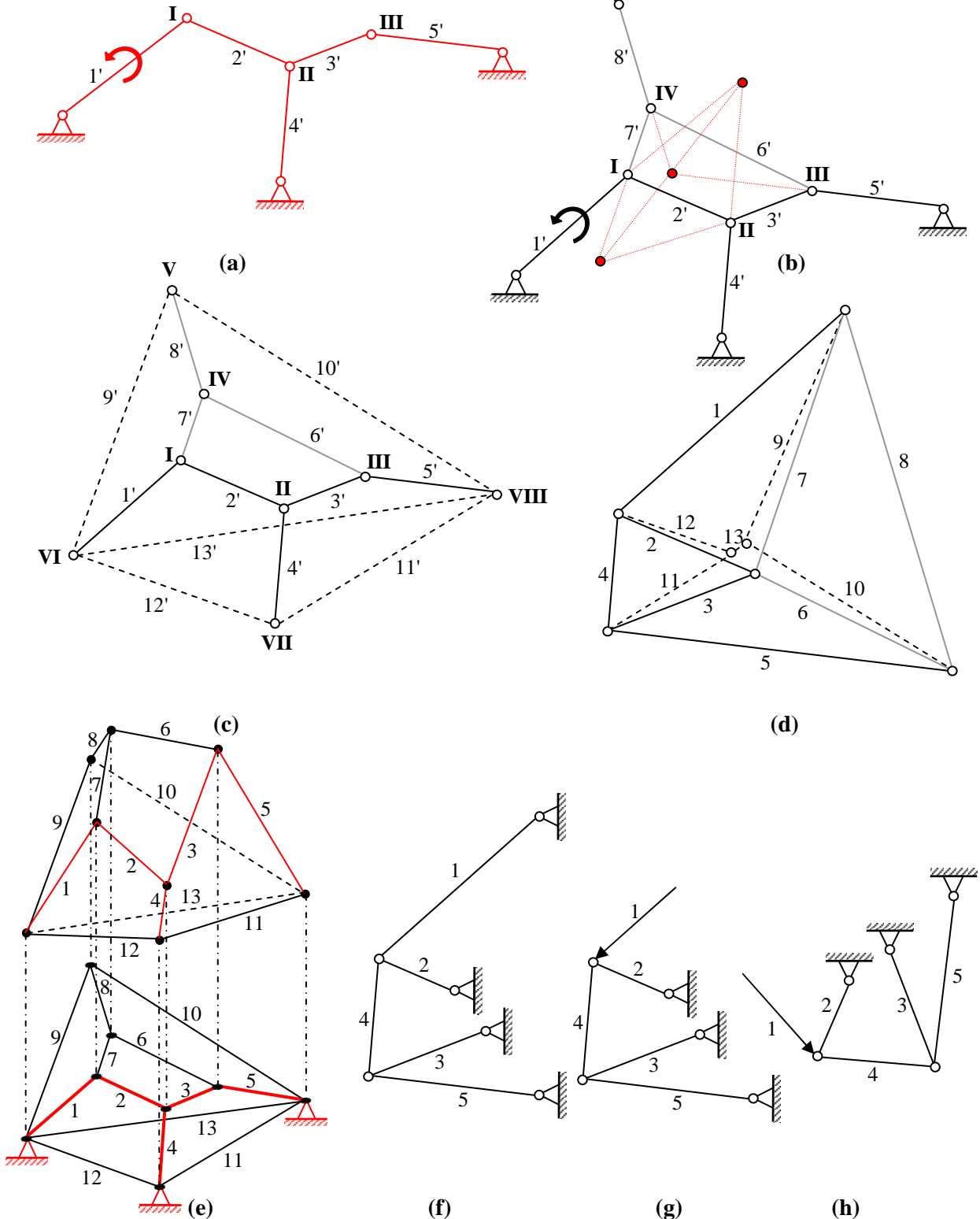
באיור 4.10 ניתן לראות את המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי.



איור 4.10: תיאור המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי (a) פאון שהיטל שלו הוא מסבך ללא סמכים שהתקבל ממכניזם. על הפאון וההיטל מסומן חלק שמתאים למכניזם (בצבע אדום). (b) על הפאון הדואלי וההיטל שלו מסומן חלק שמתאים למסבך הדואלי.

4.3.3 דוגמה 2 לקבלת מסבך הזואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת *reciprocal*

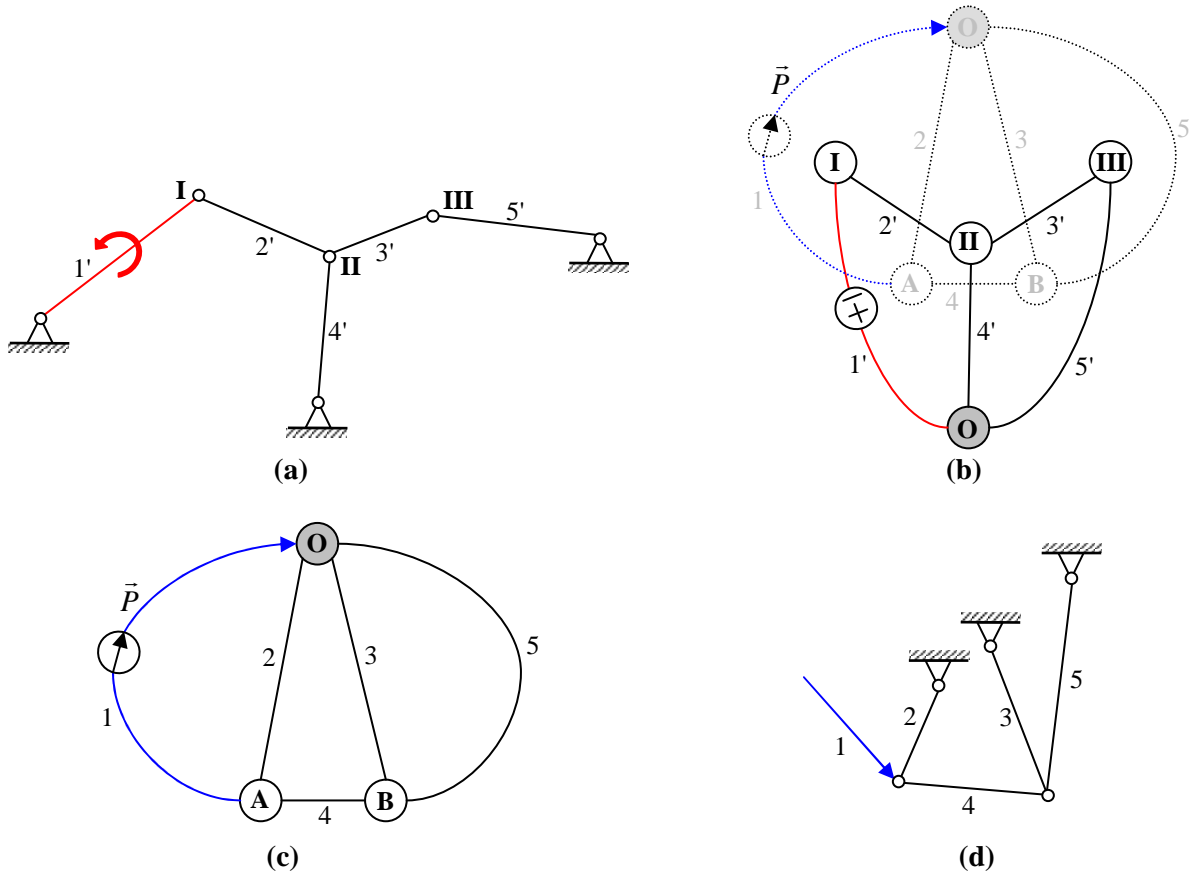
נחזור על השלבים שפורטו בסעיף 4.3.1.



איור 4.11: דוגמה לקבלת מסבך הזואלי למכניזם באמצעות דיאגרמת *reciprocal*

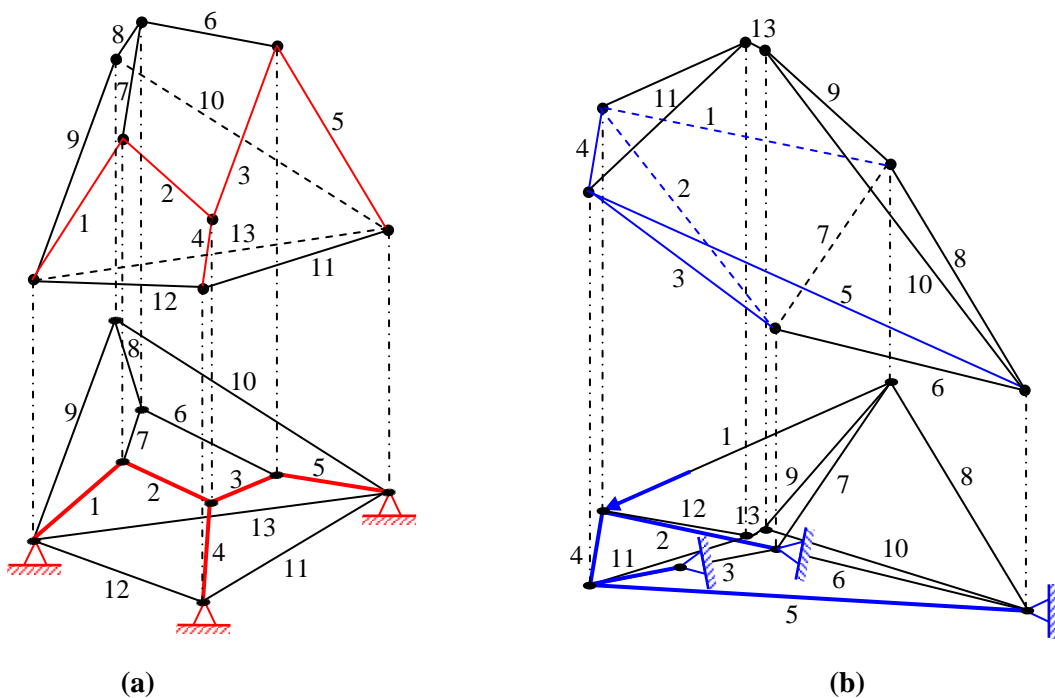
(a) מכניזם. (b) הרחבה למבנה Assur-טריאדה, שהתקבלה לאחר הוספת קשת 6' למכניזם הנתון. (c) מסבך ללא סמכים שפועל בו מאמץ עצמי, שהתקבל לאחר חיבור של סמכים קבועים במבנה Assur לסמך אחד. (d) דיאגרמת *reciprocal*. (e) פאון. (f) מסבך שהתקבל לאחר הורדת קשתות שהוספנו על מנת להפוך מכניזם למבנה שהוא מבנה Assur וקשתות שהוספנו בבניית הבסיס. (g) מסבך לאחר שמוט 1 במסבך המתאים לחוליה 1' במכניזם, שהיא חוליה מניעה, הפך להיות כוח חיצוני. (h) מסבך זואלי.

הפעלת השיטה של דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים שפורטה בסעיף 3.4.5:



איור 4.12: דוגמה לקבלת מסבך הדואלי ממכניזם על בסיס הדואליות בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים (a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) גרף פוטנציאלים. (c) גרף זרימות דואלי. (d) מסבך דואלי.

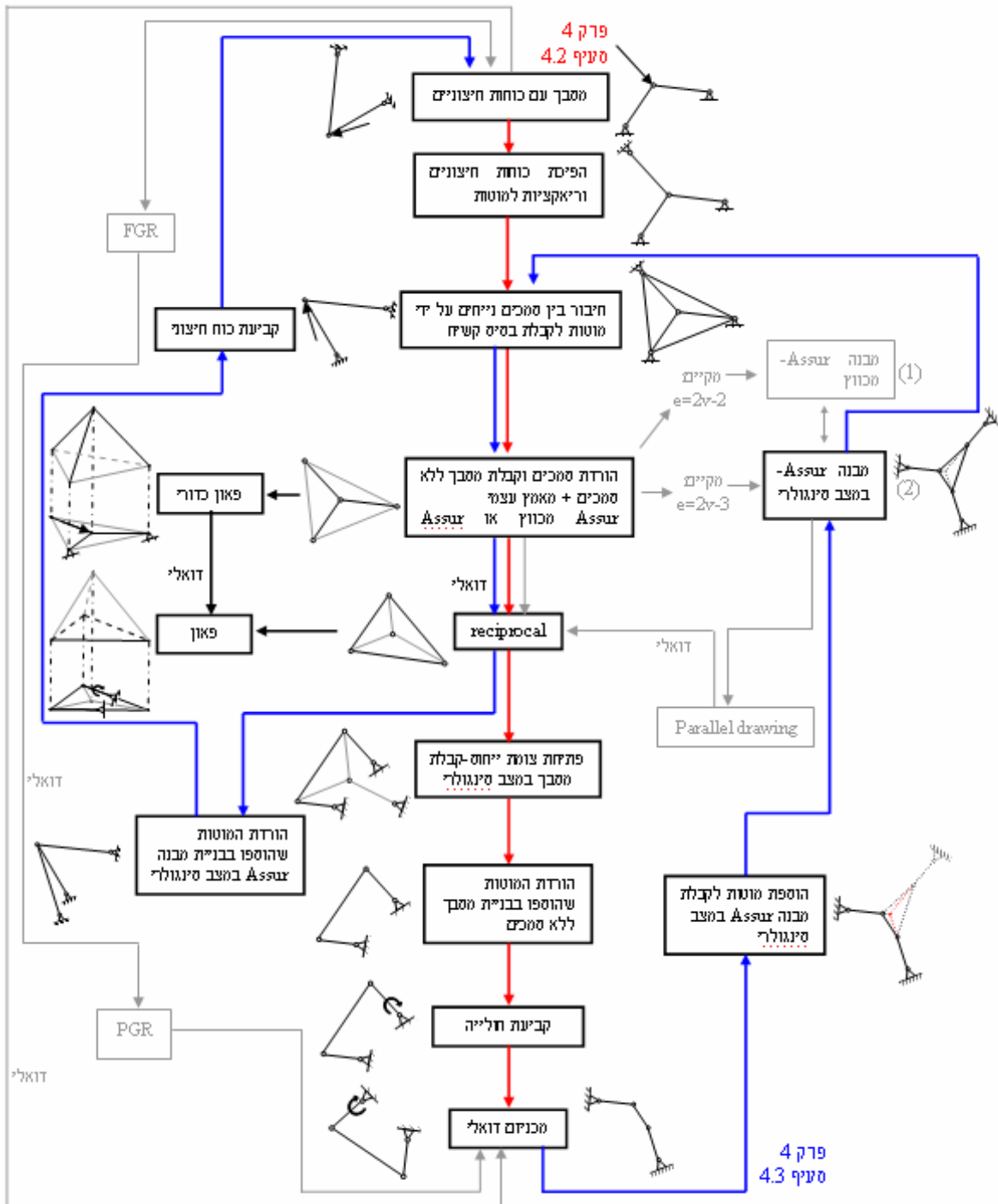
איור 4.13: ניתן לראות את המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי.



איור 4.13: תיאור המעבר ממכניזם למסבך הדואלי על ידי שימוש בפאון מקורי ופאון דואלי (a) פאון שהיטל שלו הוא מסבך ללא סמכים שהתקבל ממכניזם. על הפאון וההיטל מסומן חלק שמתאים למכניזם (בצבע אדום). (b) על הפאון הדואלי וההיטל שלו מסומן חלק שמתאים למסבך הדואלי.

4.4 סיכום הפרק

לסיכום באיור 4.14 נציג את תרשים הזרימה שראינו באיור 2.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 4.14: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 4

פרק 5

Parallel drawing והדואליות

בפרק 2 דווח על קשר בין דיאגרמת *reciprocal* והדואליות בין מסבכים ומכניזמים. בפרק הזה נכיר מושג שנקרא *parallel drawing*, ונראה שהוא דואלי לדיאגרמת *reciprocal*. הדואליות בין *parallel drawing* ו-*reciprocal* הובילה לגילוי קשר בין מהירויות של צמתים ב-*parallel drawing* וישות חדשה מדואליות בין מסבכים ומכניזמים, כוח בפאה. מהקשרים האלו התברר על קיום קשר בין *parallel drawing* והדואליות בין מסבכים ומכניזמים. יתרה מזאת, כיוון ש-*parallel drawing* מייצג את המהירויות של המבנה, מדווח בפרק זה על הקשר בינו לבין דיאגרמה הידועה בתיאורית מנגנונים ומכניזמים ומכונה בבואת המהירויות. לבסוף נראה שקיים קשר בין *parallel drawing* למבנים מיוחדים שהגדרנו בפרק 2 והמכונים מבני Assur.

5.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באיור 5.1 מתואר תרשים זרימה של נושאים עליהם נדבר בפרק 2. בפרק זה נדבר על שלושה נושאים עיקריים שנפרט אותם כעת. שלב א':

1. א. נראה שלכל מכניזם ניתן לבנות דיאגרמה שנקראת *parallel drawing*. דיאגרמה זו היא מיקום חדש של הצמתים במכניזם כך שמתקיים:

1. חוליות שנפגשו בצומת אחד במכניזם יפגשו גם בצומת אחד ב-*parallel drawing*

ופאות שנחתכו במכניזם יחתכו גם ב-*parallel drawing*.

2. חוליות במכניזם יהיו מקבילות לחוליות המתאימות ב-*parallel drawing*.

א. 2. מ-*parallel drawing* מקבלים וקטורי מהירויות קוויות של צמתים במכניזם.

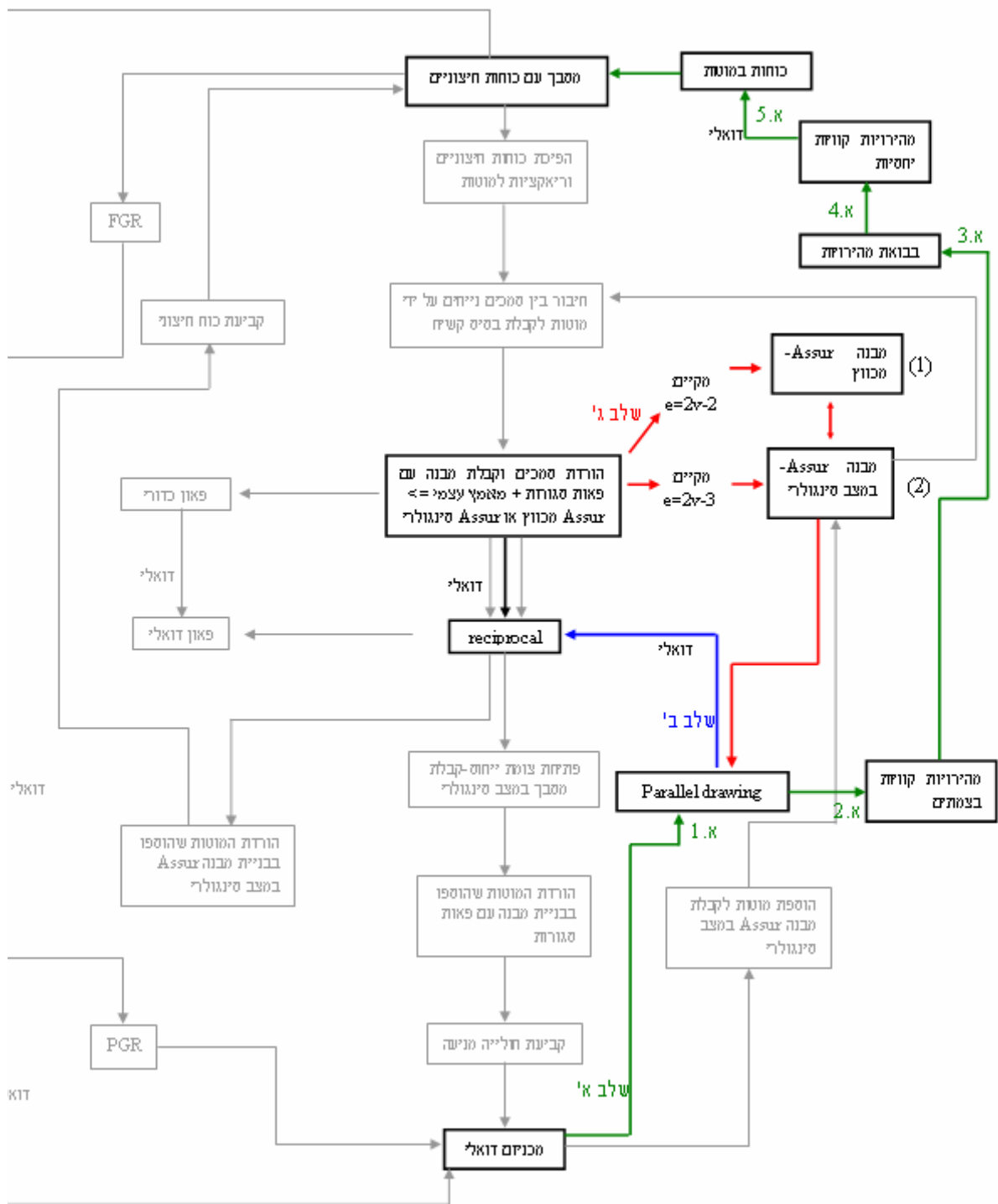
א. 3. אם נאחד את וקטורי המהירויות הקוויות של הצמתים לנקודה אחת (קוטב) ונעביר קווים בין הוקטורים המתאימים לצמתים המחוברים על ידי חוליות במכניזם נקבל דיאגרמת מהירויות של המכניזם שנקראת בבואת מהירויות (Maibie and Ovevirk, 1963).

א. 4. מבבואת המהירויות נוכל לדעת את המהירויות הקוויות היחסיות של החוליות.

א. 5. בפרק 3 הצגנו שמהדואליות בין מכניזמים ומסבכים מקבלים שמהירויות קוויות יחסיות מתאימות לכוחות הפועלים במוטות. לכן, אם יש לנו מהירויות קוויות יחסיות ניתן למצוא כוחות הפועלים במסבך הדואלי.

שלב ב': נראה ש-*parallel drawing* ו-*reciprocal* הן מערכות דואליות, כאשר *parallel drawing* מציגה את דיאגרמת מהירויות של מבנה ו-*reciprocal* את דיאגרמת הכוחות.

שלב ג': נראה שלכל מצב כללי עבור מבנה Assur המקיים $e=2v-2$ ולכל מצב סינגולרי עבור מבנה Assur המקיים $e=2v-3$ ניתן לבנות דיאגרמת *reciprocal* ודיאגרמת *parallel drawing*. מכאן נובע שעקב קיום ה-*reciprocal* במבני Assur פועל מאמץ עצמי בכל המוטות ועקב קיום ה-*parallel drawing* כל המוטות במבני ה-Assur ניידים.



איור 5.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 5

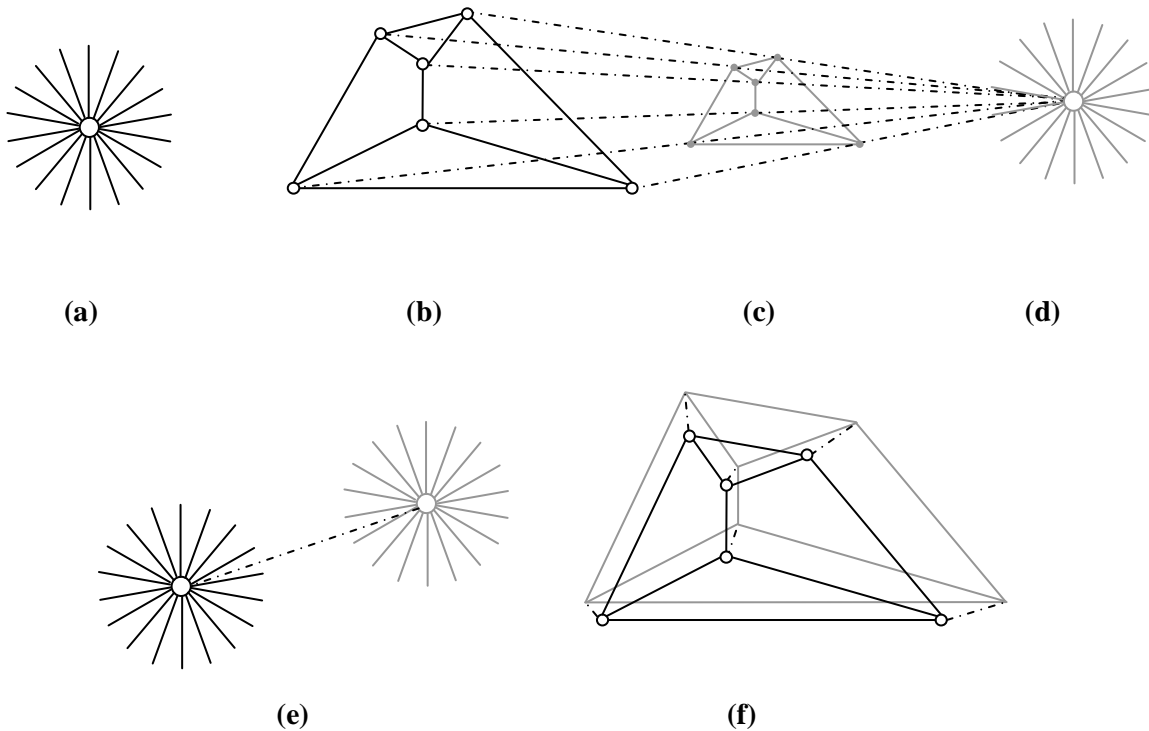
parallel drawing 5.2

המושג parallel drawing התגלה על ידי Walter Whiteley (1986). הרעיון הבסיסי של parallel drawing הוא מאוד פשוט. נניח כי נתונה לנו קונפיגורציה של נקודות, קווים ומישורים במרחב תלת מימדי (3D) הממוקמים באופן מסוים. parallel drawing של הקונפיגורציה הנתונה הוא מיקום אחר של הנקודות כך שמתקיים:

1. קווים הנפגשים בנקודה אחת בקונפיגורציה המקורית נפגשים גם בנקודה אחת המתאימה בקונפיגורציה החדשה, והמישורים הנחתכים בקונפיגורציה המקורית נחתכים גם בקונפיגורציה החדשה.

2. קווים ומישורים בקונפיגורציה החדשה יהיו מקבילים לקווים ומישורים מתאימים בקונפיגורציה המקורית.

ישנם סוגים שונים של parallel drawing, שכמה מהם נציג כאן. סוג אחד, הוא parallel drawing טריביאלי, שבו וקטורי המקומות החדשים של כל הצמתים מתלכדים בנקודה אחת, כלומר מתקיים $p'_i=c$ כמתואר באיור 5.2 (a). סוג שני של parallel drawing מתקבל מפעולת התרחבות (dilation), כאשר בפעולה זו וקטורי המקומות החדשים של הצמתים מקיימים $p'_i=\alpha(p_i-t)$ (מרכז קבוע כלשהו ו- α סקלר), כמתואר באיור 5.2 (b),(c). אם כל הנקודות של המבנה המקורי מתלכדים בנקודה אחת או סקלר α שווה לאפס, אזי פעולת התרחבות תהיה טריביאלית, כמתואר באיור 5.2 (d),(e). סוג נוסף של parallel drawing מתקבל מפעולת העתקה, כאשר כל וקטורי המקומות החדשים של הצמתים מקיימים $p'_i=p_i-t$, ראה איור 5.2 (f) Whiteley. הראה ש-parallel drawing המתאים למבנה כלשהו מציג את המהירויות שלו (Whiteley, 1986). על סמך זה נדווח בפרק הבא על קיום הקשר בין parallel drawing ובבואת מהירויות, שיטה אחרת הידועה בקינמטיקה למציאת מהירויות (Wilson and Sadler, 1993). על בסיס הדואליות בין קינמטיקה וסטטיקה שהצגנו בפרק 3, נוכל גם להראות את הקשר בין דיאגרמת reciprocal ו-parallel drawing של אותו המבנה.



איור 5.2: תיאור הסוגים השונים של parallel drawing

(a) parallel drawing טריביאלי. (b) המבנה המקורי. (c) parallel drawing המתאים למבנה הנתון ב-(b), שהתקבל מפעולת התרחבות. (d) parallel drawing המתאים למבנה הנתון ב-(b), שהתקבל מפעולת התרחבות כשהסקלר α שווה לאפס. (e) parallel drawing טריביאלי שהתקבל מהמבנה שבו כל הקווים מתלכדים בנקודה אחת. (f) parallel drawing שהתקבל מפעולת העתקה.

5.2.1 שלבי הבנייה של ה-parallel drawing

בסעיף הבא נפרט מהם השלבים לבניית parallel drawing.

- א. סימון של צמתים ומוטות במבנה הנתון : נסמן באותיות את הצמתים ובמספרים מוטות המבנה.
- ב. קביעת מיקום חדש של צומת הראשון באופן שרירותי.
- ג. קביעת מיקום חדש של צומת, בהינתן מיקום חדש של צומת אחד הסמוך לו : נקבע מיקום חדש של הצומת הבא, כך שהקו המחבר בין כל זוג הצמתים הסמוכים במיקומם החדש, יהיה מקביל למוט המחבר את הצמתים במבנה המקורי.
- ד. קביעת מיקום חדש לצומת, בהינתן המיקום החדש של שני צמתים או יותר הסמוכים לו : נקבע מיקום חדש לצומת סמוך אחד, ונעביר קו מקביל למוט המחבר צומת סמוך זה לצומת המטופל. לאחר מכן נקבע מיקום חדש לצומת סמוך שני, ונעביר קו מקביל למוט המחבר בין הצומת הסמוך השני והצומת המטופל. נקודת החיתוך של שני הקווים האלו מגדירה את המיקום החדש של הצומת המטופל.
- ה. החיבור בין המיקום הקודם של הצומת למיקום החדש שלו, נקרא וקטור המיקום החדש של הצומת, והקווים המקבילים שקיבלנו הם קווים של parallel drawing.
- ה. תהליך בניית parallel drawing מסתיים כאשר נמצא את כל הקווים המתאימים (שהם גם מקבילים) למוטות במבנה המקורי.

5.2.2 דוגמה לבנייה של ה-parallel drawing

ניקח לדוגמה מבנה המתואר באיור 5.3 (a) ונבנה לו parallel drawing מתאים.

א. סימון של צמתים ומוטות במבנה הנתון: נסמן באותיות מ-A עד F את הצמתים

ובמספרים מ-1 עד 9 את מוטות המבנה איור 5.3 (b).

ב. קביעת מיקומו החדש של הצומת הראשון A: נקבע באופן שרירותי מיקום חדש לצומת A

איור 5.3 (c).

ג. קביעת מיקומו החדש של צומת B, בהינתן מיקומו החדש של צומת סמוך אחד, A: נקבע

את מיקומו החדש של צומת B הסמוך לצומת A, כך שהקו המחבר בין הצמתים האלו

במיקומם החדש, 1', יהיה מקביל למוט 1 המחבר את הצמתים במבנה המקורי איור 5.3

(d).

ד. קביעת מיקומו החדש של צומת C, בהינתן מיקומו החדש של צומת סמוך אחת B: נקבע

את מיקומו החדש של צומת C הסמוך לצומת B, כך שהקו 2' יהיה מקביל למוט 2 איור

5.3 (e).

ה. מציאת מיקום חדש עבור צומת D, בהינתן מיקומם החדש של שני צמתים סמוכים, A ו-1

C: מהמיקום החדש של צומת A נעביר קו מקביל למוט 4, ומהמיקום החדש של צומת C

נעביר קו מקביל למוט 3. נקודת החיתוך של שני הקווים האלו מגדירה מיקום חדש עבור

צומת D. נחבר בין הצומת D והנקודה שהתקבלה ונקבל וקטור מיקום חדש לצומת D.

בשלב זה קיבלנו גם קווים 3' ו-4' ב-parallel drawing איור 5.3 (f).

ו. מציאת מיקום חדש עבור צומת E, בהינתן מיקומם החדש של שני צמתים סמוכים, A ו-1

B: בדומה למה שעשינו בשלב (ה), מהמיקום החדש של צומת A נעביר קו מקביל למוט 5,

ומהמיקום החדש של צומת B נעביר קו מקביל למוט 6. נקודת חיתוך שלהם מגדירה

מיקום חדש עבור צומת E. וקטור המחבר בין צומת E ונקודת החיתוך שהתקבלה זהו

וקטור מיקום חדש עבור צומת E. בשלב זה קיבלנו קווים 5' ו-6' ב-parallel drawing

איור 5.3 (g).

ז. מציאת מיקום חדש עבור צומת F, בהינתן מיקומם החדש של שלושה צמתים סמוכים, C,

D ו-E: מהמיקום החדש של צומת C נעביר קו מקביל למוט 7, מהמיקום החדש של צומת

D נעביר קו מקביל למוט 8, ומהמיקום החדש של צומת E נעביר קו מקביל למוט 9.

נקודת חיתוך שתתקבל מגדירה מיקום חדש עבור צומת F, והקו המחבר בין צומת F

ונקודות החיתוך הוא וקטור מיקום חדש עבור צומת F. קיבלנו שלושה קווים נוספים 7',

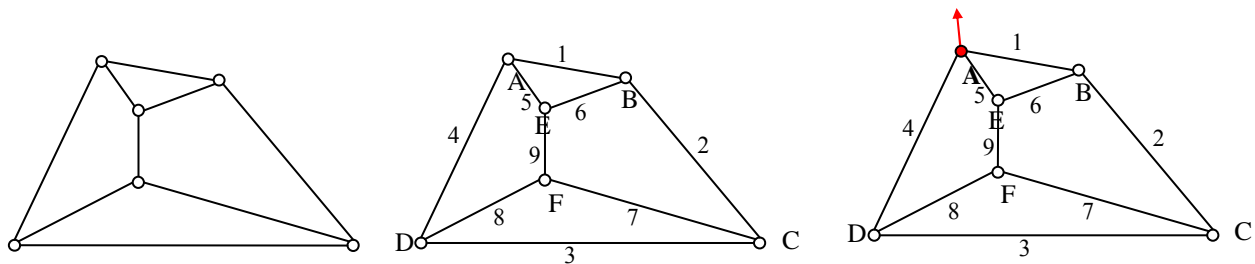
8' ו-9' ב-parallel drawing איור 5.3 (h).

ח. בשלב זה קיבלנו parallel drawing שמתואר בצבע כחול באיור 5.3 (i).

ט. סיבוב וקטורי המיקום החדש של הצמתים: נסובב ב-90° מעלות נגד כיוון השעון את

וקטורי המיקום החדש של הצמתים, שקיבלנו במשך בניית parallel drawing, ונקבל את

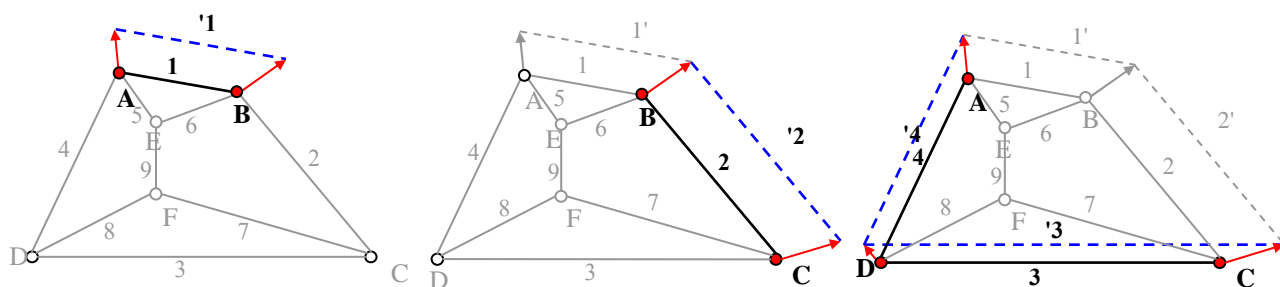
וקטורי המהירויות של הצמתים המתוארים כחצים אדומים באיור 5.3 (j).



(a)

(b)

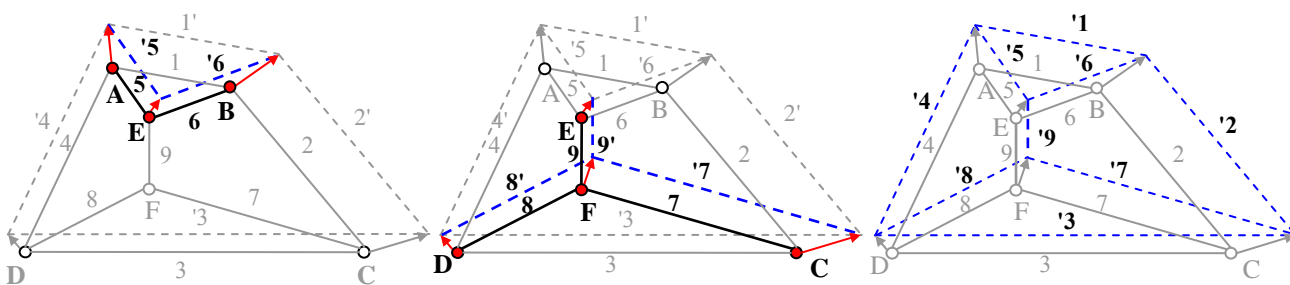
(c)



(d)

(e)

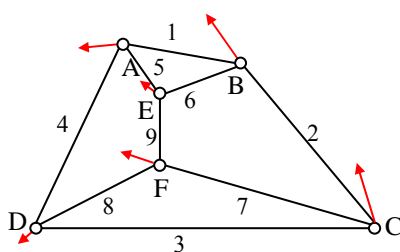
(f)



(g)

(h)

(i)



(j)

איור 5.3: תיאור השלבים בבניית parallel drawing וקבלת מהירויות של צמתים עבור מבנה נתון
 (a) המבנה המקורי. (b) סימון צמתים ומוטות במבנה. (c) קביעת מיקום חדש עבור צומת ראשון A. (d) קביעת מיקום חדש עבור צומת B, בהינתן מיקום חדש של צומת סמוך אחד A. (e) מציאת מיקום חדש עבור צומת C, בהינתן מיקום החדש של צומת סמוך אחד B. (f) מציאת מיקום חדש עבור צומת D, בהינתן מיקום החדש של צמתים סמוכים A ו-C. (g) מציאת מיקום חדש עבור צומת E, בהינתן מיקום החדש של שני צמתים סמוכים A ו-B. (h) מציאת מיקום חדש עבור צומת F, בהינתן מיקום החדש של שלושה צמתים סמוכים D, C ו-E. (i) בקווים כחולים מסומן parallel drawing המתאים למבנה המקורי. (j) בחצים אדומים מסומנים וקטורי המהירויות של הצמתים.

5.3 הקשר בין ה- parallel drawing ובבואת המהירויות

בסעיף זה נראה כי קיים קשר בין parallel drawing ובבואת מהירויות. ניקח מבנה כלשהו שניתן לבנות לו parallel drawing. כפי שנאמר לעיל, בבניית parallel drawing נותנים מיקום חדש לצמתים, כך שהקווים המחברים אותם, מקבילים למוטות המחברים את אותם הצמתים בקונפיגורציה המקורית. נסמן את וקטורי המיקום של הצמתים במבנה המקורי ב- \vec{p}_i ואת הוקטורים בין הצמתים המקוריים לבין הצמתים המתאימים ב- parallel drawing ב- \vec{u}_i . אם נכפיל את וקטורי הפרש בין כל שני וקטורים של צמתים סמוכים בסקלרים σ_j , אז נקבל שהם שווים גם בגודל וגם בכיוון למוטות המחברים בין הצמתים המתאימים במבנה המקורי. הנוסחה שלהלן מתארת את הקשר הזה.

$$(\vec{p}_k - \vec{p}_m) = \sigma_{km} (\vec{u}_k - \vec{u}_m) \quad (5.1)$$

כאשר:

$\vec{p}_k - \vec{p}_m$ מוט המחבר שני צמתים סמוכים k ו-m במבנה המקורי.

$\vec{u}_k - \vec{u}_m$ וקטור ההפרש בין הוקטורים של צמתים סמוכים k ו-m.

σ_{km} סקלר.

נסובב את וקטורים \vec{u}_i ב- 90° נגד כיוון השעון ולוקטורים המתקבלים נקרא \vec{V}_i . אם נכפיל את וקטורי ההפרש החדשים בין כל שני וקטורי הצמתים הסמוכים בסקלרים σ_{km} , אז נקבל שהם שווים בגודלם וכיוונם ניצב למוטות המחברים בין הצמתים המתאימים במבנה המקורי. מכאן נוסחה (5.1) נראית באופן הבא:

$$(\vec{p}_k - \vec{p}_m) = \sigma_{km} (\vec{V}_k - \vec{V}_m)^\perp \quad (5.2)$$

כאשר:

$\vec{V}_k - \vec{V}_m$ וקטור הניצב לוקטור ההפרש $\vec{u}_k - \vec{u}_m$.

אם נגדיר ש- \vec{V}_i הם מהירויות הצמתים במבנה המקורי, אז נקבל שוקטור $\vec{V}_k - \vec{V}_m$ הניצב למוט המחבר בין צמתים k ו-m מתאר את המהירות היחסית של אותו מוט.

נסמן ב- parallel drawing ב- k' ו-m' את המיקום החדש של הצמתים k ו-m. כל קו ב- parallel drawing המחבר בין הצמתים k' ו-m' מקביל למוט המחבר בין הצמתים k ו-m במבנה המקורי וגודלו מוכפל בסקלר μ_{km} .

$$(\vec{p}_k - \vec{p}_m) = \mu_{km} (\vec{q}_{k'} - \vec{q}_{m'}) \quad (5.3)$$

כאשר:

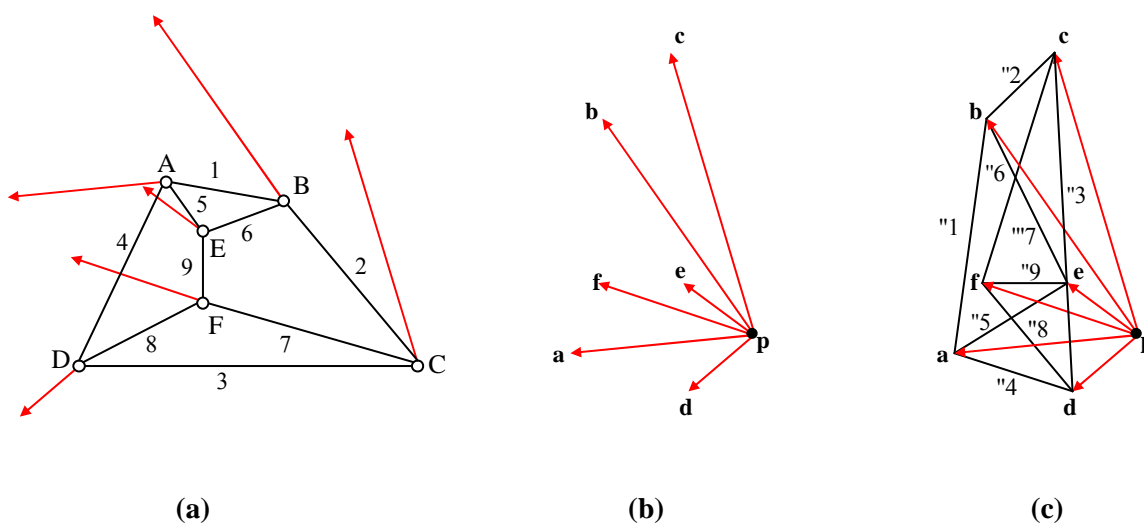
$(\vec{q}_{k'} - \vec{q}_{m'})$ הינו וקטור המחבר את הצמתים k' ו-m' ב- parallel drawing.

אזי מכאן נקבל קשר הבא:

$$(\vec{q}_{k'} - \vec{q}_{m'}) = \lambda_{km} (\vec{V}_k - \vec{V}_m)^\perp \quad (5.4)$$

מהקשר הזה ניתן לומר שקו ב- parallel drawing שווה בגודל למהירות היחסית של המוט המתאים במבנה המקורי מוכפל בסקלר λ_{km} וניצב לו בכיוון. יתרה מזאת, קיים קשר הדוק בין parallel drawing לבבואת המהירויות כפי שמתואר להלן.

לאחר בניית parallel drawing המתאים למבנה הנתון מתקבלים וקטורי המהירויות של הצמתים כפי שמתואר באיור 5.4 (a). ניקח את וקטורי המהירויות האלו ונמקם אותם באותה הנקודה שנסמנה לה באות p. בקצה כל וקטור מהירות נרשום אות המציינת את הצומת בו המהירות המתאימה פועלת, כמתואר באיור 5.4 (b). כעת נחבר בין הקצוות המתאימים לצמתים המחוברים על ידי הקווים ב- parallel drawing. אם נתבונן בתמונה שקיבלנו נראה שזוהי בעצם בבואת המהירויות המתאימה למבנה המקורי. שלב זה מתואר באיור 5.4 (c).



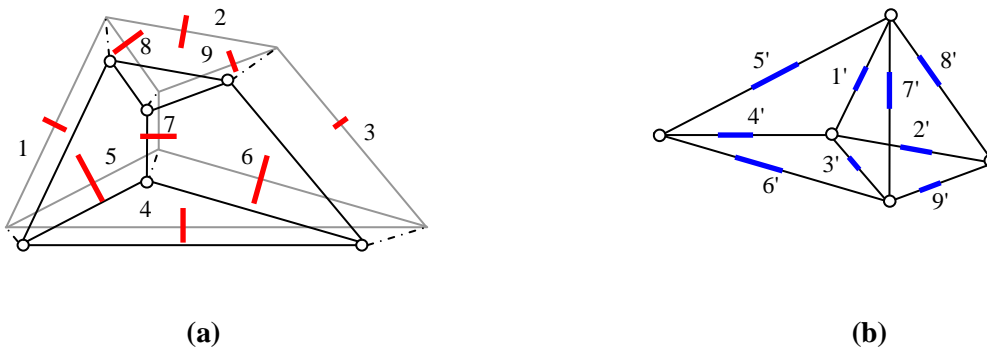
איור 5.4: תיאור השלבים לקבלת בבואת מהירויות מוקטורי מיקום חדשים של הצמתים שקיבלנו מ- parallel drawing
ניתן לראות כי האיור ב-c הינו בבואת המהירויות של המסגרת הנתונה ב-a.

מכאן ניתן לומר כי, כאשר יש מבנה שהצלחנו לבנות לו parallel drawing מתאים, אזי יש לו תנועה רגעית, כי ניתן לבנות לו בבואת מהירות.

5.4 הקשר בין דיאגרמת ה-reciprocal וה- parallel drawing

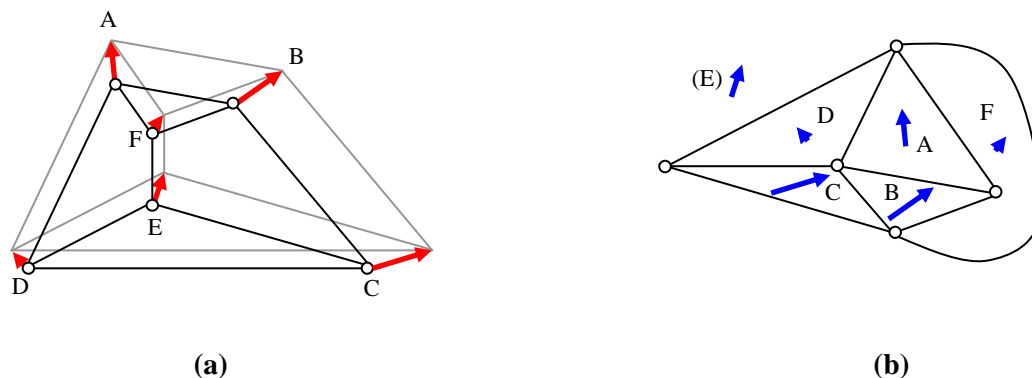
בפרק 2 הראנו שדיאגרמת reciprocal מייצגת את הכוחות הפועלים במבנה, ובסעיף 5.3 הראנו ש- parallel drawing מייצג את מהירויותיו, אך הן מסובבות ב- 90° . בהיתן מבנה שניתן לבנות לו גם דיאגרמת reciprocal וגם parallel drawing, נראה בסעיף הזה מהו הקשר ביניהן. בפרק 2 ראינו כי מבנה הינו דואלי לדיאגרמת ה-reciprocal שלו, ובסעיף 5.2 הראנו כי במבנה המתקבל מ- parallel drawing גם הטופולוגיה של המבנה המקורי וגם כיווני הקווים נשארים ללא שינוי. מכאן המסקנה שגם המבנה החדש המתקבל מ- parallel drawing דואלי ל-reciprocal.

מצד אחד, כאמור בפרק 2, reciprocal מייצג דיאגרמת כוחות הפועלים במבנה, אך על ידי בניית מוטות ומפרקים על הקווים והצמתים שלו נקבל מסבך ללא סמכים אשר נמצא בשיווי משקל. מצד שני, לפי Whiteley parallel drawing, מייצג את המהירויות הקוויות של המבנה, אך על ידי בניית חוליות ומפרקים על הקווים והצמתים שלו נקבל רגעית מכניזם. מהדואליות בין reciprocal ו-parallel drawing נובע כי לכל קו במערכת אחת מתאים קו במערכת השנייה. מכאן התגלה ומדווח לראשונה כאן בתזה, כי הכוחות הפועלים במוטות של reciprocal מתאימים למהירויות הקוויות היחסיות ב-parallel drawing, כמתואר באיור 5.5. נשאר לקבוע מהו המשתנה ב-reciprocal המתאים למהירויות הצמתים ב-parallel drawing. אנו יודעים כי, לכל צומת במקורית מתאימה פאה במערכת הדואלית. לכן, לכל צומת ב-parallel drawing מתאימה פאה ב-reciprocal. מכאן המסקנה החשובה שהתקבלה בתזה היא כי מהירויות הצמתים ב-parallel drawing מתאימות לכוחות בפאות של ה-reciprocal הדואלי, ראה איור 5.6.



איור 5.5: תיאור הקשר בין מהירויות הקוויות היחסיות ב-parallel drawing לכוחות במוטות של דיאגרמת reciprocal

(a) המהירויות הקוויות היחסיות של המוטות במבנה המקורי. (b) הכוחות הפועלים במוטות ה-reciprocal המתאים למבנה הנתון ב-(a). הכוחות הפועלים במוטות של reciprocal מתאימים למהירויות הקוויות היחסיות של המוטות במבנה המקורי.

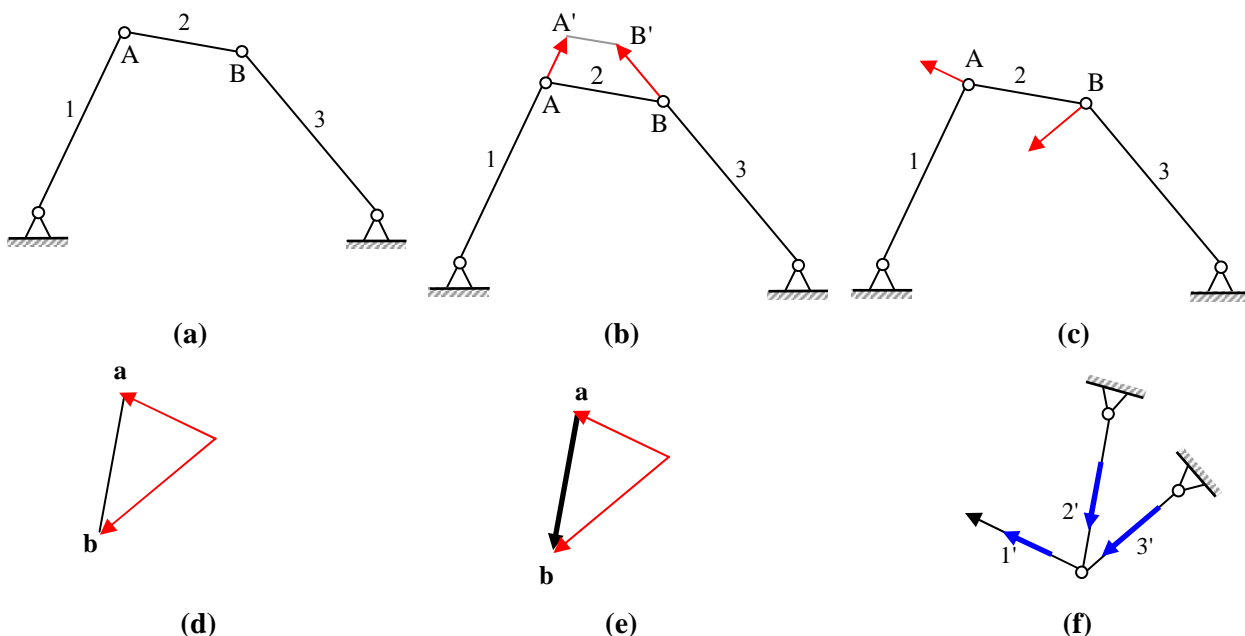


איור 5.6: תיאור הקשר בין מהירויות הצמתים ב-parallel drawing לכוחות בפאות של דיאגרמת reciprocal
 (a) מהירויות של צמתים במבנה המקורי. (b) הכוחות הפועלים בפאות של reciprocal המתאים למבנה המקורי. הכוחות הפועלים בפאות של reciprocal מתאימים למהירויות הצמתים במבנה המקורי.

5.5 הקשר בין ה- parallel drawing לדואליות בין מסבכים ומכניזמים

לפי הסעיף הקודם קיבלנו את הקשרים הדואלים הבאים (1) הכוחות הפועלים במוטות ה-reciprocal מתאימים למהירויות הקוויות היחסיות המתקבלות מ-parallel drawing, (2) הכוחות בפאות ה-reciprocal מתאימים למהירויות הקוויות של הצמתים מ-parallel drawing. אחת התוצאות שהתקבלה במשך העבודה הזו היא הקשר בין reciprocal והדואליות בין מסבכים ומכניזמים (פרק 3). בנוסף לכך הראנו בסעיף הקודם כי קיים קשר בין reciprocal ו-parallel drawing. על סמך שני הקשרים הללו ניתן לומר כי קיים גם קשר בין parallel drawing והדואליות בין מסבכים ומכניזמים.

נציג דוגמה המתארת את אותו הקשר בין parallel drawing והדואליות. **באיור (a) 5.7** נתון מכניזם ארבע מוטות. בשלב הראשון נבנה לו parallel drawing, כמתואר **באיור (b) 5.7**. כפי שהראנו בסעיף 5.4 בסוף תהליך הבנייה מקבלים את וקטורי המהירויות של הצמתים, ראה **איור (c) 5.7**. ניקח את הוקטורים הללו, נמקם אותם בנקודה אחת שנקרא לה קוטב ונחבר בין אלה המתאימים לנקודות המחוברות במבנה המקורי. התוצאה שמתקבלת היא בבואת המהירויות המתאימה למכניזם הנתון, והיא מיוצגת **באיור 5.7 (d)**, יש לשים לב שלצורך נוחות הוגדל השרטוט פי 2. מהבבואה אנחנו מקבלים בעצם את המהירויות הקוויות היחסיות של החוליות במכניזם הנתון, ראה **איור (e) 5.7**. כעת נחזור שוב למכניזם ונבנה לו מסבך דואלי על ידי שימוש בדואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים. אם ניקח את המהירויות הקוויות שקיבלנו קודם ונתייחס אליהן כאל כוחות הפועלים במוטות המסבך הדואלי, כמתואר **באיור (f) 5.7**, נראה שהמסבך יהיה יציב מבחינה סטטית. המסקנה שניתן להסיק מכך היא שהמהירויות הקוויות של החוליות במכניזם המקורי שאותן קיבלנו מ-parallel drawing מתאימות לכוחות הפועלים במוטות המסבך הדואלי.

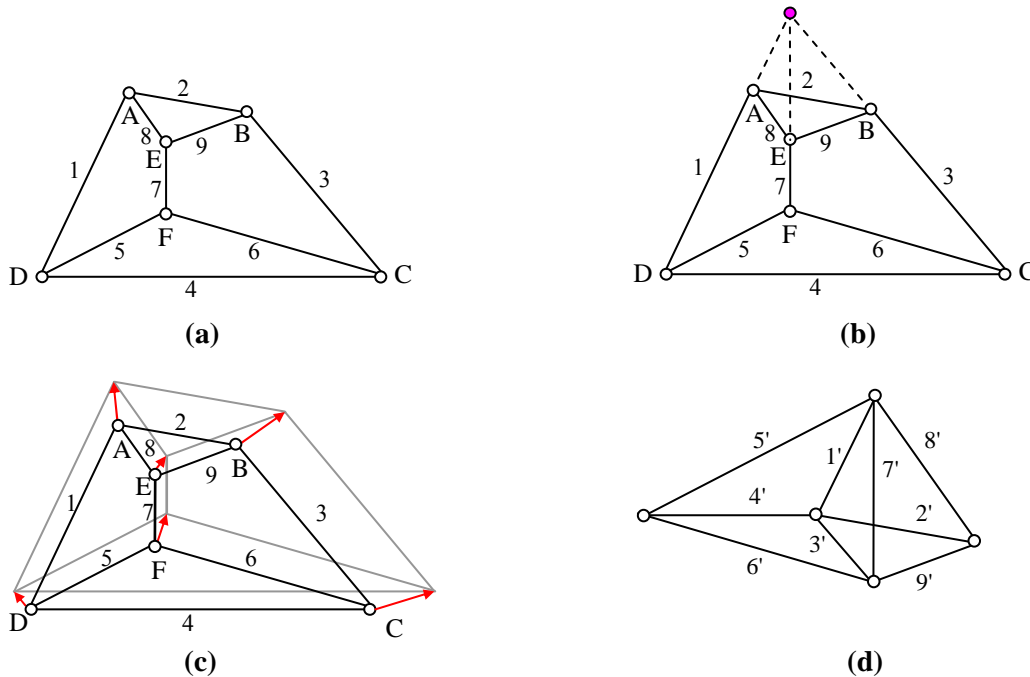


איור 5.7: תיאור הקשר בין parallel drawing והדואליות בין מסבכים ומכניזמים

(a) מכניזם ארבע מוטות. (b) parallel drawing המתאים למכניזם. (c) מהירויות הצמתים שהתקבלו מ-parallel drawing. (d) בבואת מהירויות המתאימה למכניזם. (e) מציאת מהירות קווית יחסית מהבבואה המהירויות. (f) כוחות במוטות המסבך הדואלי.

Assur parallel drawing ומבני Assur 5.6

לאחרונה התגלה כי אך ורק למבנה Assur קיימת קונפיגורציה מיוחדת שבה פועל מאמץ עצמי בכל המוטות שלה וכל מוט הוא נייד, דהיינו, סיבוב של כל אחד גורם לתזוזה של כל המבנה (Servatius, et al., 2006). כיוון שבסעיף 5.4 הראנו ש-parallel drawing מייצג את מהירויות המוטות במבנה, ואמרנו שלמבני Assur קיימת קונפיגורציה שבה המבנה הוא נייד, אזי לכל מבנה Assur קיימת קונפיגורציה שניתן לבנות לה parallel drawing. בפרק 2 הראנו שלמבנה Assur קיימת קונפיגורציה שניתן לבנות לה reciprocal, כאשר קיומו מצביע על כך שבמבנה ניתן להפעיל כוחות פנימיים. נסכם הכול ביחד ונקבל, כי לכל מבנה Assur קיימת קונפיגורציה מיוחדת שניתן לבנות לה גם דיאגרמת reciprocal וגם parallel drawing. להלן דוגמה המציגה את מבנה Assur הנקראת טריאדה (איור 5.8 (a)). הקונפיגורציה המיוחדת של מבנה Assur הבאה היא כאשר המשכי הקווים 1, 3 ו-7 נפגשים בנקודה אחת (איור 5.8 (b)). זוהי הקונפיגורציה שבה ניתן לבנות גם parallel drawing וגם reciprocal, כמתואר באיורים 5.8 (c) ו-5.8 (d).



איור 5.8: דוגמה לקבלת parallel drawing ו-reciprocal למבנה Assur טריאדה במצבה הסינגולרי

(a) מבנה Assur - טריאדה. (b) המצב הסינגולרי של טריאדה, שבו נפגשים המשכי הקווים 1, 3 ו-7. (c) parallel drawing המתאים לטריאדה הנתונה. (d) reciprocal המתאים לטריאדה הנתונה.

פרק 6

מכניזם דואלי למסבך לא מישורי

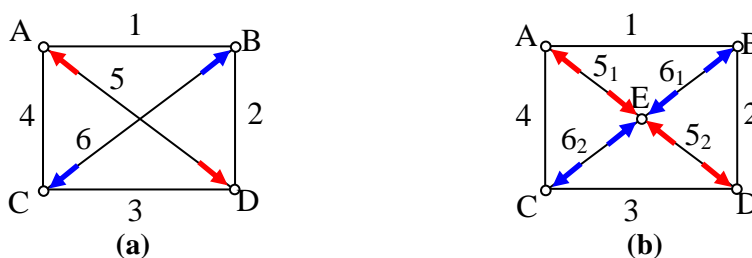
בפרק 3 הצגנו דואליות בין מסבכים ומכניזמים מישוריים (בעלי גרף מישורי-שאף קשת אינה חותכת אחרת), שמבוססת על דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים. אבל, כשמדובר על קונפיגורציות לא מישוריות, לא ניתן להשתמש בדואליות הזו באופן ישיר. על בסיס שיטת Bow's notation הידועה בסטטיקה גרפית, הורחבה כאן בתזה הדואליות בין מסבכים ומכניזמים, וכעת היא אינה מוגבלת רק לגרפים מישוריים, לכן שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים במכניזמים תקפה כעת גם למכניזמים לא מישוריים.

6.1 שיטת Bow's notation והדואליות בין מסבכים ומכניזמים

שימוש בדואליות בין מסבכים ומכניזמים המבוססת על דואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים (פרק 3) באופן ישיר נותן מענה לקונפיגורציות בעלי גרף מישורי, כאשר בתזה נקרא להם מסבכים ומכניזמים מישוריים. בעבודה זו נציג בפעם הראשונה כי, על ידי שימוש בשיטת Bow's notation הידועה בספרות (Cremona, 1890) והדואליות בין גרף זרימות וגרף פוטנציאלים, ניתן לקבל מכניזם דואלי גם למסבך לא מישורי.

6.1.1 שיטת Bow's notation

בסעיף הזה נסביר בקצרה על שיטת Bow's notation ולהרחבה בנושא הזה ניתן להיעזר ב- (Cremona, 1890). שיטה זו משמשת להמרת כל מסבך למסבך אקוויוולנטי על ידי הוספת מפרק או מספר מפרקים חדשים בנקודות חיתוך של מוטות במבנה. באיור 6.1 ניתן לראות כי, כוחות הפועלים במסבך המקורי זהים לאלה שפועלים במסבך האקוויוולנטי. רואים כי, הכוח שפועל במוט 5 במסבך (a) זהה לכוחות שפועלים במוטות 5_1 ו- 5_2 במסבך (b). בצורה דומה, הכוח שפועל במוט 6 במסבך (a) זהה לכוחות הפועלים במוטות 6_1 ו- 6_2 במסבך (b). סכום כוחות הפועלים במפרק E שווה לאפס, לכן המסקנה היא, ששיטת Bow's notation אינה פוגעת ביציבותו של המסבך וגם הכוחות נשארים ללא שינוי.



איור 6.1: דוגמה להפעלת השיטה Bow's notation

(a) מסבך ללא סמכים שבו שני מוטות 5 ו-6 נחתכים. (b) המרה של המסבך ללא סמכים המקורי למסבך אקוויוולנטי על ידי הוספת מפרק חדש e.

6.1.2 שיטה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי באמצעות Bow's notation

נניח כי נתון מסבך לא מישורי. כדי לבנות לו מכניזם דואלי יש לעשות שלבים הבאים:
(א). הפעלת שיטת Bow's notation לקבלת מסבך האקוויוולנטי.

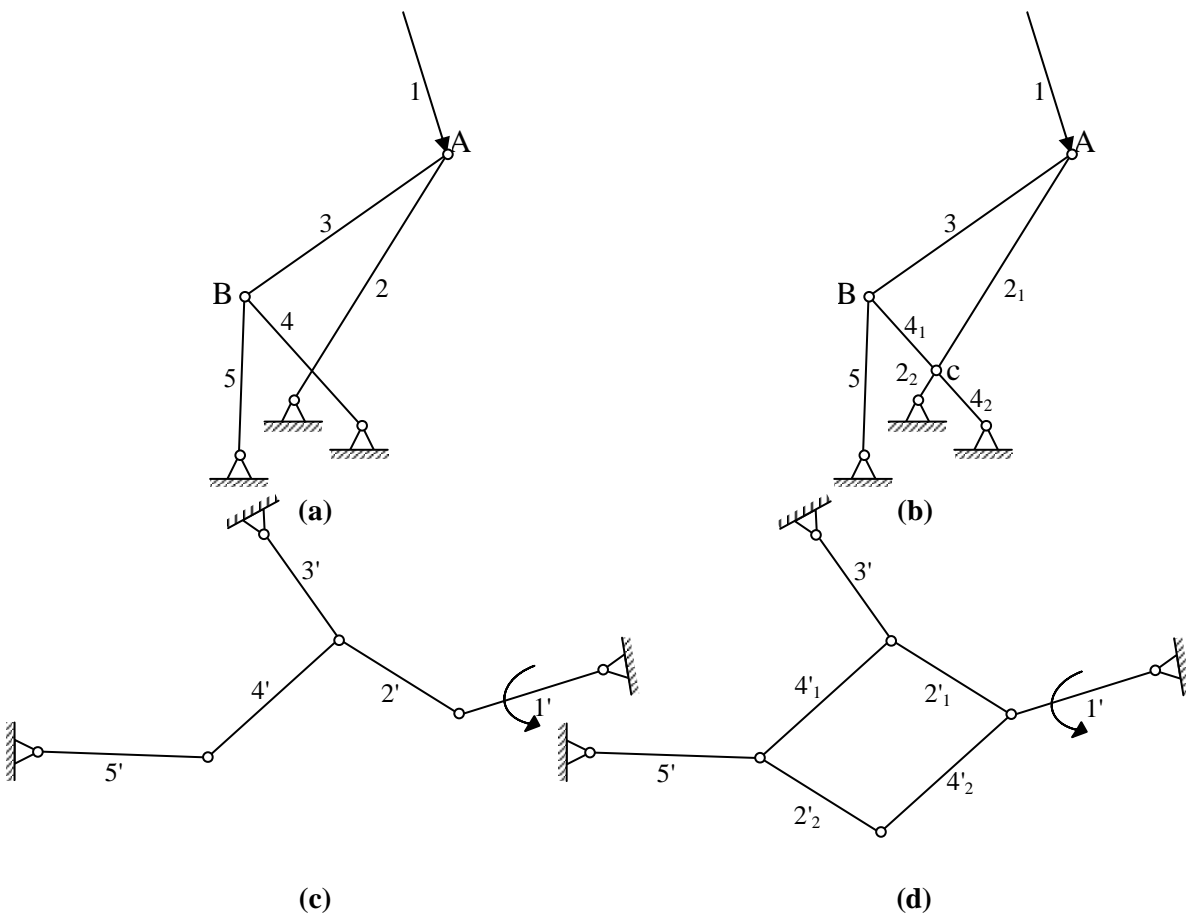
המרת המסבך המקורי למסבך האקוויוולנטי באמצעות Bow's notation אינה משנה את תכונותיו, כלומר אם המסבך המקורי יציב סטטית, אזי גם האקוויוולנט שלו יהיה יציב סטטית.

(ב) בניית גרף זרימות מתאים למסבך האקוויוולנטי.

(ג) בניית גרף פוטנציאלים דואלי.

(ד) קבלת מכניזם דואלי מגרף הפוטנציאלים. אף על פי שהמכניזם שיתקבל דואלי למסבך האקוויוולנטי, ניתן לקבוע על פיו מהן התכונות וההתנהגות של המסבך המקורי, וגם להעביר מידה מתחום אחד לתחום אחר. ניתן לעשות זאת כי, שיטת Bow's notation אינה משנה את התכונות של המסבך ואינה מחסירה את המידה עליו. כדי להמחיש את העובדה כי, המסבך האקוויוולנטי המתקבל בשיטת Bow's notation בעל תכונות זהות לאלה של המסבך המקורי, נציג דוגמה קטנה עם מסבך מישורי, לצורך הפשטת הבעיה. **באיור**

(a) **6.2** מתואר מסבך מישורי שבו מוטות 2 ו-4 נחתכים. באמצעות Bow's notation נבנה למסבך זה מסבך האקוויוולנטי שלו כמתואר **באיור** (b) **6.2**. כעת על ידי שימוש בדואליות בין מסבכים ומכניזמים נבנה לכל אחד מהמסבכים את המכניזם הדואלי שלו. **באיור** (c) **6.2** מתואר המכניזם הדואלי למסבך המקורי ו**באיור** (d) **6.2** המכניזם הדואלי למסבך האקוויוולנטי.



איור 6.2: דוגמה לקבלת מכניזמים הדואלים למסבך המקורי ולמסבך האקוויוולנטי

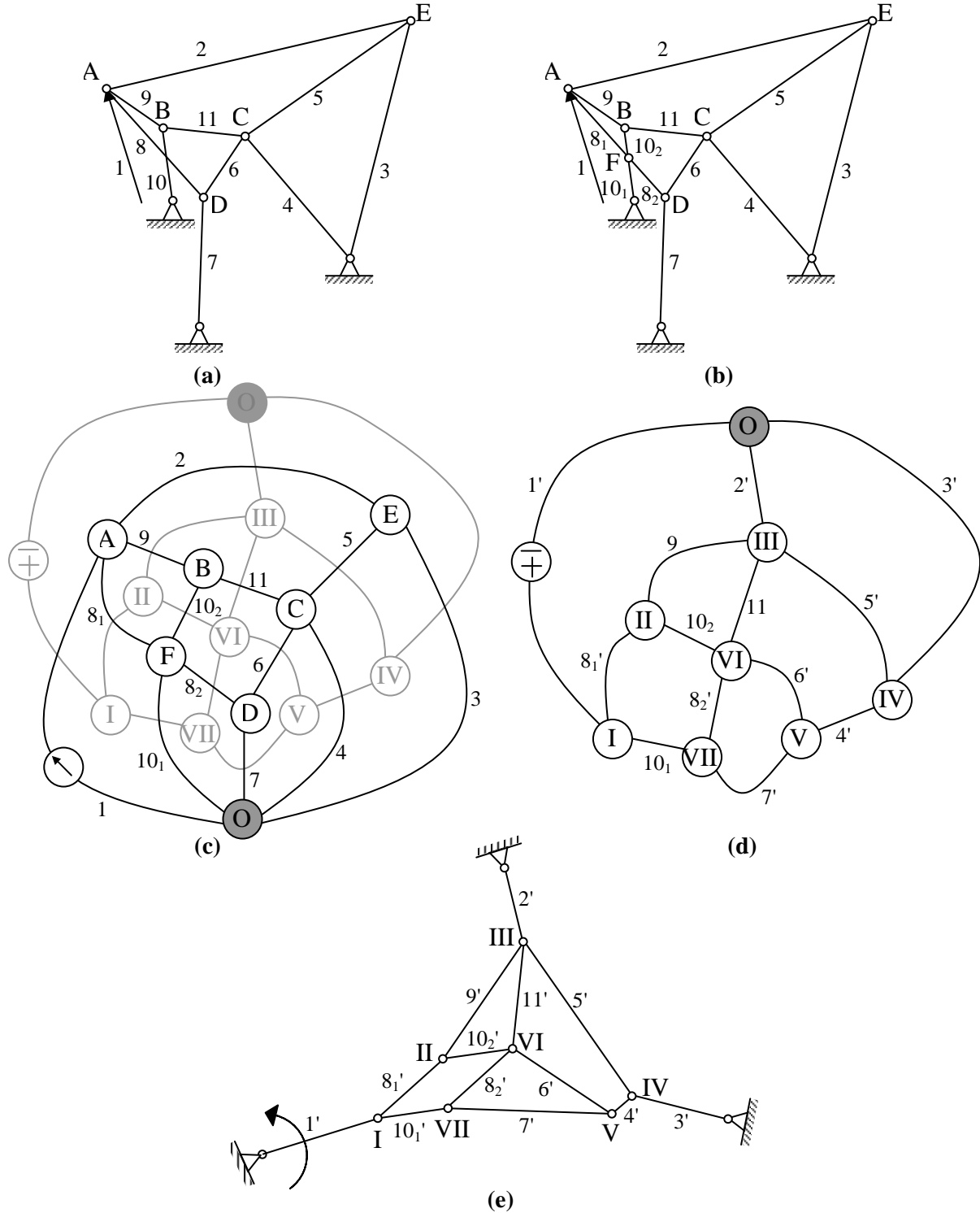
(a) המסבך מקורי. (b) המסבך האקוויוולנטי שהתקבל ב-Bow's notation. (c) המכניזם הדואלי למסבך המקורי. (d) המכניזם הדואלי למסבך האקוויוולנטי.

ניתן לראות שהמכניזמים הדואלים שהתקבלו (c,d) בעלי תכונות דומות, אף על פי שבמכניזם שהתקבל למסבך עם Bow's notation (d), התווספה דיאדה (2'-4'), כתוצאה מחלוקת המוטות 2 ו-4 במסבך

(b). אם נתבונן במהירויות של החוליות המתאימות בשני המכניזמים (לדוגמה, חוליה 3' במכניזם (c) וחוליה 3 במכניזם (d)) נראה שהמהירויות שלהן זהות.

6.1.3 דוגמה לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי באמצעות Bow's notation

באיור (a) מתואר מסבך לא מישורי שפורטו בסעיף 6.1.2 לקבלת מכניזם דואלי.



איור 6.3: שלבים לקבלת מכניזם הדואלי למסבך לא מישורי

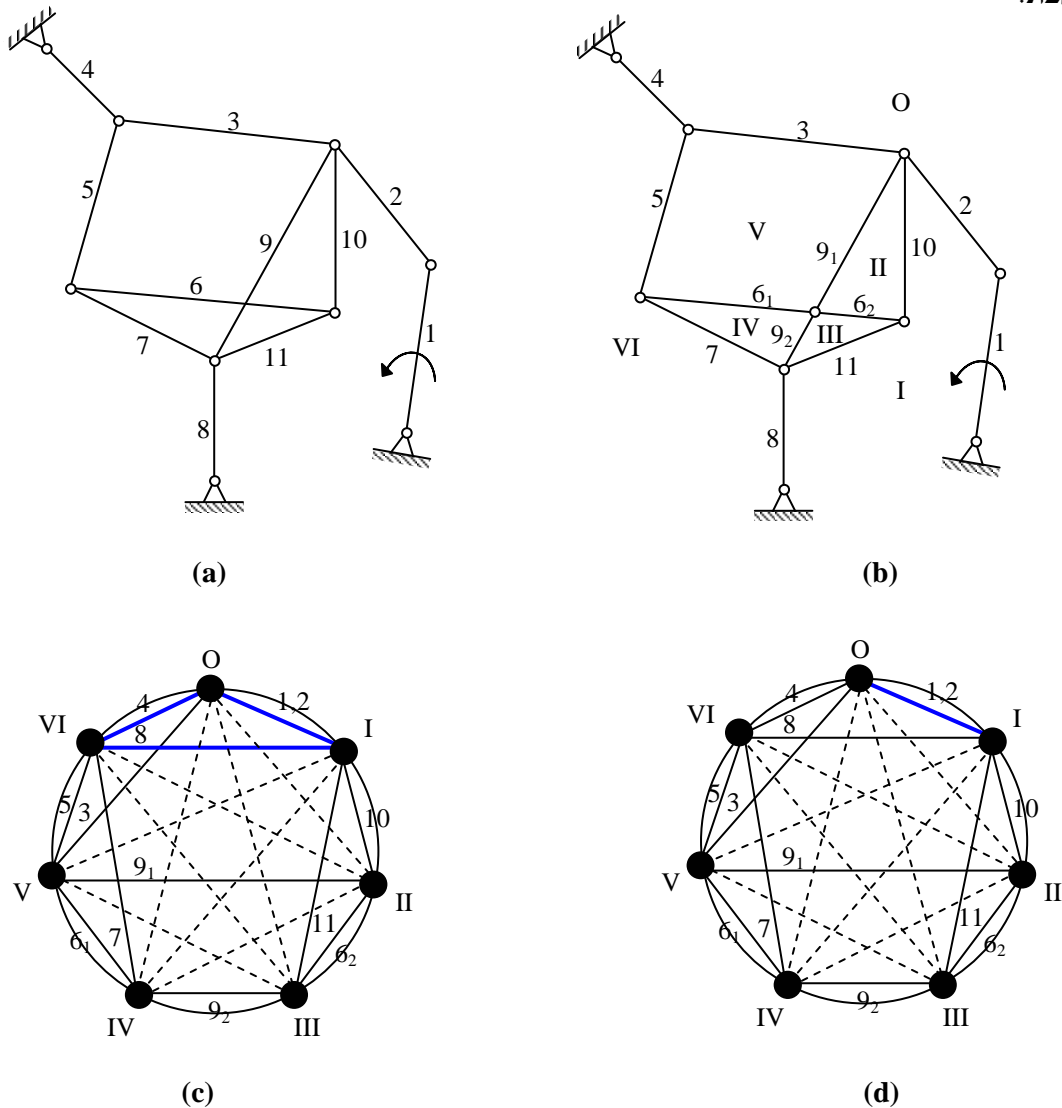
(a) מסבך לא מישורי שבו נחתכים מוטות 8 ו-10. (b) מסבך אקוויוולנטי שהתקבל כתוצאה מהפעלת שיטת Bow's notation, שבה התווסף צומת במקום חיתוך של המוטות וכל מוט התחלק לשני מוטות נוספים. (c) גרף זרימות המתאים למסבך האקוויוולנטי. (d) גרף פוטנציאלים דואלי. (e) מכניזם דואלי למסבך האקוויוולנטי.

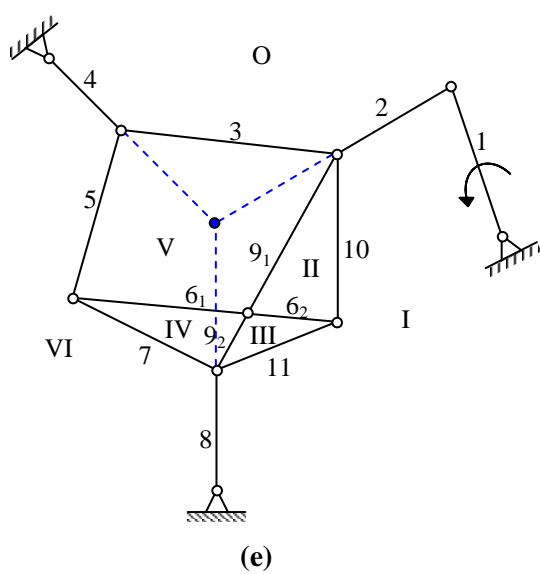
6.2 הרחבת שיטת הכוח בפאה במכניזמים לא מישוריים

בשנים אחרונות דווח בספרות על שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים של מכניזמים מישוריים (Shai and Polansky, 2005). בסעיף הזה נרחיב את השיטה הזו גם למכניזמים לא מישוריים.

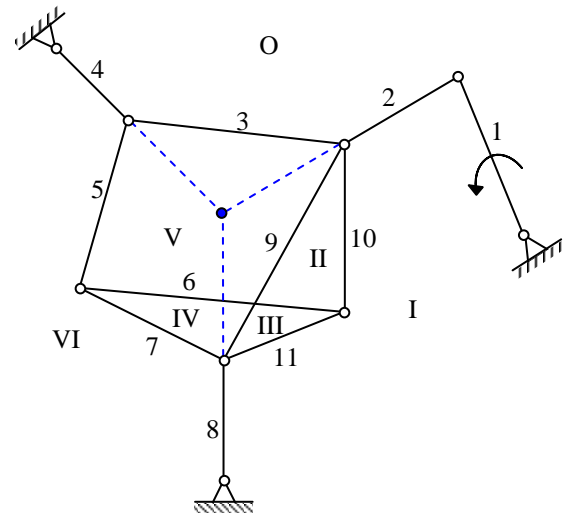
כפי שהוסבר בסעיף 6.1.1, שיטת Bow's notation הופכת מסבך שקיימים בו מוטת נחתכים למסבך האקוויוולנטי שבמקום החיתוך יופיע מפרק, מבלי לשנות את התכונות והכוחות של המסבך המקורי. בסעיף 6.1.2 הראנו שניתן להשתמש בשיטה הזו להפיכת מסבכים לא מישוריים למסבכים מישוריים האקוויוולנטיים. מכיוון שבמכניזם במצב מת פועלים כוחות במוטות הוא מהווה רגעית מסבך, ולכן ניתן להפעיל עליו את שיטת Bow's notation. מכאן ניתן לסכם כי, במציאת מצב סינגולרי של מכניזם לא מישורי, ראשית נהפוך אותו למישורי באמצעות שיטת Bow's notation, ורק אז נפעיל עליו שיטת הכוח בפאה.

באיור 6.4 מובאת דוגמה המתארת את מציאת מצב סינגולרי למכניזם לא מישורי בשיטת הכוח בפאה המורחבת.





(e)



(f)

איור 6.4: דוגמה למציאת מצב סינגולרי למכניזם לא מישורי באמצעות שיטת הכוח בפאה המורחבת
 (a) מכניזם לא מישורי. (b) מכניזם אקוויוולנטי מישורי, שהתקבל מ-Bow's notation. (c) מציאת כיוון הכוח המופעל על ידי חוליה מניעה (כיוון הכוח מקביל לחוליה 2). (d) קיום תנאי של חיתוך המשכי שלוש חוליות בנקודה אחת (חוליות 2, 4 ו-8 נחתכות בנקודה אחת). (e) המצב הסינגולרי של המכניזם האקוויוולנטי. (f) המרה בחזרה למכניזם לא מישורי, וקבלת המצב הסינגולרי של המכניזם הלא מישורי.

פרק 7

דואליות בין pillar systems ומכניזמים על בסיס דואליות בין גרף זרימות קווי

FLGR וגרף פוטנציאלים קווי PLGR

בפרקים הקודמים דיברנו על הדואליות בין מסבכים ומכניזמים, שנבעה מהדואליות בין גרף זרימות (FGR) וגרף פוטנציאלים (PGR). בפרקים הבאים נדון בסוג אחר של דואליות המבוססת אף היא על תורת הגרפים, בין מערכת פלטות ומוטות (pillar system) ומכניזם, הנובעת הפעם מהדואליות בין גרף זרימות קווי (FLGR) וגרף פוטנציאלים קווי (PLGR).

7.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באיור 7.1 מיוצג תרשים זרימה של נושאים שנדבר עליהם בפרק 7. הפרק מחולק לשלושה שלבים.

שלב א': נראה שעל בסיס הדואליות בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי נובע קיום דואליות בין pillar system מסוים סטטי למכניזם בעל דרגת חופש אחת.

א.1 נראה כי כל pillar system מסוים סטטי ניתן להציג באמצעות גרף זרימות קווי

(Flow Line Graph Representation), כאשר כל מוט ייוצג על ידי קשת בגרף וכל פלטה על ידי

צומת בגרף. כוח חיזוני שפועל במסבך ייוצג באמצעות קשת מקור זרימה בגרף.

א.2 נראה כי כל מכניזם בעל דרגת חופש אחת ניתן להציג באמצעות גרף פוטנציאלים קווי

(Potential Line Graph Representation), כאשר נציג כל חוליה במכניזם על ידי צומת בגרף וכל

מפרק במכניזם על ידי קשת בגרף. קשת המחברת בין צומת שמתאים לחוליה אדמה וצומת

שמתאים לחוליה מניעה תהיה קשת מקור הפוטנציאלים בגרף.

א.3 נראה שגרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי הם ייצוגים דואלים.

א.4 מהדואליות בין גרף זרימות לגרף פוטנציאלים נקבל שגם pillar system מסוים סטטי דואלי

למכניזם בעל דרגת חופש אחת, כאשר כוחות במוטות ומומנטים ב-pillar system מתאימים

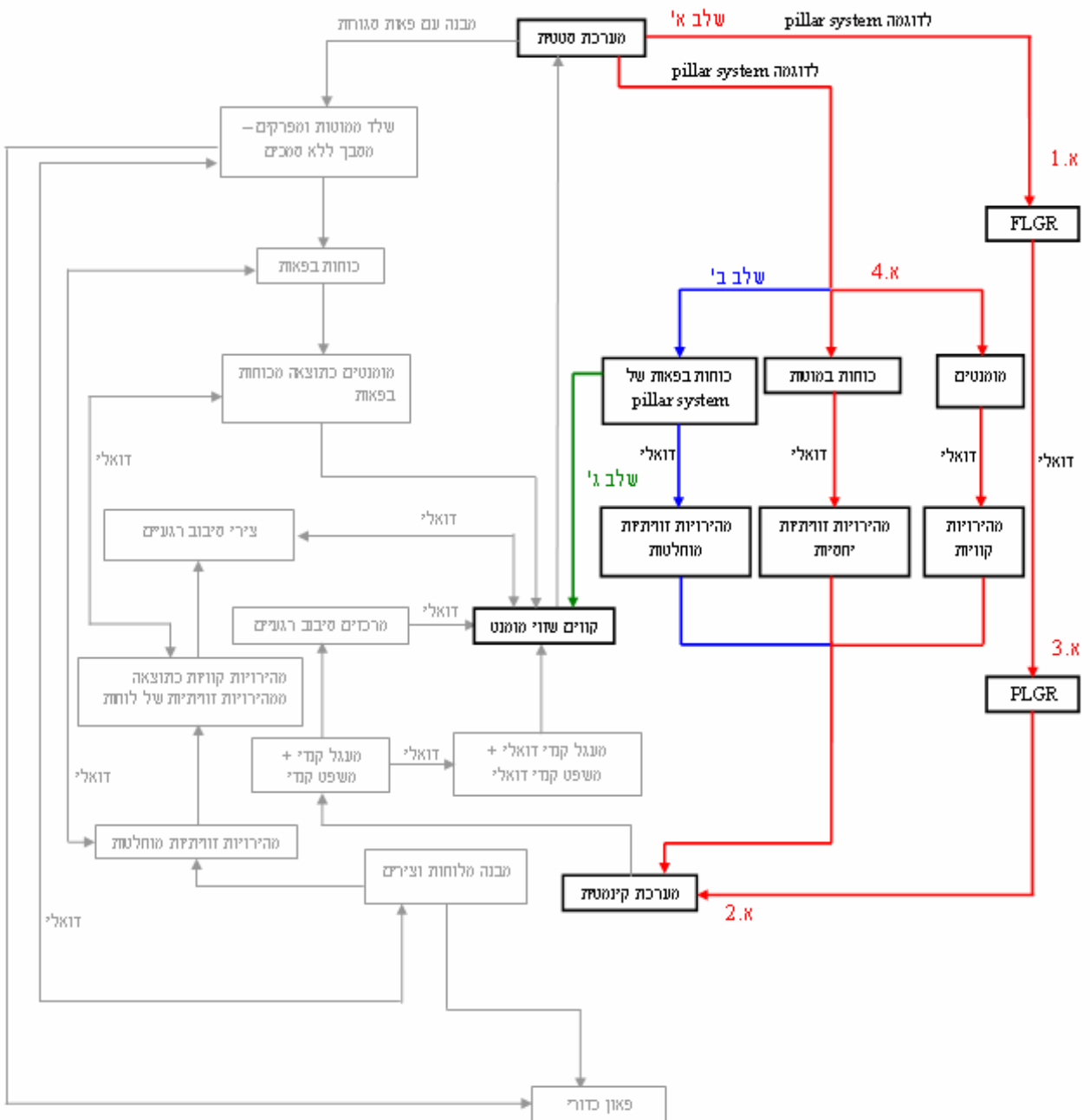
למהירויות זוויתיות יחסיות ומהירויות קוויות של חוליות במכניזם, בהתאמה.

שלב ב': על סמך הדואליות בין pillar system ומכניזם נגדיר משתנה נוסף חדש בסטטיקה, המכונה כוח

בפאה של pillar system, שהוא בעל תכונות זהות למשתנה כוח בפאה, שהזכרנו בפרקים קודמים. נראה

שכוח במרחב דואלי למהירות זוויתית מוחלטת של חוליה.

שלב ג': לאחר שהצגנו כוח במרחב, נראה שבדומה לכוח בפאה גם הוא מגדיר לנו קו שווה מומנט.



איור 7.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 7

7.2 גרף זרימות קווי וייצוג ה-pillar system באמצעותו

pillar system היא מערכת סטטית הבנויה מפלטות המחוברות על ידי מוטות ועליה פועל כוח חיצוני. מערכת זו בשיווי משקל, דהיינו סכום הכוחות והמומנטים הפועלים על כל פלטה שווה לאפס. בפרק 3 הראנו שניתן לייצג כל מסבך באמצעות גרף זרימות (FGR). בסעיף הזה נדבר על ייצוג גרפי אחר, המכונה גרף זרימות קווי (FLGR) (Shai and Penock, 2006), שהוא שילוב של גרף זרימות (FGR) וגרף קווי (LGR) (Shai, 2001c). גרף זרימות קווי (FLGR) שונה מגרף זרימות (FGR) בשיטת ההצגה של המערכת ההנדסית. אם בגרף זרימות (FGR) קשתות היו מתאימות לאלמנטים במערכת וצמתים לקשרים פנימיים שלהם, אזי שבגרף זרימות קווי (FLGR) ההיפך הוא נכון. נראה איך בעזרת גרף זרימות קווי ניתן לייצג pillar system.

7.2.1 גרף זרימות קווי Flow Line Graph Representation

ההגדרה של גרף זרימות קווי (FLGR) דומה להגדרה של גרף זרימות (FGR). **גרף זרימות קווי** (Flow Line Graph) הוא גרף מכוון G , כאשר ניתן להגדיר זרימות בכל קשתות הגרף, כך שהן יקיימו חוק זרימות (סעיף 3.2.1). באמצעות גרף זרימות קווי FLGR ניתן לייצג מערכות הנדסיות כגון: מערכת פלטות ומוטות (Pillar system), קורות ורובוטים מקבילים, לדוגמה, פלטפורמת Stewart. במסגרת העבודה הזו נשתמש בייצוג גרפי זה על מנת לייצג pillar system.

7.2.2 ייצוג ה-pillar system באמצעות גרף זרימות קווי

כל pillar system ניתן לייצג באמצעות גרף זרימות קווי, כאשר הפלטות והמוטות במערכת מיוצגים על ידי צמתים וקשתות, בהתאמה. את הכוחות הפועלים במוטות נייצג על ידי זרימות בקשתות של הגרף. pillar system היא מערכת תלת מימדית, לכן גם הזרימות בגרף יהיו תלת מימדיות. כיוון שהכוחות במוטות מתאימים לזרימות בקשתות הגרף, הם מקיימים את חוק הזרימות.

7.2.3 שלבי בניית גרף הזרימות הקווי ל-pillar system

בדומה לבנייה של גרף זרימות (FGR), גם כאן נחלק את הבנייה לשני שלבים עיקריים: בניית טופולוגיה של ה-pillar system, שמתארת חיבור של מוטות לפלטות ומיקום פעולת כוח חיצוני. בשלב שני נוסף גיאומטריה של המערכת, שמתארת שיפועים של מוטות (שיפועים של כוחות הפועלים במוטות, כלומר כיוונים) ושל כוח חיצוני. בניית טופולוגיה:

- א. הפלטה הנייחת מיוצגת על ידי צומת מיוחד, שיקרא-צומת ייחוס.
- ב. כל פלטה מיוצגת על ידי צומת בגרף.
- ג. כל מוט מיוצג על ידי קשת בגרף, כאשר שני צמתי הקצה של הקשת מתאימים לשתי הפלטות שהמוט מתחבר אליהן.
- ד. כוח חיצוני נייצג כקשת עם מקור זרימה המחברת בין צומת הייחוס לבין הצומת המתאים לפלטה שעליה הוא פועל.

הוספת גיאומטריה :

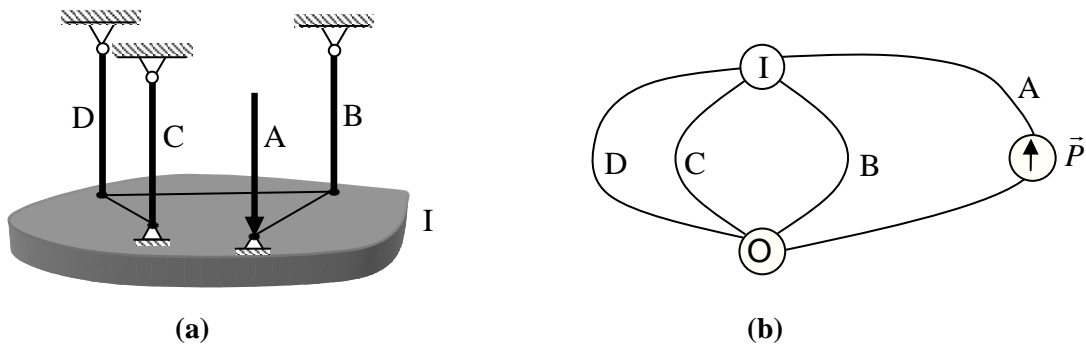
א. קביעה שרירותית של כיווני קשתות הגרף.

ב. קביעת שיפועי המוטות שהינם למעשה הכוחות הפועלים במוטות והשיפוע של הכוח החיצוני.

השיפוע נקבע כאשר אנחנו נמצאים בצומת הזנב של הקשת המתאימה ומודדים הזווית מציר ה-X

החיובי עד לקשת בכיוון נגד כיוון השעון.

7.2.4 דוגמה לבניית טופולוגית גרף הזרימות קווי ל-pillar system



איור 7.2: pillar system וגרף זרימות קווי המתאים לו

7.3 גרף פוטנציאלים קווי וייצוג מכניזם באמצעותו

בנוסף לייצוג מסבכים באמצעות גרף זרימות דיברנו גם בפרק 3 על הייצוג של מכניזמים באמצעות גרף פוטנציאלים (PGR). בסעיף הזה נציג ייצוג גרפי נוסף, המכונה גרף פוטנציאלים קווי (PLGR) (Shai and Penock, 2006), ונראה איך באמצעותו ניתן לייצג כל מכניזם. גרף פוטנציאלים קווי זהו שילוב של גרף פוטנציאלים (PGR) וגרף קווי (LGR). בדומה לגרף זרימות קווי, הצמתים שלו מתאימים לאלמנטים במערכת וקשתות לקשרים פנימיים שלהם.

7.3.1 גרף פוטנציאלים קווי Potential Line Graph Representation

גרף פוטנציאלים קווי (Potential Line Graph) הוא גרף מכוון G , כאשר ניתן להגדיר פוטנציאלים בכל צמתי הגרף, כך שהפרשי הפוטנציאלים בקשתות הגרף יקיימו את חוק הפוטנציאלים (סעיף 3.3.1). באמצעות גרף פוטנציאלים קווי PLGR ניתן לייצג מערכות הנדסיות כגון: מכניזמים, רובוטים טוריים ומערכות פלנטריות. בעבודה זו נתמקד בייצוג של מכניזמים.

7.3.2 ייצוג מכניזם באמצעות גרף פוטנציאלים קווי

כל מכניזם ניתן לייצג באמצעות גרף פוטנציאלים קווי, כאשר החוליות והמפרקים שלו מיוצגים על ידי צמתים וקשתות, בהתאמה. הפרשי פוטנציאלים בקשתות הגרף מייצגים את המהירויות הזוויתיות היחסיות במכניזם. ההבדל בין גרף פוטנציאלים PGR וגרף פוטנציאלים קווי PLGR הוא שבאחרון, הצמתים בגרף מתאימים לחוליות

במכניזם וקשתות למפרקים המחוברים ביניהן. מכניזם הוא מערכת דו מימדית, לכן גם וקטורי הפרשי פוטנציאלים יהיו דו מימדיים. כיוון שהמהירויות הזוויתיות היחסיות של המכניזם מתאימות להפרשי הפוטנציאלים בקשתות, הם מקיימים את חוק הפוטנציאלים.

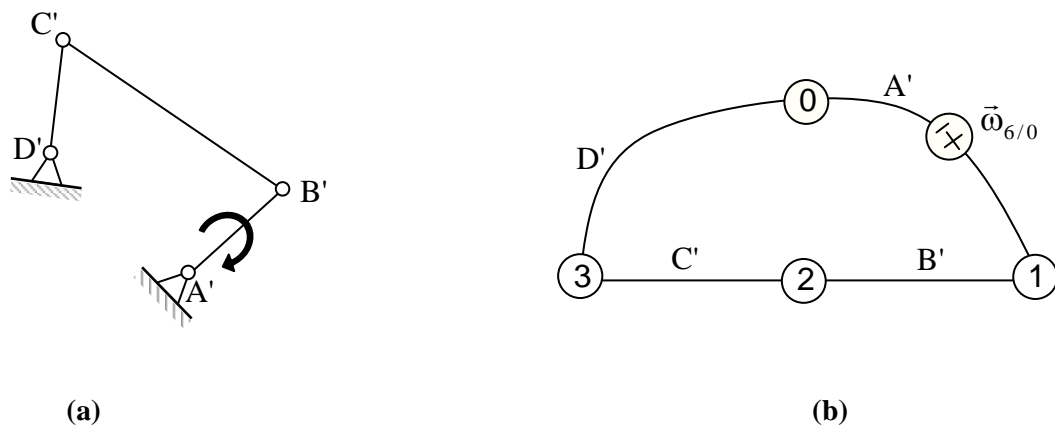
7.3.3 שלבי בניית של גרף הפוטנציאלים הקווי למכניזם

בניית טופולוגיה:

- א. חולייה נייחת מיוצגת על ידי צומת מיוחד, שיקרא- צומת ייחוס.
 - ב. כל חוליה מיוצגת על ידי צומת בגרף.
 - ג. כל מפרק מיוצג על ידי קשת בגרף.
 - ד. קשת המחברת בגרף בין הצומת שמתאים לחוליה המניעה וצומת הייחוס, תהיה קשת עם מקור פוטנציאלים.
- הוספת גיאומטריה:

- א. קביעה שרירותית של כיווני הקשתות של הגרף.
- ב. קביעת שיפועי המהירויות הזוויתיות היחסיות הקימות בכל המפרקים.

7.3.4 דוגמה לבניית טופולוגית גרף הפוטנציאלים הקווי למכניזם



איור 7.3: מכניזם וגרף פוטנציאלים קווי המתאים לו

7.4 הדואליות בין ה-pillar systems ומכניזמים על בסיס הדואליות בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי

בסעיפים הקודמים בנינו גרף זרימות קווי המתאים ל-pillar system מסוים סטטי וגרף פוטנציאלים קווי למכניזם בעל דרגת חופש אחת. בסעיף זה נראה על בסיס דואליות מתורת הגרפים, ששתי מערכות אלו הן מערכות דואליות.

7.4.1 דואליות בין גרף זרימות קווי לבין גרף פוטנציאלים קווי

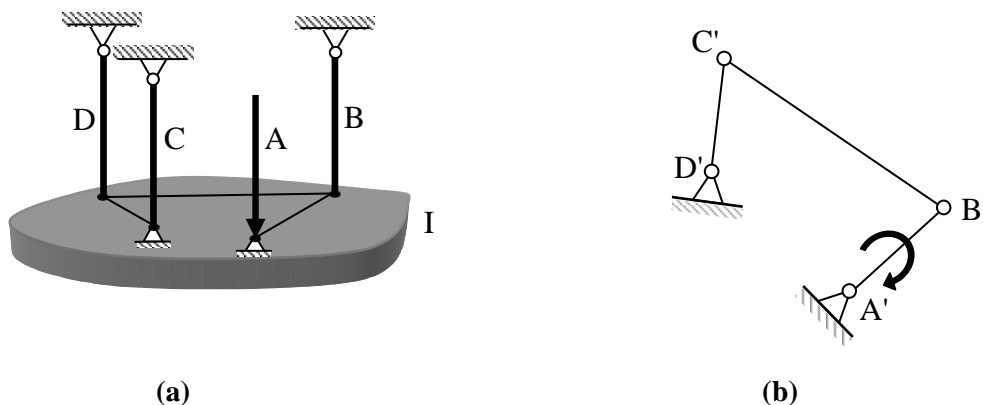
הגדרת הדואליות בין גרף זרימות קווי (FLGR) וגרף פוטנציאלים קווי (PLGR) זהה להגדרת הדואליות בין גרף זרימות FGR וגרף פוטנציאלים PGR (ראה סעיף 3.4.5). זרימות בקשתות של גרף הזרימות הקווי

שקולות להפרשי פוטנציאלים בקשתות של גרף הפוטנציאלים הקווי הדואלי, מכאן נובע שגרף הדואלי לגרף זרימות מקיים את חוק הפוטנציאלים, וגרף הדואלי לגרף פוטנציאלים מקיים את חוק הזרימות. להבדיל מגרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי, הייצוגים הגרפיים FGR ו-PGR הם אורטוגונלים, דהיינו זרימות בגרף זרימות מאונכות להפרשי פוטנציאלים בגרף פוטנציאלים. לעומת זאת, זרימות והפרשי הפוטנציאלים בקשתות של גרף הזרימות הקווי וגרף הפוטנציאלים הקווי בהתאמה, מקבילים.

7.4.2 דואליות בין ה-pillar systems ומכניזמים

נסכם מה שנאמר עד כה. ראשית, ניתן לייצג את ה-pillar system באמצעות גרף זרימות קווי ואת המכניזם באמצעות גרף פוטנציאלים קווי. שנית, הראנו שהגרפים האלו דואלים. מכאן ניתן להסיק שה-pillar system דואלי למכניזם. אם הזרימות בקשתות של גרף הזרימות הקווי מייצגות כוחות הפועלים במוטות

ה-pillar system, והפרשי הפוטנציאלים בקשתות גרף הפוטנציאלים הקווי מייצגים מהירויות זוויתיות יחסיות במכניזם, וכיוון שהזרימות בקשתות של גרף הזרימות הקווי מתאימות להפרשי הפוטנציאלים בקשתות של גרף הפוטנציאלים הדואלי לו, ניתן לומר שכוחות הפועלים במוטות ה-pillar system מתאימים למהירויות זוויתיות יחסיות במכניזם. **באיור 7.4** מתוארים pillar system ומכניזם שדואלים אחד לשני.



איור 7.4: pillar system ומכניזם דואלים
(a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) pillar system דואלי.

7.4.3 כוח בפאה ו-pillar system

בסעיף הקודם ראינו כי מהירויות זוויתיות יחסיות במכניזם דואליות לכוחות הפועלים במוטות של ה-pillar system הדואלי. נשאלת השאלה, למה דואליות המהירויות הזוויתיות המוחלטות של החוליות במכניזם? בתזה מדווח לראשונה על משתנה חדש המכונה **כוח בפאה של pillar system**, אשר הוא דואלי למהירות הזוויתית המוחלטת. כוח בפאה של דומה בתכונותיו לכוח בפאה (סעיף 3.5.1). כמו לכל כוח יש לו קו פעולה שלאורכו הוא פועל, ולכן המומנט שהוא יוצר עליו שווה לאפס. מכאן מקבלים שקו הפעולת הכוח במרחב זהו קו שווה מומנט מוחלט (סעיף 3.5.3), שהפעם הוא קו מרחבי. בדומה למסבכים, הכוחות במוטות שווים להפרשים בין הכוחות בפאות הסמוכות. לכל זוג כוחות בפאות קיים קו שעליו הם יוצרים מומנט זהה. קו זה מכונה קו שווה מומנט יחסי.

7.4.4 קשרים דואלים נוספים בין מכניזמים ו-pillar systems

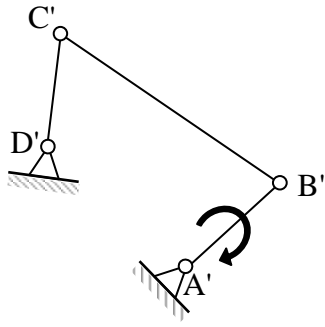
1. נקודה במכניזם מתאימה לקו ב-pillar system. לדוגמה, נקודות החיבור בין החוליות במכניזם מתאימות לקווים שלאורכם עוברים המוטות ב-pillar system.
2. חוליה במכניזם מתאימה לפאה ב-pillar system. קשר זה נובע מכך שחוליות במכניזם מיוצגות על ידי צמתים בגרף פוטנציאלים קווי, ובגרף זרימות קווי דואלי צמתים מתאימים לפאות המייצגות פאות ב-pillar system.
3. מהירויות קוויות במכניזם דואליות למומנטים ב-pillar system : מהירות קווית של חוליה בנקודה כלשהי שווה למהירות הזוויתית שלה (מהירות זוויתית של חוליה = מהירות זוויתית מוחלטת) כפול המרחק מהנקודה שבה מהירות החוליה שווה לאפס ועד לנקודה הרצויה. מומנט שכוח בפאה מפעיל על קו כלשהו ב-pillar system שווה לכוח כפול מרחק מקו פעולתו עד לקו הרצוי.
4. מהירויות זוויתיות מוחלטות במכניזם דואליות לכוחות בפאות ב-pillar system.

7.4.5 שלבים לבניית pillar system דואלי ממכניזם

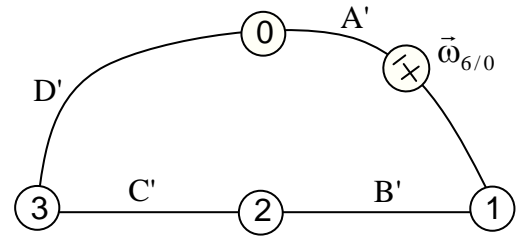
- בסעיף הבא נפרט מה הם השלבים לקבל pillar system דואלי ממכניזם, כאשר השיטה מבוססת על הדואליות שהצגנו בסעיף 7.4.1.
- נניח שנתון מכניזם.
- ד. בניית גרף פוטנציאלים קווי : נבנה גרף פוטנציאלים קווי המתאים למכניזם הנתון.
 - ה. בניית גרף דואלי : נבנה גרף זרימות קווי כך שיהיה דואלי לגרף הפוטנציאלים הקווי שקיבלנו בסעיף א'.
 - ו. קבלת pillar system דואלי : מגרף הזרימות הקווי נבנה pillar system מתאים שהוא דואלי למכניזם המקורי.

7.4.6 דוגמה לבניית pillar system דואלי ממכניזם

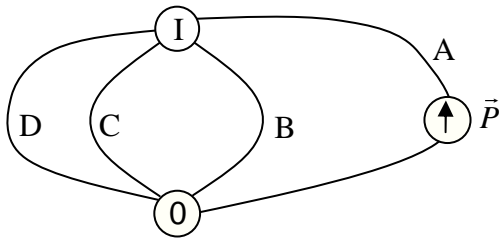
נראה בדוגמה הבאה את קבלת pillar system ממכניזם.



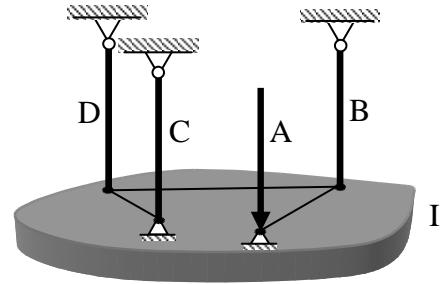
(a)



(b)



(c)



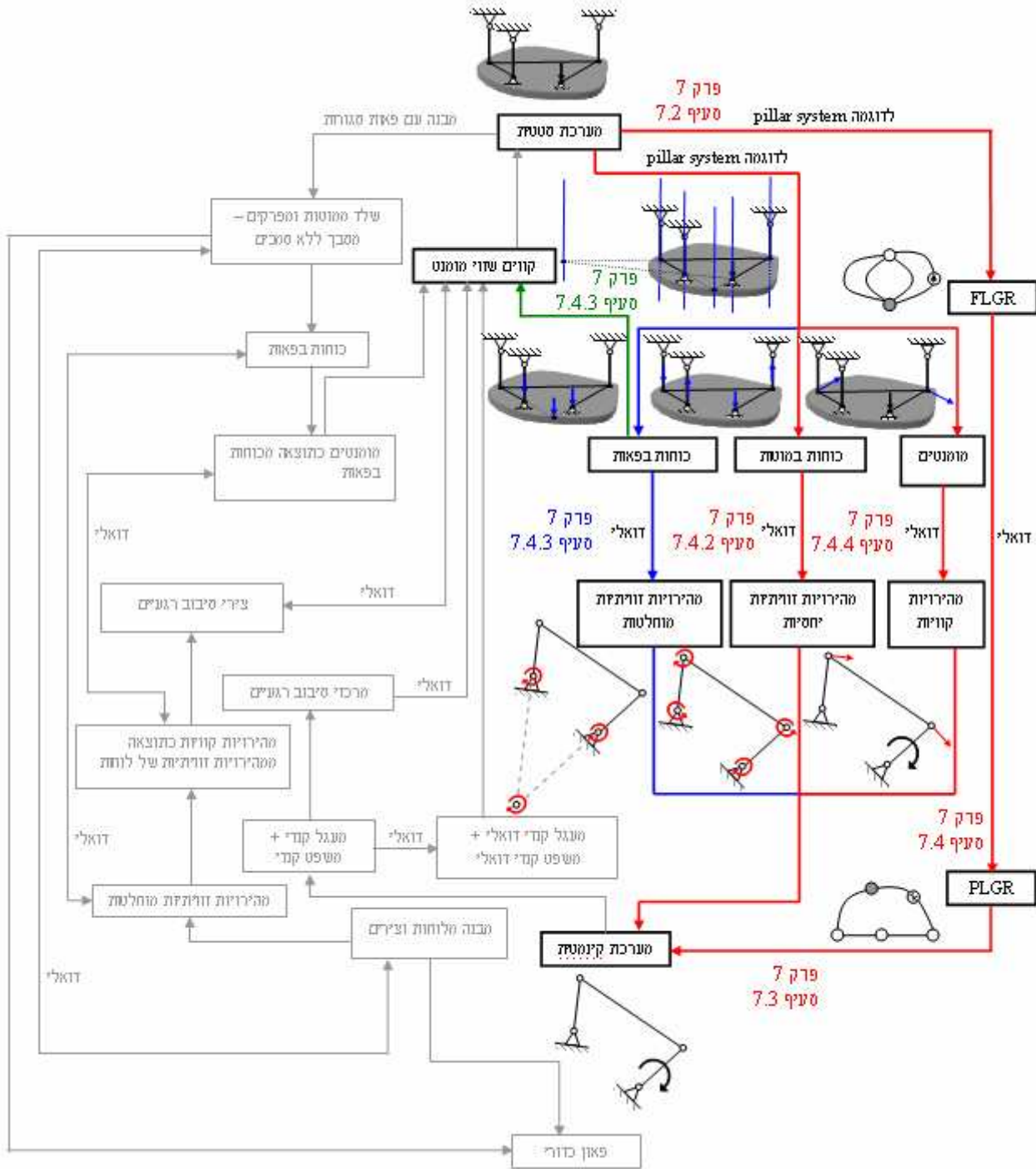
(d)

איור 7.5: דוגמה לקבלת pillar system ממכניזם על בסיס הדואליות בין FLGR ו-PLGR

(a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) גרף פוטנציאלים קווי המתאים למכניזם ב-(a). (c) גרף זרימות קווי דואלי לגרף פוטנציאלים קווי ב-(b). (d) pillar system המתאים לגרף זרימות קווי שמיוצג ב-(c).

7.5 סיכום הפרק

לסיכום באיור 7.6 נציג את תרשימי הזרימה שראינו באיור 7.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 7.6: תרשימי הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 7

פרק 8

דואליות בין מושגים בקינמטיקה וסטטיקה

בפרק 7 הצגנו את הדואליות בין גרף הזרימות הקווי וגרף הפוטנציאלים הקווי. בפרק זה נשתמש בדואליות הזו כדי להראות שמרכזי סיבוב רגועים דואלים לקווים שווי מומנט ומכאן נקבל משפט חדש בסטטיקה הדואלי למשפט קנדי הידוע בקינמטיקה.

8.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

איור 8.1 מתאר תרשים זרימה של הנושאים שנדבר עליהם בפרק הזה. הפרק מחולק לשני שלבים עיקריים.

שלב א': ניקח מכניזם ונפעיל עליו את השיטה למציאת מרכזי הסיבוב הרגועים שלו.

א.1 בניית מעגל קנדי ושימוש במשפט קנדי הידוע בקינמטיקה.

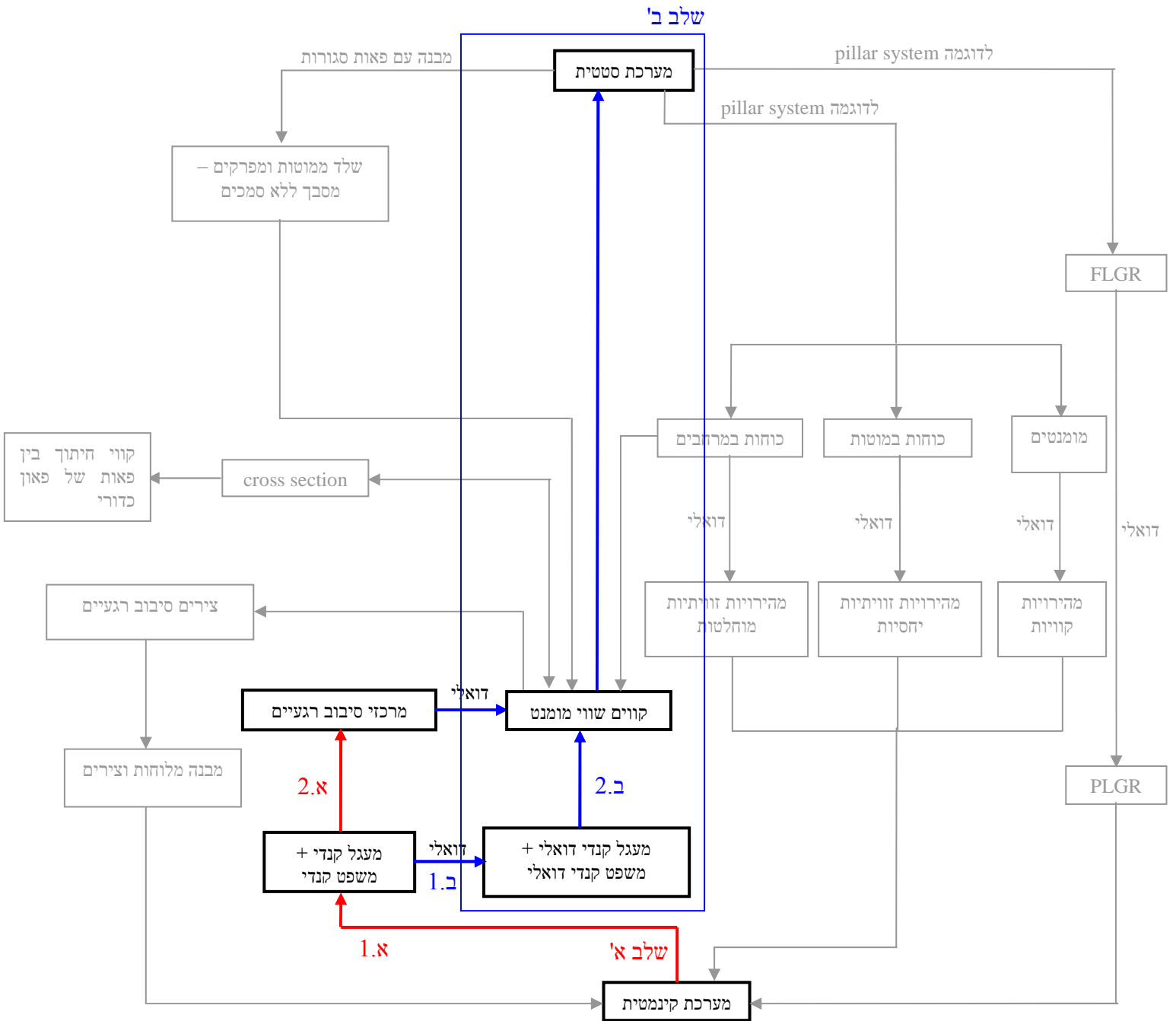
א.2 מציאת כל מרכזי הסיבוב הרגועים של המכניזם.

שלב ב': נראה שמרכזי סיבוב רגועים דואלים לקווים שווי מומנט, ומכאן נמצא שיטה דואלית לזו שבעזרתה ניתן למצוא מרכזי סיבוב רגועים, כאשר השיטה החדשה תשמש למציאת קווים שווי מומנט ב-

pillar system. מכאן נקבל גם משפט בסטטיקה שהינו דואלי למשפט קנדי הידוע בקינמטיקה.

ב.1 בניית מעגל קנדי דואלי ושימוש במשפט הדואלי למשפט קנדי.

ב.2 מציאת כל קווים שווי המומנט של ה-pillar system.



איור 8.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 8

8.2 סקירת השיטה הידועה למציאת מרכזי סיבוב רגועים במערכת קינמטית

כדי שנוכל להראות קשר בין מרכזי סיבוב רגועים וקווים שווי מומנט חובה עלינו להציג את השיטה למציאת מרכזי סיבוב רגועים במערכת קינמטית הידועה ומדווחת בהרחבה בספרות, לדוגמה (פסן ו-שביט, 1975).

8.2.1 שלבים למציאת מרכזי סיבוב רגועים

א. חישוב מספר מרכזי סיבוב רגועים: להלן הנוסחה לחישוב מספר מרכזי סיבוב רגועים במכניזם.

$$N_{i-c} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (8.1)$$

כאשר:

N_{i-c} - מספר מרכזי הסיבוב הרגועים במכניזם.

n - מספר החוליות במכניזם (כולל חוליית אדמה).

ב. סימון חוליות המכניזם במעגל קנדי: לכל חוליה במכניזם נסמן צומת במעגל קנדי.

ג. סימון מרכזי הסיבוב הרגועים הידועים על המעגל: במעגל קנדי, נחבר בקו מלא בין הצמתים המתאימים לחוליות שמרכז הסיבוב הרגועי ביניהן ידוע.

ד. סימון מרכזי הסיבוב הרגועים הלא ידועים על המעגל: במעגל קנדי, נחבר בקו מרוסק בין הצמתים המתאימים לחוליות שמרכז הסיבוב הרגועים ביניהן לא ידועים.

ה. מציאת מרכזי סיבוב רגועים שלא ידועים: נחפש כל פעם מרובע מקווים מלאים כאשר הקו המרוסק הוא אלכסונו (המרובע בנוי מזוג משולשים כאשר הקו המרוסק הוא צלעם המשותפת). כיוון שכל קטע במעגל קנדי מתאים לנקודה במכניזם, וכל מעגל מגודל שלוש מתאים לשלושה מרכזי סיבוב רגועים הנמצאים על ישר אחד, אזי הקו המרוסק המשותף לשני המשולשים מתאים למרכז הסיבוב הרגועי הנמצא בחיתוך של שני הישרים. מכאן, במכניזם נקבל שני קווים שכל אחד מוגדר על ידי זוג מרכזי הסיבוב הרגועים (הקווים המלאים במרובע), כאשר לקווים אלו ישנה נקודה משותפת שהיא נקודת החיתוך שלהם. הנקודה הזו היא מרכז הסיבוב הרגועי שאותו אנו מחפשים (הקו המרוסק במרובע).

ו. כל מרכזי סיבוב רגועי שמצאנו נסמנו במעגל קנדי בקו מלא במקום בקו מרוסק.

התהליך מסתיים ברגע שנמצא את כל מרכזי סיבוב רגועים.

ניתן לראות שתהליך בניית מעגל קנדי (שלבים ב'-ד') דומה לתהליך בניית גרף הפוטנציאלים הקווי, כי בדומה לגרף הפוטנציאלים הקווי, צמתיו מתאימים לאלמנטים במכניזם (חוליות) וקשתותיו לקשרים הפנימיים ביניהם (מרכזי סיבוב רגועים).

8.2.2 דוגמה למציאת מרכזי סיבוב רגועים

נתון מכניזם ארבעה מוטות המתואר באיור 8.2 (a), ויש למצוא את כל המרכזי הסיבוב הרגועים של המערכת. לצורך כך נפעיל את שלבי השיטה שפורטו בסעיף הקודם.

א. חישוב מספר מרכזי סיבוב רגועים: יש לנו ארבע חוליות במכניזם ($n=4$). נציב בנוסחה (8.1) ונקבל:

$$N_{i-c} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

כלומר יש לנו סה"כ שישה מרכזי סיבוב רגועים במערכת.

ב. סימון חוליות המכניזם במעגל קנדי: המכניזם בנוי מארבע חוליות, לכן נסמן ארבעה צמתים

במעגל קנדי, כמתואר באיור 8.2 (b).

ג. סימון מרכזי הסיבוב הרגועים על המעגל: במכניזם זה ידועים לנו ארבעת מרכזי הסיבוב

הרגועים הבאים: I_1^0 , I_1^2 , I_2^3 ו- I_3^0 , שאותם נסמן בארבעה קווים מלאים על מעגל קנדי,

כמתואר באיור 8.2 (c).

ד. סימון מרכזי הסיבוב הרגועים הלא ידועים על המעגל: במכניזם הנתון ישנם שני מרכזי סיבוב

רגועים לא ידועים והם: I_2^0 ו- I_1^3 . נסמן אותם בשני קווים מרוסקים על המעגל, כמתואר באיור

8.2 (d).

ה. מציאת מרכזי סיבוב רגועים שלא ידועים:

מציאת I_2^0 : הקו המרוסק המתאים למרכז הסיבוב הרגועי I_2^0 משותף לשני המשולשים $0'1'2'$ ו-

$0'3'2'$, המתאימים במכניזם לזוג הקווים, שאחד מהם עובר דרך מרכזי סיבוב רגועים I_1^0 ו-

I_1^2 והשני דרך I_3^0 ו- I_2^3 . נקודת החיתוך בין שני הקווים האלו היא מרכז הסיבוב הרגועי I_2^0 .

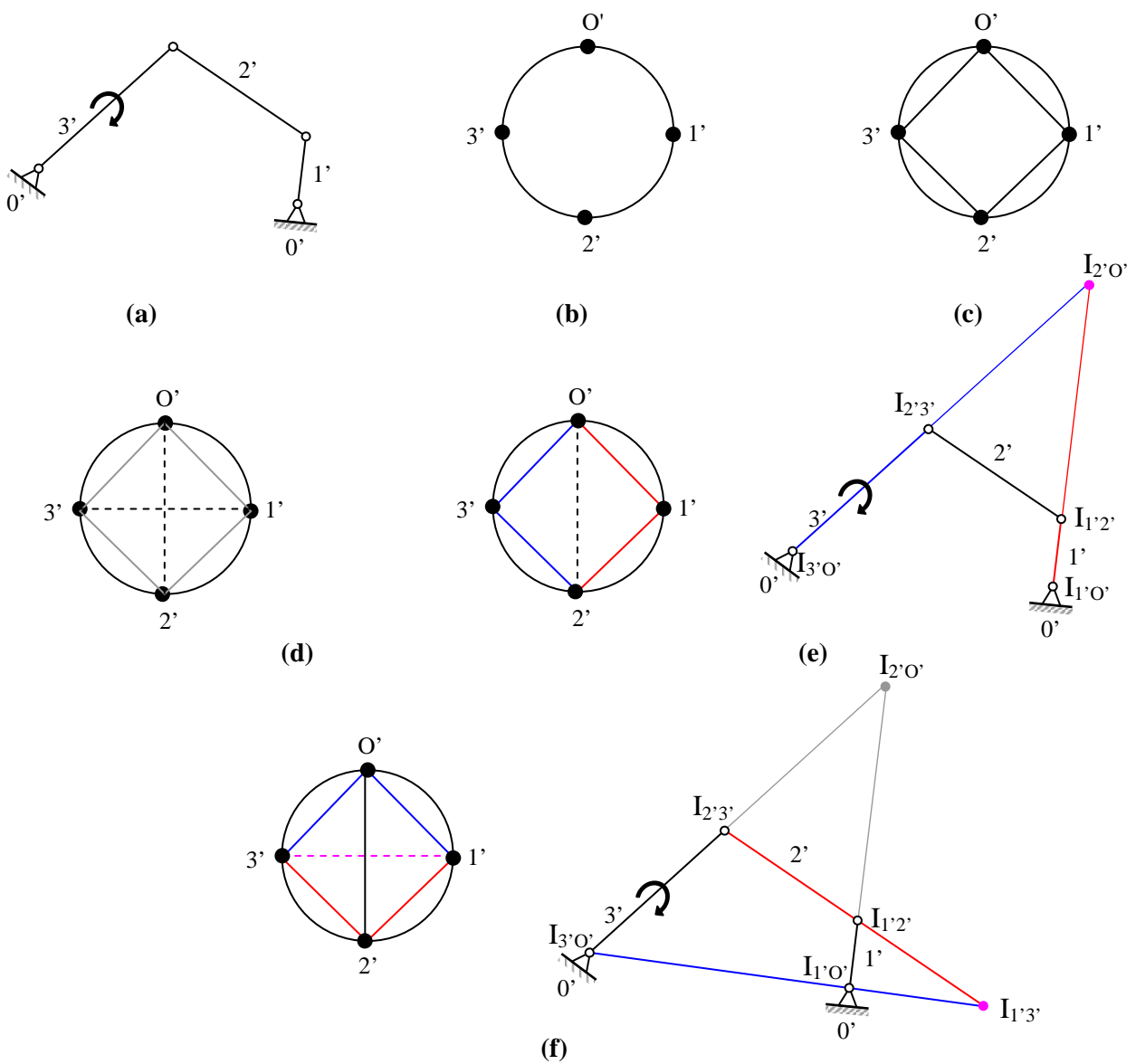
שאותו חיפשנו. שלב זה מתואר באיור 8.2 (e).

מציאת I_1^3 : הקו המרוסק המתאים למרכז הסיבוב הרגועי I_1^3 משותף לשני המשולשים $1'0'3'$ ו-

$1'2'3'$, המתאימים במכניזם לזוג הקווים, שאחד מהם עובר דרך מרכזי סיבוב רגועים I_1^0 ו- I_3^0 .

והשני דרך I_1^2 ו- I_2^3 . הנקודה המשותפת לשני הקווים היא נקודת החיתוך שלהם והיא המרכז

הסיבוב הרגועי I_1^3 שאותו חיפשנו. שלב זה מתואר באיור 8.2 (f).



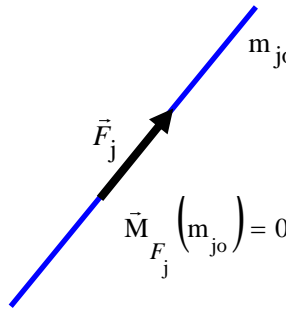
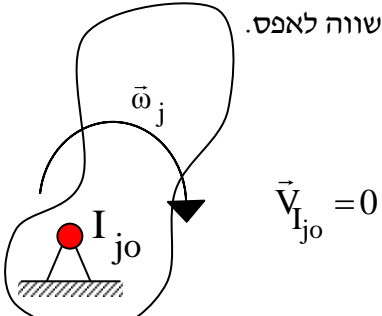
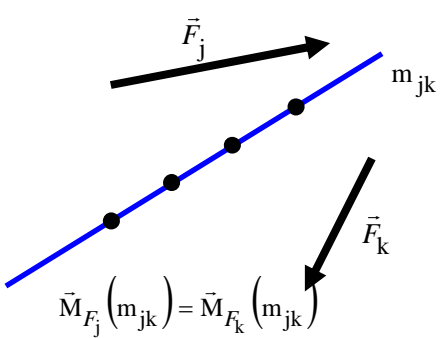
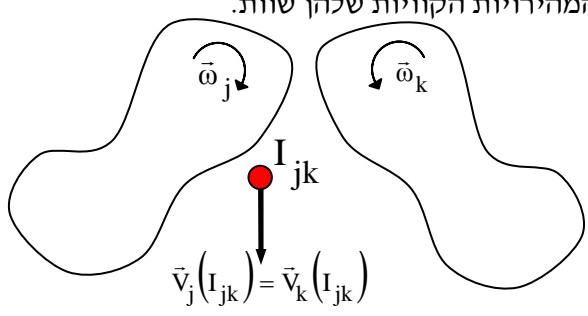
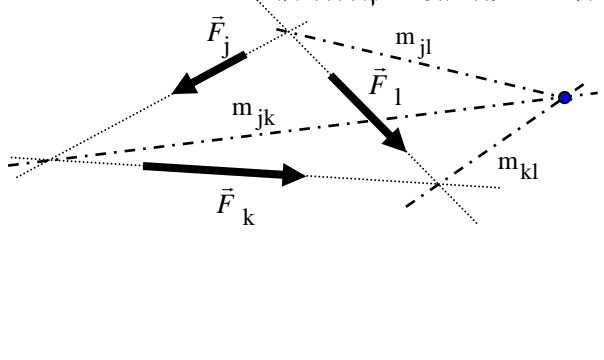
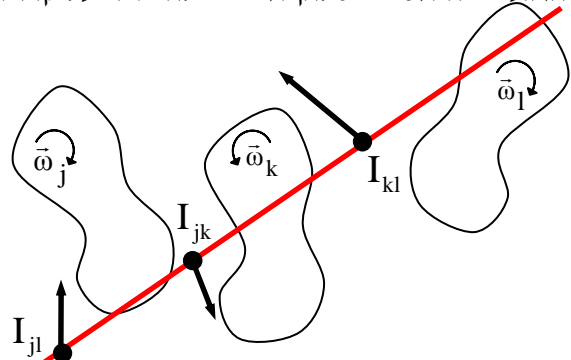
איור 8.2: דוגמה למציאת מרכזי סיבוב רגעיים במכניזם

(a) מכניזם ארבעה מוטות. (b) במכניזם יש ארבע חוליות, לכן נסמן על המעגל ארבעה צמתים, שכל צומת מתאים לחוליה במכניזם. (c) נסמן על המעגל בקווים מלאים את ארבעת מרכזי הסיבוב הרגעיים הידועים במכניזם: $I_{1'0'}$, $I_{1'2'}$, $I_{2'3'}$, $I_{3'0'}$. (d) נסמן על המעגל בקווים מרוסקים את שני מרכזי סיבוב רגעיים הלא ידועים במכניזם: $I_{2'0'}$, $I_{1'3'}$. (e) מציאת מרכז סיבוב רגעי $I_{2'0'}$. (f) מציאת מרכז סיבוב רגעי $I_{1'3'}$.

8.3 הדואליות בין מרכזי הסיבוב הרגועים וקווים שווי המומנט

בפרק 7 הצגנו דואליות בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי ובסעיף הזה נתבסס עליה כדי להראות שמרכזי הסיבוב הרגועים דואלים לקווים שווי המומנט.

בסעיף 7.4.4 הצגנו קשרים בין מערכות סטטית וקינמטית המבוססים על הדואליות בין גרף הזרימות הקווי וגרף הפוטנציאלים הקווי. על בסיס הקשרים האלו ניתן לומר שהמשפטים **בטבלה 8.1** דואלים. המשפטים הללו מיצגים את הדואליות הקיימת בין מרכזי הסיבוב הרגועים וקווים שווי המומנט.

סטטיקה	קינמטיקה
<p>קו שווה מומנט מוחלט - לכל כוח בפאה קיים קו שהמומנט שהוא יוצר עליו שווה לאפס.</p> 	<p>מרכז סיבוב רגעי מוחלט - לכל מהירות זוויתית מוחלטת המגדירה חוליה קיימת נקודה שהיא יוצרת עליה מהירות קווית שווה לאפס.</p> 
<p>קו שווה מומנט יחסי - לכל שני כוחות בפאות קיים קו שלאורכו שני הכוחות יוצרים את אותו מומנט.</p> 	<p>מרכז סיבוב רגעי יחסי - לכל שתי מהירויות זוויתיות מוחלטות המגדירות שתי חוליות קיימת נקודה שבה המהירויות הקוויות שלהן שוות.</p> 
<p>משפט קנדי דואלי - לכל שלושה כוחות בפאות, שלושת הקווים שווי המומנט היחסיים שלהם חייבים להיפגש בנקודה אחת.</p> 	<p>משפט קנדי - לכל שלוש מהירויות זוויתיות מוחלטות המגדירות שלוש חוליות, שלושת מרכזי הסיבוב הרגועים היחסיים שלהן חייבים להימצא על קו אחד.</p> 

טבלה 8.1: סיכום הקשר הקיים בין מרכזי סיבוב רגועים וקווים שווי מומנט, ומגדירה את משפט קנדי הדואלי

8.4 שיטה למציאת קווים שווי מומנט במערכת סטטית

בסעיף זה נציג פיתוח שיטה בסטטיקה על בסיס שיטה הידועה בקינמטיקה אשר הוצגה בסעיף 8.2. השיטה הקודמת משמשת למציאת מרכזי סיבוב רגועים, כאשר המונח הדואלי להם בסטטיקה הוא קווים שווי מומנט, לכן השיטה החדשה שתפורט כעת דואלית לשיטה זו ומשמשת למציאת קווים שווי מומנט.

8.4.1 שלבים למציאת קווים שווי מומנט

א. חישוב מספר קווים שווי מומנט: להלן הנוסחה לחישוב מספר קווים שווי מומנט במערכת סטטית. נשים לב שבסעיף 7.4.4 ראינו שהחוליות במכניזם דואליות לפאה ב-pillar system, לכן הנוסחה (8.1) נראית כך:

$$N_{e-1} = \frac{f(f-1)}{2} \quad (8.2)$$

כאשר:

N_{e-1} - זהו מספר קווים שווי המומנט במערכת סטטית.

f - מספר הפאות במערכת סטטית (כולל פאת יחוס-פאת אפס).

ב. סימון פאות ה-pillar system במעגל קנדי דואלי: לכל פאה ב-pillar system נסמן צומת במעגל קנדי דואלי.

ג. סימון של קווים שווי המומנט הידועים על המעגל: במעגל קנדי דואלי נחבר בקו מלא בין הצמתים המתאימים לפאות שקו שווה מומנט יחסי ביניהם ידוע.

ד. סימון של קווים שווי המומנט הלא ידועים על המעגל: במעגל קנדי דואלי נחבר בקו מרוסק בין הצמתים המתאימים לפאות שקו שווה מומנט יחסי ביניהם לא ידוע.

ה. מציאת קווים שווי המומנט הלא ידועים: בדומה לשיטת מציאת מרכזי סיבוב רגועים (סעיף 8.2.1), נחפש כל פעם מרובע מקווים מלאים כאשר הקו המרוסק הוא אלכסונו (המרובע בנוי מזוג משולשים שהקו המרוסק הוא הצלע המשותפת שלהם). בשונה מהשיטה הקודמת, הפעם כל קטע במעגל קנדי דואלי מתאים לקו ב-pillar system וכל מעגל מגודל שלוש מתאים לנקודה ששלושת הקווים שווי המומנט נחתכים בה. לכן, הקו המרוסק המשותף לשני המשולשים מתאים לקו שווה המומנט המשותף לשתי הנקודות, דהיינו, קו שעובר דרכן. מכאן ב-pillar system נקבל שתי נקודות שכל אחת מהן מוגדרת על ידי זוג קווים שווי מומנט מתאימים (הקווים המלאים במרובע). דרך הנקודות האלו עובר קו שהוא קו שווה המומנט שאנו מחפשים (הקו המרוסק במרובע).

ו. כל קו שווה מומנט שמצאנו נסמנו במעגל קנדי הדואלי בקו מלא במקום בקו מרוסק.

התהליך מסתיים כאשר נמצא את כל הקווים שווי המומנט.

8.4.2 דוגמה למציאת קווים שווי מומנט ב-pillar system

נתון pillar system המתואר באיור 8.3 (a), ויש למצוא את כל הקווים שווי המומנט שלו. לצורך כך נפעיל את שלבי השיטה שפורטו בסעיף הקודם.

א. חישוב מספר הקווים שווי המומנט: ב-pillar system הנתון יש ארבע פאות ($j=4$). נציב בנוסחה (8.2) ונקבל:

$$N_{e-1} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

כלומר יש סה"כ שישה קווים שווי מומנט.

ב. סימון הפאות של ה-pillar system במעגל קנדי הדואלי: ב-pillar system יש ארבע פאות, לכן

נסמן את ארבעת הצמתים במעגל קנדי הדואלי, כמתואר באיור 8.3 (b).

ג. סימון קווים שווי מומנט הידועים במעגל: ב-pillar system הנתון ידועים לנו ארבעת הקווים שווי

המומנט הבאים: $m_{I,O}$, $m_{I,II}$, $m_{II,III}$ ו- $m_{III,O}$, שאותם נסמן בארבעה קווים מלאים על מעגל קנדי

הדואלי, כמתואר באיור 8.3 (c).

ד. סימון הקווים שווי המומנט הלא ידועים על המעגל: ב-pillar system הבא אינם ידועים שני קווים

שווי מומנט והם $m_{I,III}$ ו- $m_{II,O}$. נסמן אותם בקווים מרוסקים על המעגל, כמתואר באיור 8.3 (d).

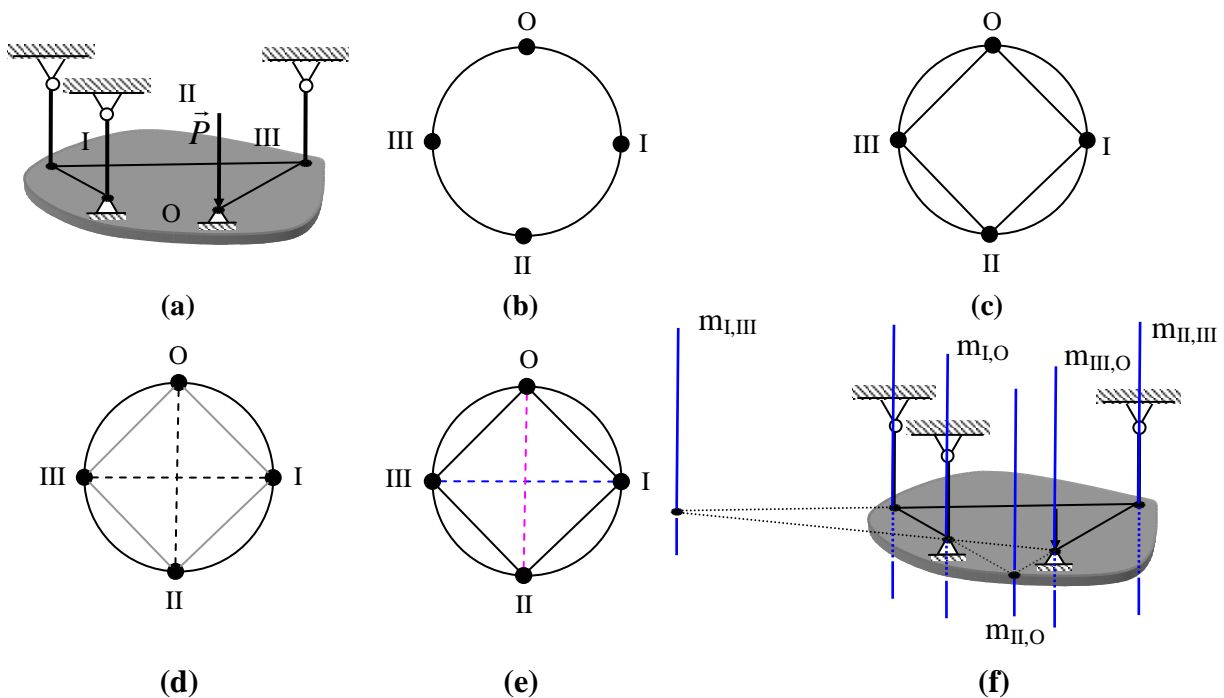
ה. מציאת הקווים שווי המומנט הלא ידועים:

מציאת $m_{II,O}$: הקו המרוסק המתאים לקו שווה מומנט $m_{II,O}$ משותף לשני המשולשים O,I,II ו- O,II,III

המתאימים במסבך לזוג הנקודות, שאחת מהן מתקבלת בחיתוך הקווים שווי המומנט

$m_{I,II}$ ו- $m_{II,III}$ והשנייה בחיתוך של $m_{II,III}$ ו- $m_{III,O}$. הקו העובר דרך שתי הנקודות האלו הוא קו שווה

המומנט $m_{II,O}$ שאותו חיפשנו. שלב זה מתואר באיור 8.3 (e).

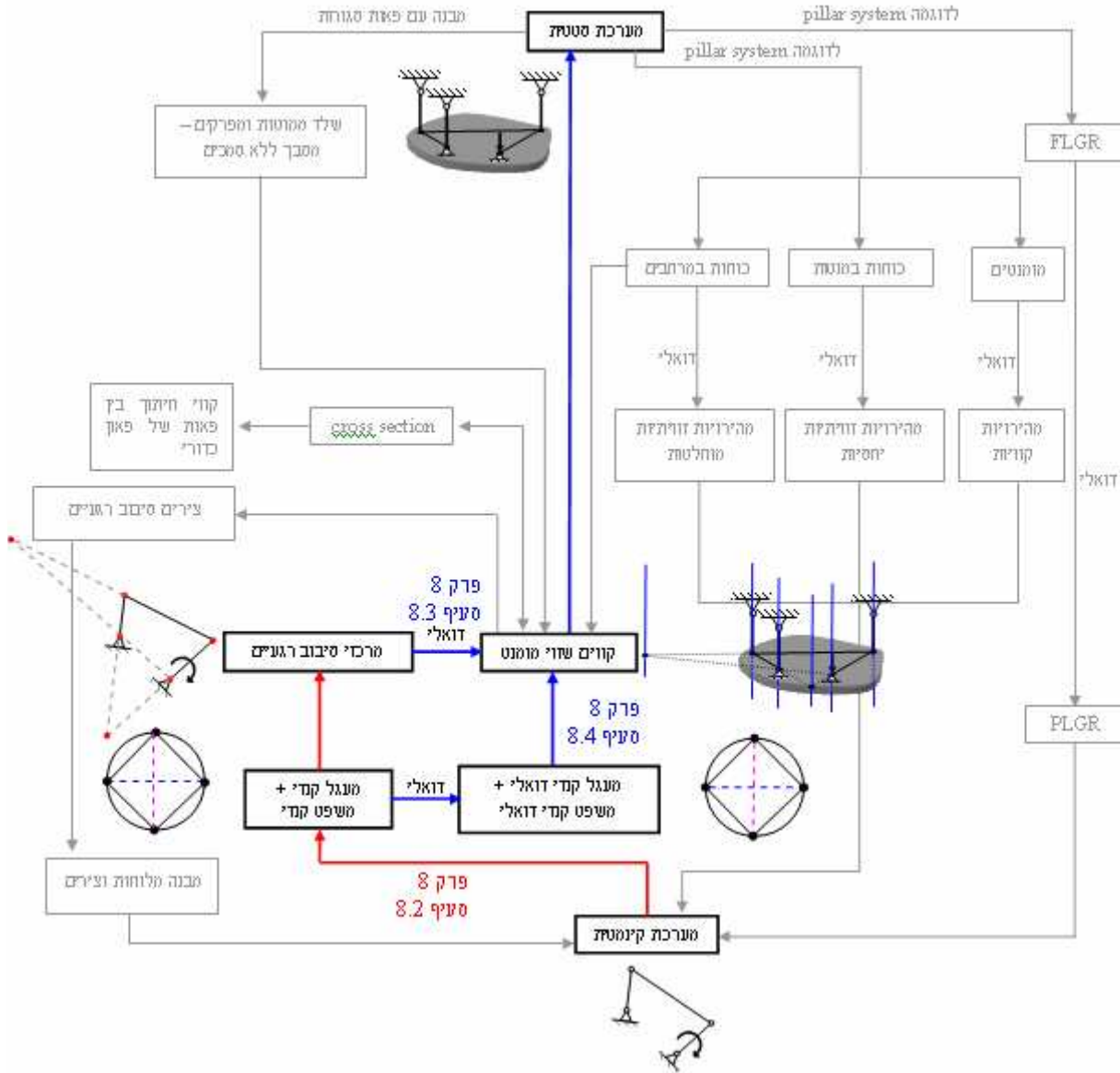


איור 8.3: דוגמה למציאת קווים שווי מומנט ב-pillar system

(a) pillar system ב-4 פאות, לכן נסמן על המעגל ארבעה צמתים, שכל צומת מתאים לפאה ב-pillar system. (c) נסמן על המעגל בקווים מלאים את ארבעת הקווים שווי המומנט הידועים במסבך: $m_{I,O}$, $m_{I,II}$, $m_{II,III}$ ו- $m_{III,O}$. (d) נסמן על המעגל בקווים מרוסקים את הקווים שווי המומנט הלא ידועים ב-pillar system: $m_{I,III}$ ו- $m_{II,O}$. (e) מציאת הקווים שווי המומנט $m_{II,O}$ ו- $m_{I,III}$.

8.5 סיכום הפרק

לסיכום באיור 8.4 נציג תרשים הזרימה שראינו באיור 8.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 8.4: תרשים הזרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 8

פרק 9

פרוש גיאומטרי תלת מימדי לקו שווה מומנט (דואלי של מס"ר בקינמטיקה)

בפרק 3 הצגנו מהי המשמעות הפיזיקלית של המושג החדש קו שווה מומנט, ובפרק הזה מוצג לראשונה משמעות גיאומטרית שלו. כתוצאה מכך התגלה ומדווח בתזה על הקשר בין שיטת Whiteley לבדיקת תקפות פאון דואלית לבין השיטה הידועה בקינמטיקה למציאת מרכזי סיבוב רגועים.

9.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באור 9.1 רואים תרשים זרימה של הנושאים שנדבר עליהם בפרק הזה. הפרק מחולק לשלושה שלבים עיקריים.

שלב א': בהתחלה נציג דיאגרמה שנקראת cross section, כאשר היא מייצגת קווי חיתוך בין כל זוג מישורים בפאון כדורי ובעזרתה ניתן לקבוע האם ציור של קווים ונקודות (line drawing) הוא ההיטל שלו. לאחר מכן נראה שאם נבנה על line drawing מבנה, כך שקווים יהפכו למוטות ונקודות למפרקים, נקבל שישנה זהות בין דיאגרמת cross section המתאימה לאותו line drawing וקווי שווי מומנט של המבנה.

שלב ב': בשלב זה נראה שעל סמך הזהות בין דיאגרמת cross section וקווים שווי מומנט מתקיימים המשפטים הבאים:

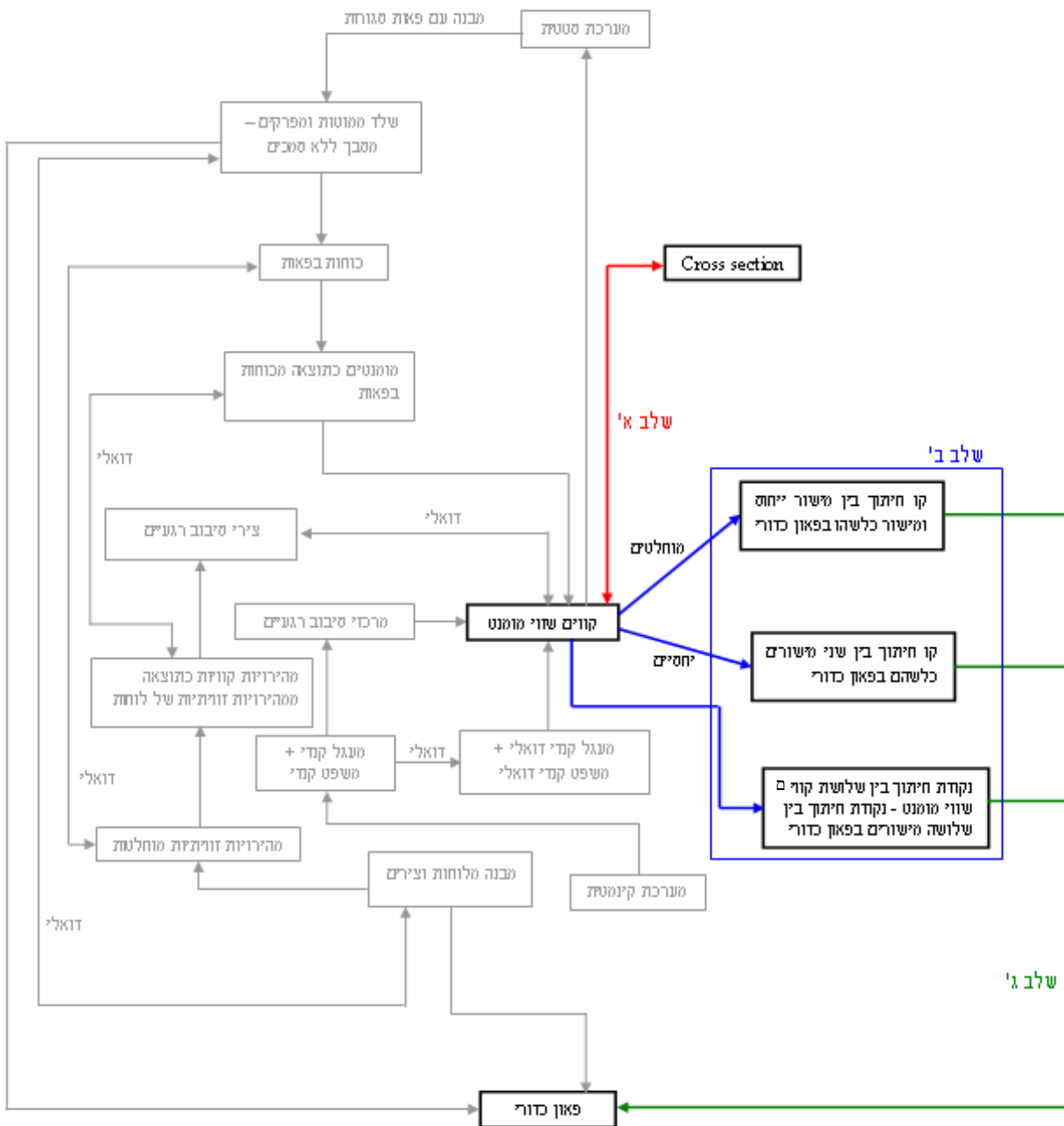
1. קו שווה מומנט מוחלט במבנה מתאים לקו חיתוך בין מישור ייחוס ומישור כלשהו בפאון כדורי.

2. קו שווה מומנט יחסי במבנה מתאים לקו חיתוך בין שני מישורים כלשהם בפאון כדורי.

3. נקודת חיתוך בין שלושת קווים שווי מומנט - נקודת חיתוך בין שלושה מישורים בפאון כדורי.

כאן אנחנו נותנים פירוש גיאומטרי למושג בסטטיקה, קו שווה מומנט.

שלב ג': על סמך זהויות שקיבלנו בסעיף הקודם, ניתן להגיד שמציאת קווים שווי מומנט במבנה זוהי בדיקה שהמבנה הוא היטל של פאון כדורי. במילים אחרות, אם הצלחנו למצוא את כל קווים שווי המומנט במבנה, ניתן לקבוע כי הוא היטל של פאון כדורי.



איור 9.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 9

9.2 סקירת שיטת ה-cross-section לבדיקת נכונותו של היטל הפאון המרחבי

בסעיף זה נציג את השיטה שבעזרתה ניתן לקבוע האם דיאגרמת קווים ונקודות נתונה היא היטל של פאון מרחבי. להלן הגדרה חשובה שנשתמש בפרק.

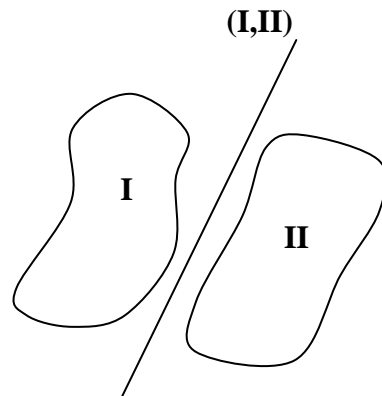
line drawing - זוהי דיאגרמת קווים ונקודות ששניים או יותר קווים נפגשים בהן. אנו אומרים ש- line drawing תקין אם הוא היטל של פאון מרחבי.

הראשון שפתר את הבעיה הזו היה Sugihara (1984) (Sugihara, 1984) שהמיר אותה לבעיה בתכנות ליניארית. ב-1979 Whiteley התבונן על אותה בעיה מהיבט גיאומטרי (Whiteley, 1979), והציג שיטה שנקראת cross-section, שבעזרתה ניתן לקבוע האם line drawing הוא היטל תקין של פאון מרחבי. שיטה זו מבוססת על עקרונות בסיסיים מגיאומטריה מרחבית, והם: חיתוך של שני מישורים במרחב זהו קו ישר וחיתוך של שלושה מישורים זוהי נקודה. אם נבנה היטל מתאים לפאון, נקבל שלכל מישור שלו מתאימה פאה ב-line drawing, לכל קו חיתוך בין שני מישורים מתאים קו חיתוך בין שתי פאות מתאימות ב-line drawing ולכל נקודת חיתוך בין שלושה מישורים מתאימה נקודת חיתוך בין שלוש פאות מתאימות ב-line drawing. ניתן לראות בעצם ש-cross-section אלה קווי חיתוך של כל זוג מישורים מפאון, כאשר במישור ההטלה הם מתאימים לקווי חיתוך בין כל זוג פאות. אם נסכם את מה שנאמר קודם, ניתן להגיד שעל מנת לקבוע האם line drawing הוא היטל של פאון מרחבי, יש לבדוק שעבור כל שלושה מישורים, שלושת הקווי החיתוך שלהם נפגשים באותה נקודה.

9.2.1 שלבי בניית ה-cross-section

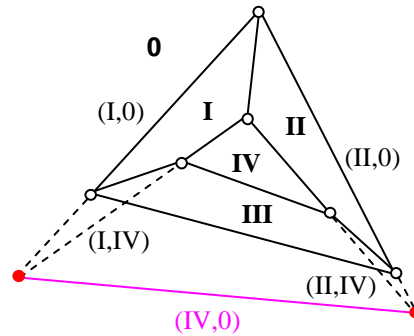
להלן שלבים לבדיקת תקינות של line drawing, דהיינו האם הוא היטל של פאון מרחבי.

1. בדיקת טופולוגיה של line drawing: נבדוק האם הגרף של line drawing גרף מישורי, 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות.
2. סימון קווים: ניתן מספרים לקווים של line drawing.
3. סימון פאות: נסמן פאות של line drawing בספרות רומיות.
4. סימון קווי חיתוך בין פאות סמוכות: קודם כל נסמן את כל הקווים שמפרידים בין פאות סמוכות. נסמן כל קו ב- (X, Y) , כאשר X ו-Y מציינים זוג פאות סמוכות שקו זה מפריד ביניהם. לדוגמה, נתונות שתי פאות סמוכות I ו-II, נסמן קו שמפריד ביניהן ב- (I, II) , כמתואר באיור 9.2.



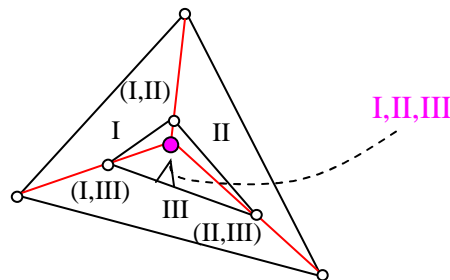
איור 9.2: קו חיתוך בין פאות סמוכות

5. מציאת קווי חיתוך בין פאות לא סמוכות: כעת נחפש את כל קווי חיתוך בין פאות לא סמוכות. נניח שנתונות לנו חמש פאות $0, I, II, III, IV$, וידועים לנו קווי חיתוך בין פאות I ו- 0 $(I,0)$, I ו- IV (I,IV) , II ו- 0 $(II,0)$, II ו- IV (II,IV) , III ו- 0 $(III,0)$, III ו- IV (III,IV) . קודם נמצא נקודת חיתוך בין קווים $(I,0)$ ו- (I,IV) , ובין קווים $(II,0)$ ו- (II,IV) . כפי שנאמר קודם, כל שלוש פאות נחתכות בנקודה אחת, לכן קו $(IV,0)$ חייב לעבור בנקודת חיתוך בין קווים $(I,0)$ ו- (I,IV) (נקודת החיתוך של פאות $0, I$ ו- IV), וגם בנקודת חיתוך בין קווים $(II,0)$ ו- (II,IV) (נקודת החיתוך של פאות $0, II$ ו- IV). ידוע לנו מגיאומטריה, שכל קו מוגדר על ידי שתי נקודות, לכן הקו $(IV,0)$ מוגדר. **באיור 9.3** רואים דוגמה מציאת קו חיתוך בין שתי פאות שאינן סמוכות. באותה דרך נמשיך למצוא קווי חיתוך נוספים.



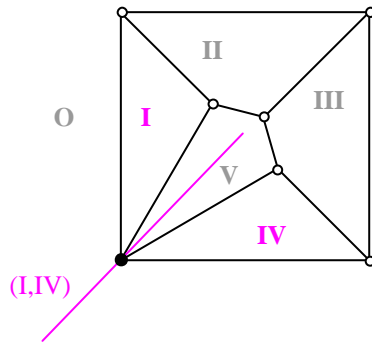
איור 9.3: מציאת קו חיתוך בין פאות IV ו- 0 שלא סמוכות

6. מציאת נקודות חיתוך בין כל שלוש פאות שלא דווקא סמוכות: נמצא נקודות חיתוך בין כל שלוש פאות שלא דווקא סמוכות. נסמן את הנקודות האלו בספרות רומיות מתאימות, שמציינות אותן פאות שנחתכות בה. לדוגמה, אם נקודה היא חיתוך של שלוש פאות I, II ו- III , היא מתקבלת בחיתוך של קווים (I,II) , (II,III) ו- (I,III) ונסמן אותה ב- I,II,III , כמתואר **באיור 9.4**. יש לבדוק האם הצלחנו למצוא את כל נקודות החיתוך בין כל שלוש פאות.



איור 9.4: מציאת נקודת חיתוך בין שלוש פאות I, II ו- III שלא כולן סמוכות

7. בדיקת קו חיתוך בין פאות שצומת מפריד ביניהן: במקרה של שתי פאות, שלא קו אלא צומת מפריד ביניהם, קו החיתוך שלהן חייב לחתוך את שתי הפאות האלו רק בצומת הזה. לדוגמה, **באיור 9.5** צומת מפריד בין פאות I ו- IV , לכן קו החיתוך שלהן חותך את שתיהן רק בצומת הזה.

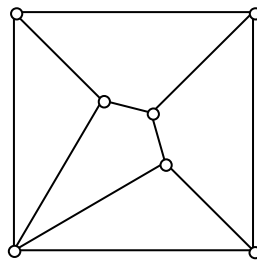


איור 9.5: בדיקה שקו חיתוך בין פאות I ו-IV, שלא קו אלא נקודה מפרידה ביניהן, חותך את שתייהן רק בנקודת חיתוך שלהן

אם כל זה מתקיים ניתן להגיד ש-line drawing נתון הינו היטל של פאון מרחבי.

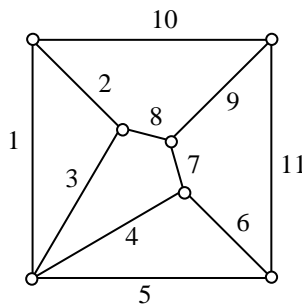
9.2.2 דוגמה לבניית ה-cross-section

נתון line drawing המתואר באיור 9.6 ורוצים לבדוק האם הוא היטל של פאון מרחבי על ידי בנייה של cross-section מתאים.



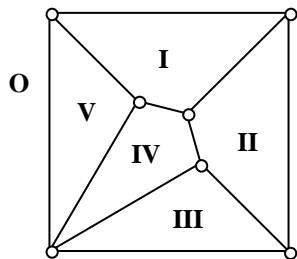
איור 9.6: תיאור של line drawing

1. בדיקת טופולוגיה של line drawing: אין אף שתי קשתות שחוצות זו את זו, לכן הגרף של line drawing מישורי. אין אף צומת וזוג קשתות שאם נוריד אותן נפגע בקשירות של הגרף, לכן הגרף 2 קשיר צמתים ו-3 קשיר קשתות.
2. סימון קווים: ניתן לכל הקווים ב-line drawing מספרים מ-1 עד 11 כמתואר באיור 9.7.



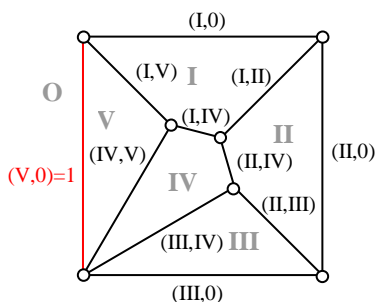
איור 9.7: סימון קווים מ-1 עד 11 של line drawing

3. סימון פאות: במקרה הזה יש שש פאות שנסמן אותן באותיות רומיות מ-0 עד V, ראה איור 9.8.



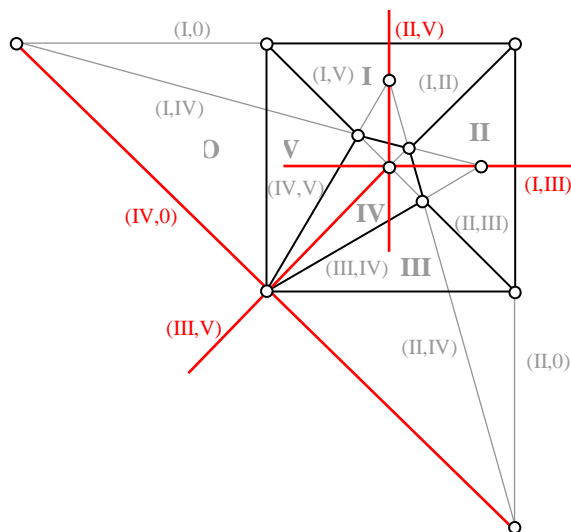
איור 9.8: סימון פאות מ-0 עד V של line drawing

4. סימון קווי חיתוך בין פאות סמוכות: נסמן את כל קווי חיתוך בין פאות סמוכות, דהיינו כל הקווים של line drawing. לדוגמה נסמן קו 1 ב- (V,0) שהוא מפריד בין פאות סמוכות V ו-0 כמתואר באיור 9.9.



איור 9.9: סימון קווי חיתוך בין פאות סמוכות. קו 1 מפריד בין פאות V ו-0, לכן נסמן אותו ב-(V,0)

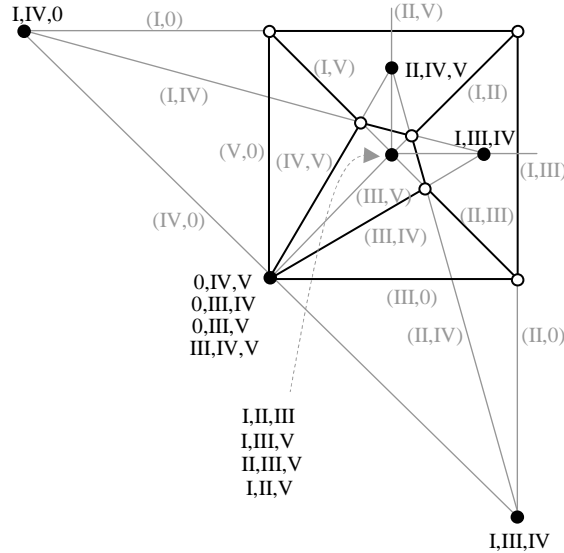
5. מציאת קווי חיתוך בין פאות לא סמוכות: יש לנו סה"כ שלוש זוגות של פאות לא סמוכות: זוג ראשון I ו-III, זוג שני II ו-V, זוג שלישי IV ו-0. לדוגמה נראה איך מוצאים קו חיתוך בין פאות I ו-III. קודם נמצא נקודת חיתוך בין קווים (I,II) ו-(II,III) ולאחר מכן נקודת חיתוך בין קווים (I,IV) ו-(III,IV). נקודות אלו מגדירות קו (I,III) כמתואר באיור 9.10.



איור 9.10: מציאת קווי חיתוך בין פאות לא סמוכות. קווי חיתוך (I,III), (II,V), (III,V), (IV,0) מפרידים בין פאות לא סמוכות

6. מציאת נקודות חיתוך בין כל שלוש פאות שלא כולן סמוכות: לדוגמה נקודה II,IV,V היא חיתוך של קווים (II,V), (II,IV) ו-(IV,V). יש לשים לב שבדוגמה שלנו נקודות III,IV,0 ; IV,V,0 ; 0,III,V ו-III,IV,V מתלכדות וגם נקודות I,II,III ; I,II,V ; I,III,V ו- II,III,V מתלכדות.

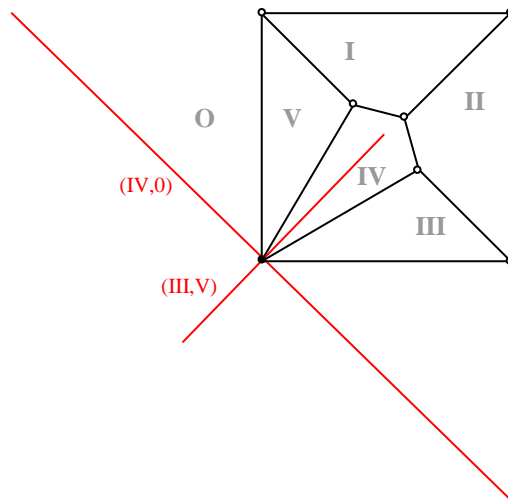
9.11 ראה איור



איור 9.11: מציאת נקודות חיתוך בין כל שלוש פאות שלא כולן סמוכות

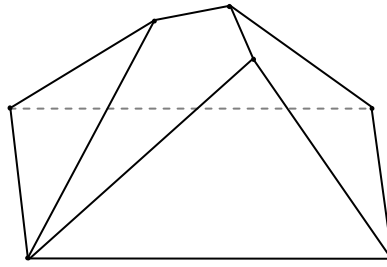
7. בדיקת קווי חיתוך בין פאות שצומת מפרידה ביניהן: לדוגמה צומת ולא קו מפריד בין פאות III ו-V, לכן יש לבדוק שקו (III,V) חותך שתי פאות אלו רק בצומת זה, וניתן לראות שזה אכן כך.

9.12 באיור



איור 9.12: בדיקת קווי חיתוך בין פאות שצומת מפריד ביניהן. קווי חיתוך (III,V) ו-(IV,0) חותכות את הפאות שהן מפרידות ביניהן אך ורק בנקודת החיתוך בין אותן פאות

לאחר שעשינו את כל השלבים נבנה פאון מתאים, ראה איור 9.13.



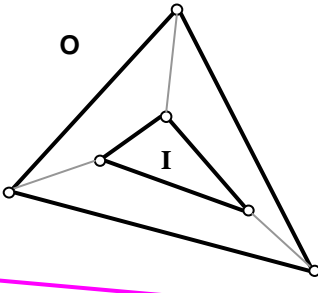
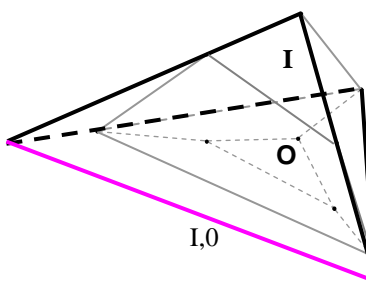
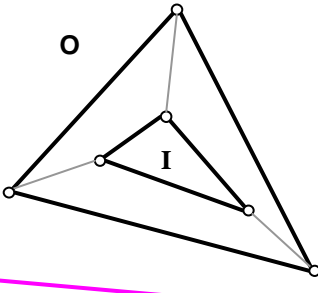
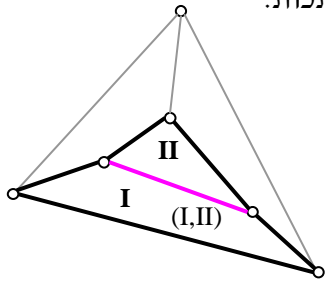
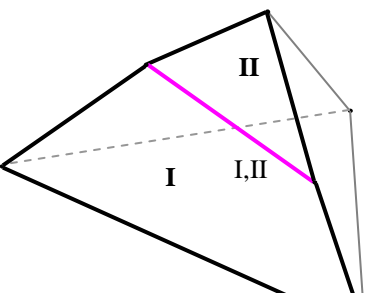
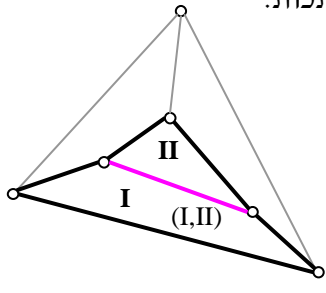
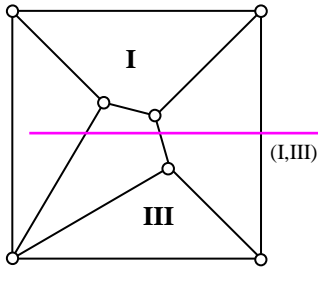
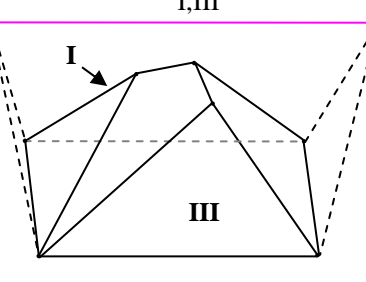
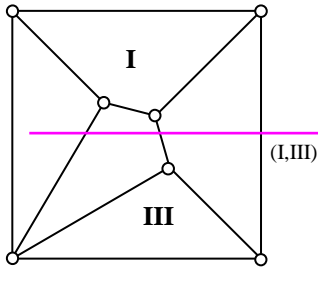
איור 9.13: פאון המתאים ל-line drawing הנתון באיור 9.5

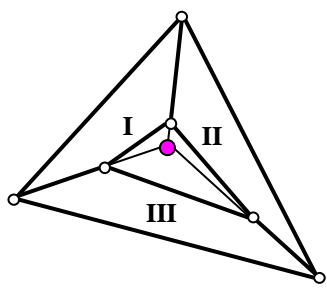
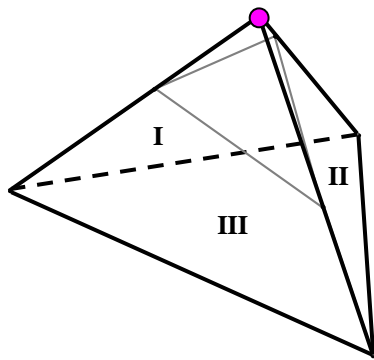
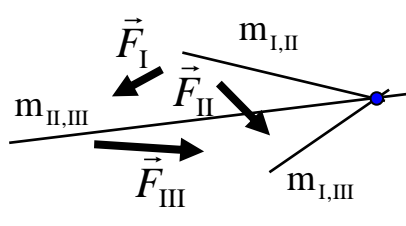
9.3 זהות בין דיאגרמת cross-section וקווים שווי מומנט

כאן נראה שקיימת זהות בין דיאגרמת cross-section של פאון כלשהו לבין דיאגרמת קווים שווה מומנט במסבך שנבנה על היטל של אותו פאון. נראה ש-cross-section זהו בעצם פירוש גיאומטרי למונח קו שווה מומנט. על סמך הקשר הזה ניתן להראות שבעזרת דיאגרמת קווים שווי מומנט ניתן לבדוק את הגיאומטריה של פאון, דהיינו אם הצורה היא היטל של פאון מרחבי. על מנת לקבוע שמערכת סטטית תקינה, יש לבדוק שניתן למצוא את כל קווים שווי המומנט ושהם מקיימים את משפט קנדי הדואלי, האומר כי לכל שלוש כוחות, שלושת קווים שווי המומנט היחסיים חייבים להיפגש בנקודה אחת. כאן ראינו שדיאגרמת cross-section היא כלי לבדיקת תקינות של פאון מרחבי, כאשר על מנת לקבוע ש-line drawing הוא היטל של פאון מרחבי, מספיק להראות כי ניתן לבנות את כל הקווים של cross-section, ושהם מקיימים את המשפט הבא: עבור כל שלוש פאות קווי החיתוך בין כל זוג פאות חייבים להיפגש בנקודה אחת. אם ניקח כל line drawing ונחליף קווים במוטות וצמתים במפרקים נקבל מסבך ללא סמכים, ואז בעצם שתי השיטות, בניית דיאגרמת cross-section ובניית דיאגרמת קווים שווי מומנט יהיו שקולות. המסקנה היא, שבמישור קווים שווי מומנט אלה קווי חיתוך בין שתי פאות במסבך ללא סמכים ובמרחב הם מתאימים לקווי חיתוך בין שני מישורים בפאון שהמסגרת היא היטל שלו. כתוצאה מכך ניתן להגיד שבעזרת קווים שווי מומנט נוכל לבדוק האם המסבך ללא סמכים הנתון הוא היטל של פאון מרחבי.

9.4 משמעות קו שווה המומנט בפאון וב-line drawing שנבנה על ההיטל

בסעיף הקודם ראינו שקו שווה מומנט מתאים במרחב לקו חיתוך בין שני מישורים בפאון, ובמישור לקו חיתוך בין שתי פאות ב-line drawing. נסכם את הקשר בין שלושת הדברים האלו בטבלה הבאה.

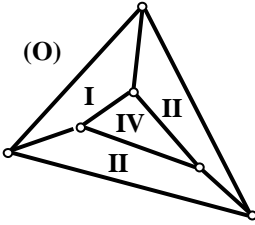
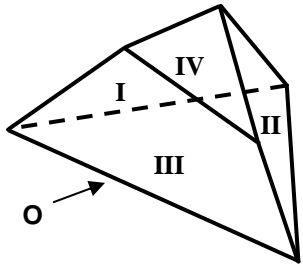
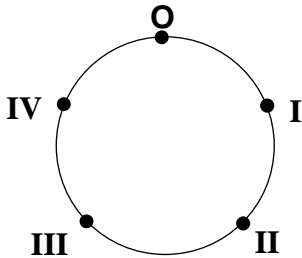
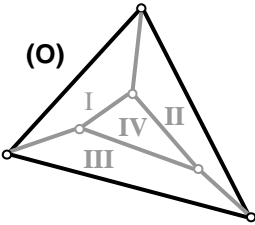
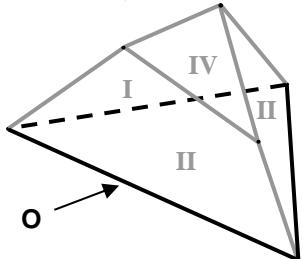
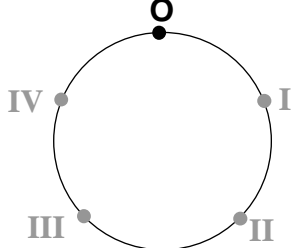
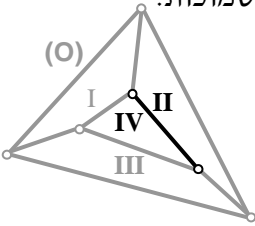
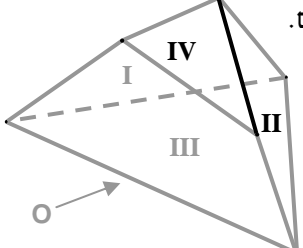
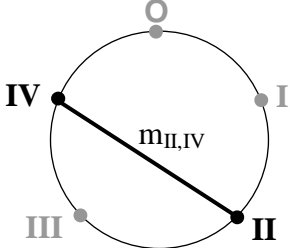
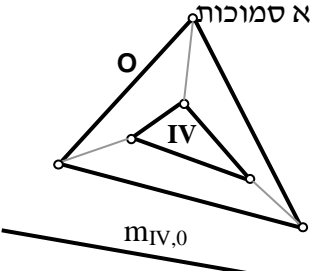
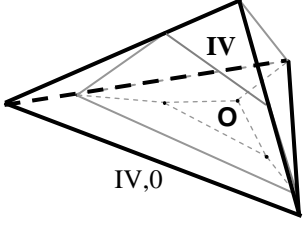
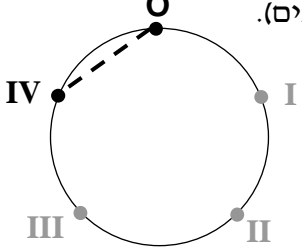
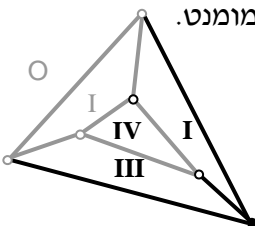
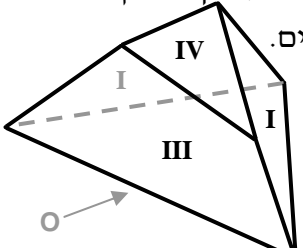
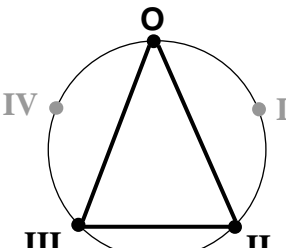
קו שווה מומנט	פאון (מרחב)	Line drawing (מישור)
<p>קו שווה מומנט מוחלט-לכל FF קיים קו שמומנט שהוא יוצר עליו שווה לאפס.</p>  <p>$\vec{M}_{F_I}(m_{I,0}) = 0$</p>	<p>לכל מישור בפאון קיים קו שבו הוא חותך את המישור הפרויקציה.</p>  <p>$m_{I,0}$</p>	<p>לכל פאה ב-line drawing קיים קו שבו היא חותכת את הפאה אפס (פאה הייחוס).</p>  <p>$(I,0)$</p>
<p>קו שווה מומנט יחסי לכוחות בפאות סמוכות-לכל שני FF הפועלים בפאות סמוכות קיים קו שמומנט שהכוחות יוצרים בכל נקודה על הקו שווה. \vec{F}_I</p>  <p>$\vec{M}_{F_I}(m_{I,II}) = \vec{M}_{F_{II}}(m_{I,II})$</p>	<p>לכל שני מישורים סמוכים בפאון קיים קו שבו הם נחתכים.</p>  <p>$m_{I,II}$</p>	<p>לכל שתי פאות סמוכות ב-line drawing קיים קו שבו הן נחתכות.</p>  <p>(I,II)</p>
<p>קו שווה מומנט יחסי לכוחות בפאות שאינן סמוכות-לכל שני FF הפועלים בפאות שאינן סמוכות קיים קו שמומנט שהכוחות יוצרים בכל נקודה על הקו שווה. \vec{F}_I</p>  <p>$\vec{M}_{F_I}(m_{I,III}) = \vec{M}_{F_{III}}(m_{I,III})$</p>	<p>לכל שני מישורים שאינם סמוכים בפאון קיים קו שבו הם נחתכים.</p>  <p>$m_{I,III}$</p>	<p>לכל שתי פאות שאינן סמוכות ב-line drawing קיים קו שבו הן נחתכות.</p>  <p>(I,III)</p>

<p>לכל שלוש פאות, קווי חיתוך בין כל זוג נפגשים בנקודה אחת.</p> 	<p>כל שלושה מישורים בפאון חייבים להיחתך בנקודה אחת.</p> 	<p>משפט קנדי דואלי-כל שלושה קווי שווה מומנט יחסיים של שלושה FF חייבים להיחתך בנקודה אחת.</p> 
--	---	--

טבלה 9.1: תיאור הקשר שקיים בין קווים שווי מומנט, פאון ו-line drawing

9.5 קשר בין מעגל קנדי דואלי, קווים שווי מומנט במסבך ללא סמכים ופאון

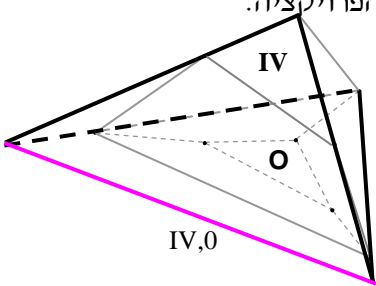
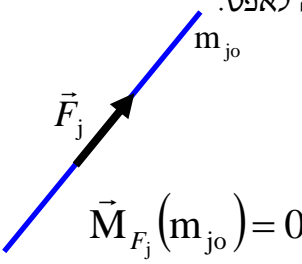
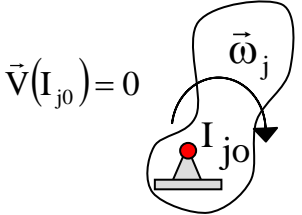
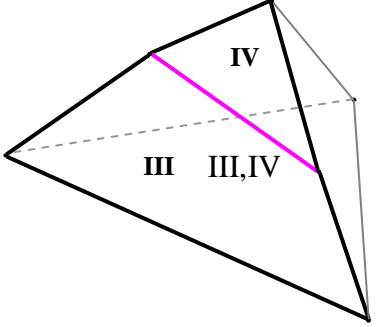
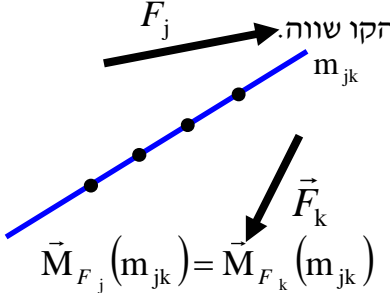
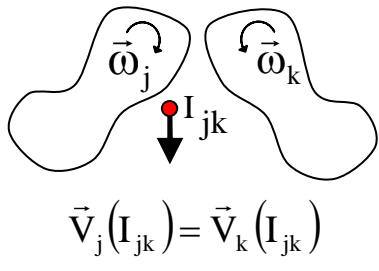
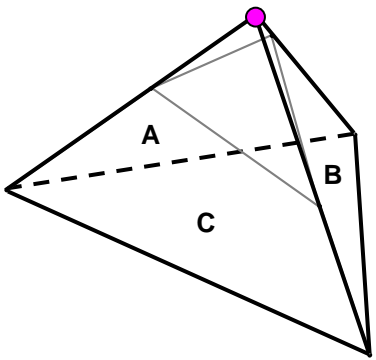
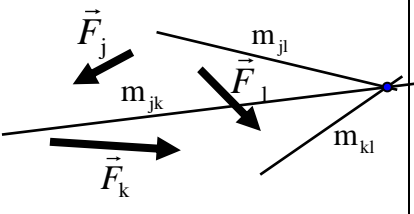
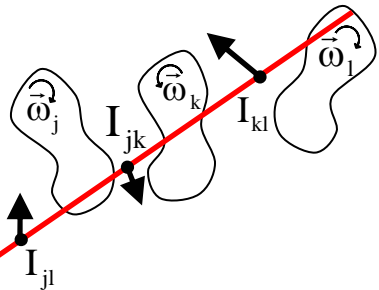
בסעיף 8.4 הצגנו שבאמצעות מעגל קנדי דואלי ניתן למצוא את כל קווים שווי מומנט במסגרת, ובסעיף 9.4 הראנו מהו הקשר בין פאון וקווים שווי מומנט. כעת נאחד הכול ונציג בטבלה הבאה את הקשר בין שלושת הדברים: מעגל קנדי דואלי, פאון ומסבך שנבנה על ההיטל שלו.

מסגרת	פאון	מעגל קנדי דואלי
<p>פאות במסגרת.</p> 	<p>מישורים.</p> 	<p>צמתים במעגל.</p> 
<p>פאת ייחוס (פאת אפס).</p> 	<p>מישור הפרויקציה.</p> 	<p>צומת הייחוס.</p> 
<p>קו שווה מומנט יחסי בין שתי פאות סמוכות.</p> 	<p>קו חיתוך בין שני מישורים סמוכים.</p> 	<p>קו ידוע (קו מלא בין שני צמתים).</p> 
<p>קו שווה מומנט יחסי בין שתי פאות לא סמוכות.</p> 	<p>קו חיתוך בין שני מישורים לא סמוכים.</p> 	<p>קו לא ידוע (קו מקווקו בין שני צמתים).</p> 
<p>נקודת חיתוך בין שלושה קווי שווה מומנט.</p> 	<p>נקודת חיתוך בין שלושה מישורים.</p> 	<p>משולש.</p> 

טבלה 9.2: תיאור הקשר בין מעגל קנדי דואלי, פאון ומסבך ללא סמכים שנבנה על ההיטל שלו

9.6 קשר בין מרכזי סיבוב רגעיים, קווים שווי מומנט ופאון

נסכם מה שידוע לנו עד כאן. ראינו בסעיף 3.5.3, שהפירוש הפיזיקלי של קו שווה מומנט, הוא קו ששני כוחות פאה יוצרים עליו מומנט זהה. בסעיף 9.3 הראנו שלקו שווה מומנט, מלבד לפירוש הפיזיקלי, קיים גם פירוש גיאומטרי. זהו בעצם קו חיתוך בין שתי פאות של צורה תלת מיימדית הנקראת פאון. בנוסף לכך, על בסיס סוגי דואליות שונים הקיימים בספרות, ראינו שקו שווה מומנט ומרכז סיבוב רגעי אלה מונחים דואלים. בסעיף הזה נאחד בין הדברים הללו ונקבל את הקשר בין מרכזי סיבוב רגעיים בקינמטיקה, קווים שווי מומנט בסטיקה ופאונים בגיאומטריה מרחבית. לאחר שהראנו שהתגלה משפט בסטיקה שדואלי למשפט קנדי הידוע בקינמטיקה, בסעיף הבא נציג פירוש גיאומטרי למשפט החדש. להלן טבלה המציגה את הקשר בין מושגים מרכזי סיבוב רגעי מקינמטיקה, קו שווה מומנט מסטיקה ופאון מגיאומטריה מרחבית.

גיאומטריה	סטטיקה	קינמטיקה
<p>לכל מישור בפאון קיים קו שבו הוא חותך את המישור הפרויקציה.</p> 	<p>קו שווה מומנט מוחלט-לכל כוח קיים קו שמומנט שהוא יוצר עליו שווה לאפס.</p> 	<p>מרכז סיבוב רגעי מוחלט-לכל חוליה קיימת נקודה שבה מהירות קווית שלה שווה לאפס.</p> 
<p>לכל שני מישורים בפאון קיים קו שבו הם נחתכים.</p> 	<p>קו שווה מומנט יחסי-לכל שני כוחות קיים קו שמומנט שהכוחות יוצרים בכל נקודה על הקו שווה.</p> 	<p>מרכז סיבוב רגעי יחסי-לכל שתי חוליות קיימת נקודה שבה מהירויות קוויות שלהן שוות.</p> 
<p>כל שלושה מישורים בפאון חייבים להיחתך בנקודה אחת.</p> 	<p>משפט קנדי דואלי-לכל שלושה כוחות, שלושה קווים שווה מומנט יחסיים שלהן חייבים להיפגש בנקודה אחת.</p> 	<p>משפט קנדי-לכל שלוש חוליות, שלושה מרכזי סיבוב רגעיים יחסיים שלהן חייבים להימצא על קו אחד.</p> 

טבלה 9.3: תיאור הקשר בין מרכזי סיבוב רגעיים, קווים שווי מומנט ופאונים

פרק 10

המשתנה הדואלי לכוח בפאה בדואליות בין FLGR ו-PLGR על בסיס

הדואליות הקיימת בגיאומטריה פרויקטיבית

מהדואליות בין גרף פוטנציאלים קווי וגרף זרימות קווי (FLGR ו-PLGR) קיבלנו שמהירות זוויתית יחסית דואלית לכוח. השאלה שנשאלת כעת, מהו משתנה דואלי לכוח בפאה במקרה הזה? בפרק 9 הראנו שקו שווה מומנט זהו קו חיתוך בין שני מישורים בפאון וקו חיתוך בין שתי פאות בהיטל האנכי של אותו פאון. על סמך הקשר הזה והדואליות בין מסבכים ללא סמכים ומבנים הבנויים מלוחות המחוברות על ידי צירים שקיימת בגיאומטריה פרויקטיבית נוכל לענות על השאלה הזו.

10.1 תקציר הפרק על פי תרשים הזרימה

באור 10.1 מתואר תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק הזה. הפרק מחולק לשלושה שלבים עיקריים.

שלב א': ניקח פאון כדורי ונבנה לו היטל. נתבונן על ההיטל כעל שלד הבנוי ממוטות ומפרקים (מסבך ללא סמכים). כיוון שזוהי מערכת סטטית מתפתחים בה כוחות בפאות, שכוחות אלו יוצרים מומנטים על המפרקים בכיוון מאונך למישור בו נמצאת המערכת. כוחות בפאות וכוחות במוטות של המבנה פועלים לאורך קווי שווי מומנט מוחלטים ויחסיים, בהתאמה. אם נמקם נקודות בקצוות של ווקטורי המומנטים ונחבר ביניהן נקבל אותו פאון כדורי ממנו התחלנו.

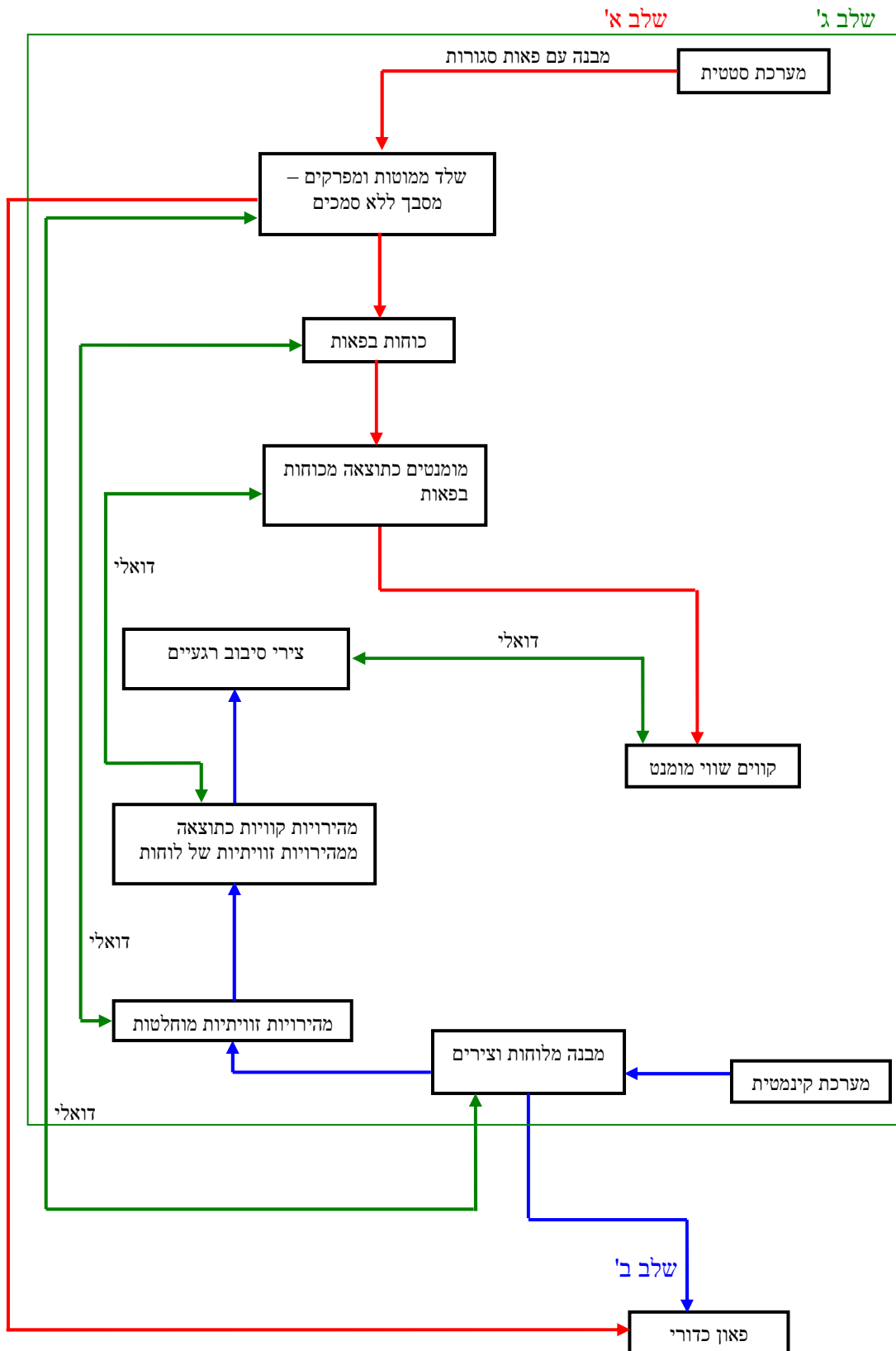
שלב ב': נתבונן כעת על אותו היטל כעל מבנה הבנוי מלוחות וצירים. נקבע לכל לוח מהירות זוויתית מוחלטת. כתוצאה מכך מתפתחים מהירויות קוויות ונראה שהמערכת יכולה לזוז רגעית בכיוון מאונך למישור בו היא נמצאת. אם נמקם נקודות בקצוות של ווקטורי המהירויות הקוויות ונחבר ביניהן נקבל גם כאן אותו פאון כדורי שממנו התחלנו.

שלב ג': נראה שהמערכות האלה, מסבכים ללא סמכים ומבנה מלוחות וצירים, אלה מערכות דואליות, ומכאן מתקיימים הקשרים הבאים:

1. כוחות בפאות של מסבך ללא סמכים דואלים למהירויות זוויתיות מוחלטות.

2. מומנטים דואלים למהירויות קוויות.

3. קווי שווי מומנט דואלים לצירי סיבוב רגועים.



איור 10.1: תרשים זרימה של הנושאים שיוצגו בפרק 10

10.2 דואליות בין מסבכים ללא סמכים ומבנים הבנויים מלוחות וצירים

נציג את שני הנושאים הידועים בספרות, סטטיקה של מסבכים ללא סמכים וקינמטיקה רגעית של מבנים הבנויים מלוחות וצירים המחברים ביניהן (Panel Hinge Structures), מההיבט חדש של גיאומטריה פרויקטיבית. נשתמש ב-Grassmann Cayley Algebra לאנליזת כוחות במסבכים ללא סמכים ולאנליזת מהירויות במבנים העשויים מלוחות וצירים (Crapo and Whiteley, 1982), ובסוף נראה כי מערכות אלו דואליות.

10.2.1 סטטיקה של מסבכים ללא סמכים בגיאומטריה הפרויקטיבית

הגדרה 10.1: מסבך ללא סמכים מוגדר על ידי הזוג הבא: $S = (J; B)$, כאשר J אלה מפרקי המסבך המיוצגים כנקודות במרחב תלת מימדי פרויקטיבי (a_1, a_2, \dots, a_v) ו- B אלה מוטות במסבך המיוצגים על ידי זוגות של אינדקסים $(\dots, (i, j), \dots)$. אם $(i, j) \in B$ אז $a_j - \alpha a_i$ לא מיצגים אותה נקודה פרויקטיבית. כל נקודה המייצגת מפרק במסבך ניתן לרשום על ידי קואורדינטות שלה באופן הבא:

$$a = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, 1)$$

הגדרה 10.2: הגדרת מצב של מאמץ עצמי במסבך ללא סמכים זוהי הגדרת סקלרים $(\dots, \lambda_{ij}, \dots)$, כאשר לפחות אחד חייב להיות שונה מאפס, כך שבכל נקודה יתקיים:

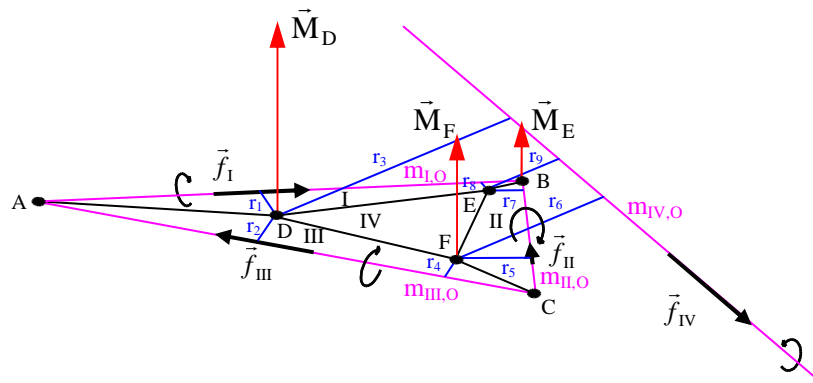
$$\sum \lambda_{ij} a_i a_j = 0 \quad (10.1)$$

כאשר הסכימה היא על $j, (i, j) \in B$.

ניתן לראות כי בגיאומטריה פרויקטיבית, כוחות במוטות של המסבך ללא סמכים מוגדרים על ידי נקודות המייצגות מפרקים.

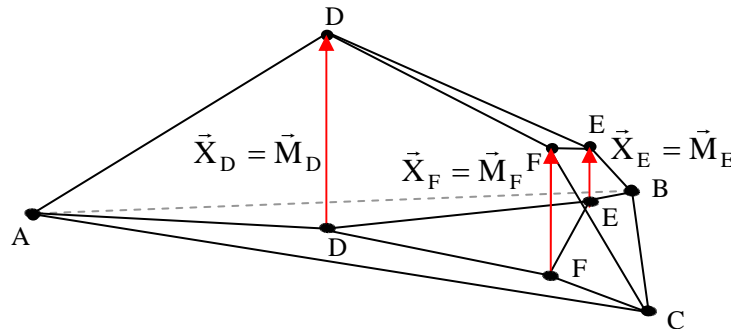
10.2.2 קבלת פאון ממסבך ללא סמכים

בפרק 3 הראנו כי ניתן להגדיר לכל פאה במסבך כוח, כך שכוח בכל מוט של המסבך שווה להפרש בין הכוחות הפועלים בפאות הסמוכות. ראינו גם, שכל כוח בפאה פועל לאורך הקו שווה המומנט המוחלט המתאים לפאה. אם ניקח כוח בפאה ונכפיל במרחק מהקו שווה המומנט המוחלט של אותה פאה עד לכל המפרק ששייך לפאה זו, נקבל מומנט שהכוח הזה יוצר על המפרק הבא. הכוחות בפאה והמרחקים נמצאים במישור אחד, לכן המומנטים מתקבלים בניצב למישור הזה. **באיור 10.2** ניתן לראות את המומנטים שהכוחות בפאות יוצרים על המפרקים של המסבך הנתון. ניתן לראות שהמומנט במפרקים A , B ו- C שווה לאפס, כיוון שהמרחקים מהקווי שווי המומנט עד למפרקים שווים לאפס, כלומר המפרקים האלו נמצאים על הקווים שווי המומנט.



איור 10.2: המומנטים שנוצרים במפרקים של המסבך ללא סמכים כתוצאה מהכוחות בפאות

אם נמקם נקודות בראשים של וקטורי המומנטים שהתקבלו ונחבר ביניהן, נקבל פאון מרחבי, כאשר המסבך ללא סמכים זהו ההיטל שלו. בנוסף ניתן להגיד שהגבהים של הנקודות בפאון שווים למומנטים שהכוחות בפאות של המסבך ללא סמכים יוצרים על הנקודות האלו, ראה איור 10.3.



איור 10.3: הפאון המרחבי שהתקבל לאחר חיבור בין הנקודות בקצוות המומנטים

לסיכום, ניתן להגיד כי, אם במסבך ללא סמכים פועל מאמץ עצמי, אזי הוא ההיטל של הפאון המרחבי, וזאת כבר הראנו בפרק 2.

10.2.3 קינמטיקה רגעית של מבנה הבנוי מלוחות וצירים בגיאומטריה הפרויקטיבית

הגדרה 10.3: מבנה מלוחות המחוברות על ידי צירים מוגדר על ידי $S^* = (P, A)$, כאשר P זוהי קבוצת הלוחות (\dots, P_k, \dots) , ו- A זוהי קבוצת הזוגות של extensors במרחב הפרויקטיבי (כל זוג של extensor יוצר ציר) (\dots, L_{km}, \dots) , כך שמתקיים $L_{km} = -L_{mk}$.

הגדרה 10.4: הגדרת תנועה רגעית של מבנה מלוחות שמחוברות על ידי צירים זוהי הגדרת צירי סיבוב $\$_k$ לכל לוח P_k כך שלכל ציר $L_{km} \in A$ מתקיים:

$$\$_k - \$_m = \omega_{km} L_{km} \quad (10.2)$$

כאשר ω_{ij} אלה סקלרים מתאימים.

תנועה זו נקראת lifting.

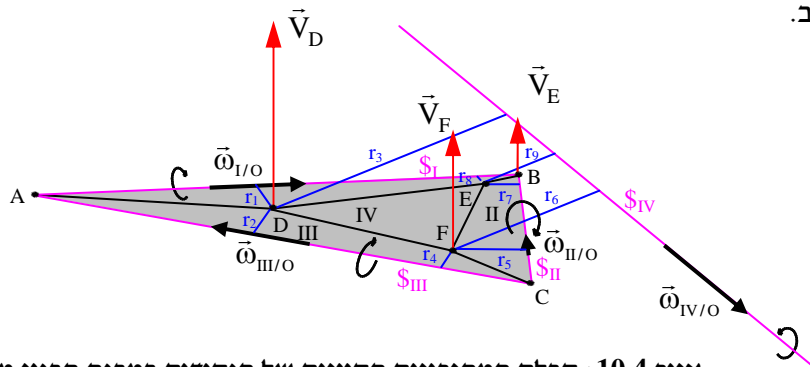
הגדרה 10.5: הגדרת התנועות במבנה הבנוי מלוחות המחוברות על ידי צירים זוהי הגדרה של סקלרים ω_{km} לכל ציר L_{km} כך שיתקיים:

$$\sum \omega_{km} L_{km} = 0 \quad (10.3)$$

כאשר הסכימה היא סביב כל צומת. מהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות לאורך צירים המחוברים בין לוחות במבנה מוגדרות בגיאומטריה פרויקטיבית על ידי פאות הסמוכות לאותו ציר.

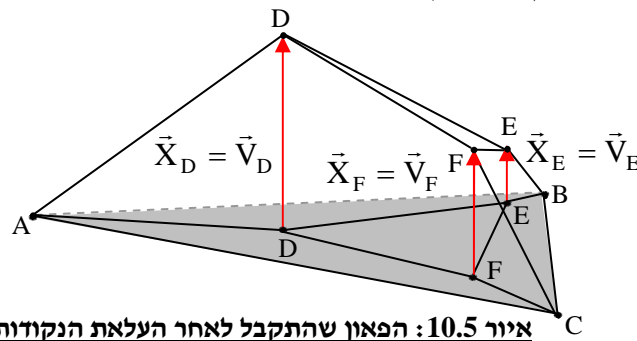
10.2.4 קבלת פאון ממבנה הבנוי מלוחות וצירים

בתנועת המבנה הבנוי מלוחות המחוברות על ידי הצירים (lifting), כל לוח מסתובב סביב הציר הסיבוב שלו. מכיוון שלוח זהו גוף קשיח, כל הנקודות השייכות לו מסתובבות באותה המהירות הזוויתית. מכאן, לכל לוח ישנה המהירות הזוויתית המוחלטת שלו, כאשר זוהי המהירות הסיבוב של הלוח ביחס ללוח הנייח (הבסיס של המבנה שנשאר כל הזמן במישור הפרויקציה), והיא פועלת לאורך הציר הסיבוב המוחלט המתאים ללוח. מקינמטיקה ידוע כי אם ניקח לוח (גוף קשיח) ונכפיל את המהירות הזוויתית שלו במרחק מכל נקודה עד לציר הסיבוב, נקבל מהירויות קוויות של אותן הנקודות הנמצאות על הלוח. וקטורי המהירויות הזוויתיות של כל לוח והמרחקים של הנקודות בכל לוח עד לציר הסיבוב שלו נמצאים במישור הפרויקציה, לכן המהירויות הקוויות של אותן הנקודות יהיו ניצבות למישור זה. באיור 10.4 ניתן לראות את קבלת המהירויות הקוויות של הנקודות במבנה מלוחות וצירים, כאשר לנקודות A, B ו-C המהירות הקווית שווה לאפס, מכיוון שהמרחקים שלהם מצירי הסיבוב שווים לאפס, דהיינו, הם נמצאים על הציר הסיבוב.



איור 10.4: קבלת המהירויות הקוויות של הנקודות במבנה הבנוי מלוחות וצירים

מקינמטיקה ידוע גם כי המרחקים שהנקודות אלו עוברים שווים להכפלה בין המהירויות הקוויות של אותן הנקודות בזמן. אם נגדיר פרק זמן השווה ליחידה, נקבל כי המרחקים האלה שווים למהירויות הקוויות. לכן, אם ניקח את הנקודות של המבנה הבנוי מלוחות וצירים, נשים אותן במקומות החדשים ונחבר ביניהן, נקבל את הפאון במרחב, כאשר המבנה מלוחות וצירים זהו ההיטל שלו, ראה איור 10.5.



איור 10.5: הפאון שהתקבל לאחר העלאת הנקודות

לסיכום, ניתן להגיד כי, אם מבצעים פעולת lifting של המבנה מלוחות וצירים, מקבלים את הפאון המתאים, כאשר המבנה מלוחות וצירים הוא ההיטל שלו.

10.2.5 דואליות בין מסבכים ללא סמכים ומבנים הבנויים מלוחות וצירים בגיאומטריה פרויקטיבית

הגדרה 10.6: פאון מכוון זוהי קבוצה של קודקודים $V = (a_1, \dots, a_r)$ ופאות $F = (F_1, \dots, F_s)$ המקיימים תנאים הבאים:

(א). כל פאה F_i מציגה מעגל של קודקודים (a_{i1}, \dots, a_{ik}) שלא חוזרים על עצמם, כאשר $k \geq 3$. הקודקודים a_{i1} ו- a_{ik} סמוכים.

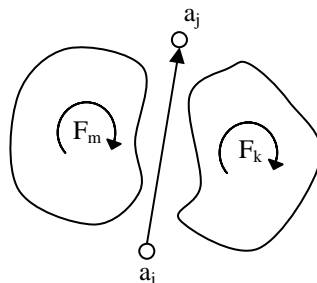
(ב). כל צלע מוגדרת על ידי זוג קודקודים (a_i, a_j) הסמוכים במעגל המתאים לפאה כלשהי.

(ג). כל צלע (a_i, a_j) מפרידה אך ורק בין שתי הפאות, כאשר כיוונה ביחס לפאה אחת הוא a_i, a_j וביחס לשנייה a_j, a_i .

(ד). לכל קודקוד a_0 , צלעות הפוגשות אותו יוצרות מעגל $(a_0, b_1), (a_0, b_2), \dots, (a_0, b_k)$.

(ה). הפאון הוא קשיר, כלומר כל קודקוד קשור לכל הקודקודים אחרים על ידי מסלול של צלעות וקודקודים.

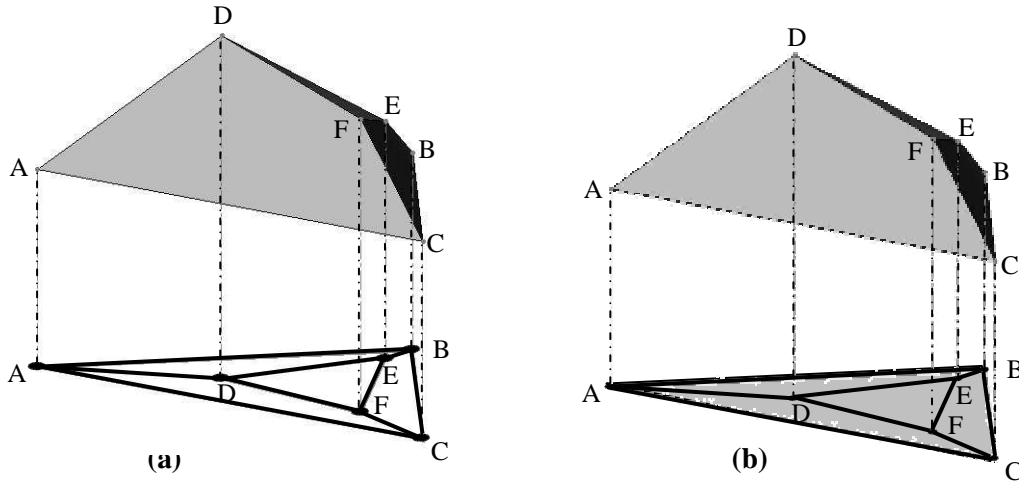
כל צלע ניתן להגדיר על ידי שני קודקודים a_i ו- a_j שהיא מחברת ביניהם ושתי פאות F_m ו- F_k שהיא מפרידה בצורה הבאה: $(k, m; i, j)$ או $(m, k; j, i)$ (איור 10.6).



איור 10.6: הגדרת צלע $a_i a_j$ על ידי $(k, m; i, j)$, כאשר הצלע הזו מחברת בין קודקודים a_i ו- a_j ומפרידה בין שתי פאות F_m ו- F_k

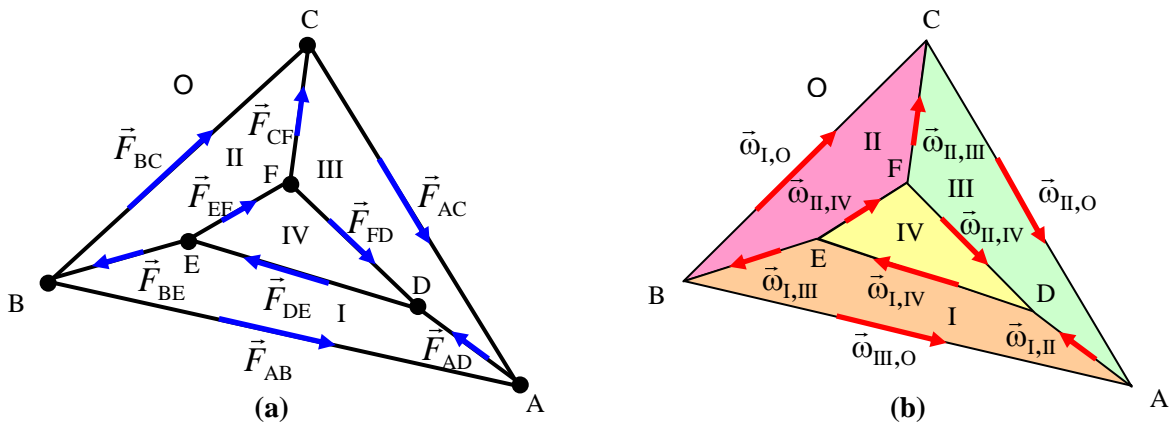
עד כאן הגדרנו על ידי גיאומטריה פרויקטיבית את הכוחות הפועלים במוטות של המסבכים ללא סמכים ומהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות בצירים של המבנים הבנויים מלוחות וצירים. כעת נראה כי המערכות הללו דואליות והגוף הגיאומטרי המקשר ביניהן זהו פאון מכוון.

נניח כי נתון לנו פאון מכוון, ובשלב ראשון נבנה לו את ההיטל האנכי. נתבונן על ההיטל שקיבלנו בשני אופנים, פעם אחת על השלד החיצוני שמגדיר את המבנה הבנוי ממוטות ומפרקים (מסבך ללא סמכים) כמתואר באיור (a) 10.7, ופעם שנייה על מבנה העשוי מלוחות במקום הפאות כאשר הצירים מחברים ביניהן, ראה איור (b) 10.7.



איור 10.7: הפאון וההיטל המתאים לו, כאשר פעם אחת אנו מסתכלים עליו כעל מערכת הבנויה ממוטות ומפרקים ופעם שנייה כעל מבנה הבנוי מלוחות שמחוברות על ידי צירים
 (a) ההיטל של הפאון הנתון הוא המסבך ללא סמכים. (b) ההיטל של הפאון הנתון הוא המבנה הבנוי מלוחות שקשורות על ידי צירים.

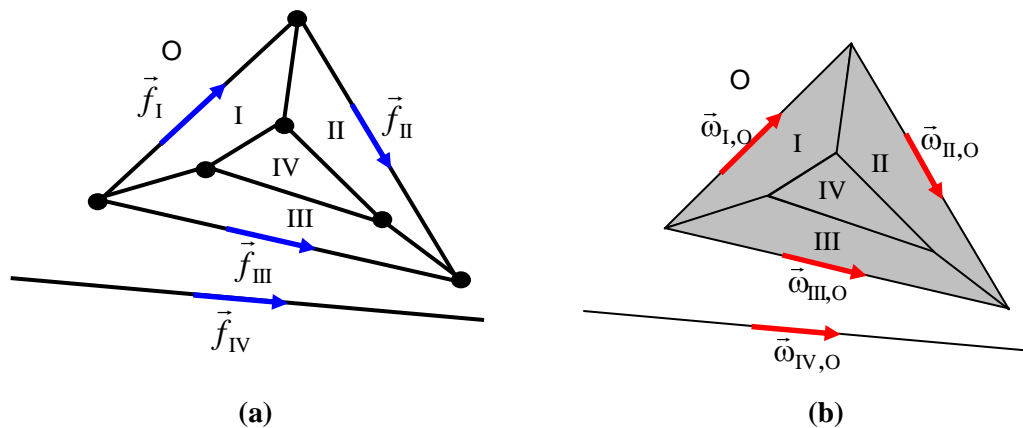
בסעיף 10.2.1 ראינו כי הגדרת הכוחות של המאמץ עצמי במסבך ללא סמכים זוהי הגדרת הסקלרים $(\dots, \lambda_{ij}, \dots)$ לכל מוט, כך שבכל צומת יתקיים $\sum \lambda_{ij} a_i a_j = 0$ (הגדרה 10.2), והגדרת התנועות במבנה הבנוי מלוחות מחוברות על ידי צירים זוהי הגדרת הסקלרים $(\dots, \omega_{km}, \dots)$ לכל ציר, כך שבכל צומת יתקיים $\sum \omega_{km} L_{km} = 0$ (הגדרה 10.5). זהו קו המחבר בין שני קודקודים a_i ו- a_j במסבך ו- L_{km} זהו ציר המפריד בין שתי פאות k ו- m במבנה מלוחות. מכיוון שגם מסבך ללא סמכים וגם מבנה מלוחות וצירים הם היטלים של אותו פאון, ניתן להגיד כי קו $a_i a_j$ וקו L_{km} מתלכדים, דהיינו $L_{km} = a_i a_j$. במילים אחרות, ניתן להגיד כי מוטות במסבך ללא סמכים מתאימים לצירים במבנה מלוחות וצירים. לכן, אם ניקח משוואות (10.1) ו-(10.3) ונשווה אותם, נקבל כי הכוחות במוטות של מסבך ללא סמכים מתאימים למהירויות הזוויתיות היחסיות בצירים של המבנה מלוחות וצירים (איור 10.8), ומכאן כי המערכות הללו דואליות.



איור 10.8: תיאור כי הכוחות הפועלים במוטות של המסבך ללא סמכים מתאימים למהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות בצירים של המבנה הדואלי הבנוי מלוחות וצירים
 (a) כוחות הפועלים במוטות של המסבך ללא סמכים. (b) מהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות בצירים של המבנה הבנוי מלוחות וצירים.

10.3 המשתנה הדואלי לכוח בפאה בזואליות בין FLGR ו-PLGR

כעת נציג את משתנה הדואלי לכוח בפאה מהיבט של דואליות בין שלד ממוטות ומפרקים ומבנה מלוחות וצירים. ניקח מבנה עשוי מלוחות וצירים. על מנת להגדיר תנועת המבנה יש להגדיר צירי סיבוב עבור כל לוח, כאשר כל ציר כזה זהו קו שסביבו לוח יבצע תנועת סיבוב. צירים אלו מגדירים מיקום פעולת מהירויות זוויתיות מוחלטות המתאימות לכל לוח במבנה, לכן נקרא להם צירי סיבוב מוחלטים. בין כל שתי לוחות מחבר ציר סיבוב שלאורכו פועלת מהירות זוויתית יחסית של אותן שתי לוחות, לצירים אלו נקרא צירי סיבוב יחסיים. אם מבנה מלוחות וצירים זהו היטל של פאון מכוון, אזי צירי סיבוב במבנה מתאימים לקווי חיתוך בין מישורים בפאון. ציר סיבוב מוחלט מתאים לקו חיתוך בין מישור כלשהו למישור הפרויקטיבי וציר סיבוב יחסי מתאים לקו חיתוך בין שני מישורים כלשהם. בפרק 9 ראינו שקווים שווים מומנט גם כן מייצגים את קווי חיתוך בין מישורים בפאון, כלומר, קו שווה מומנט מוחלט מתאים לקו חיתוך בין מישור כלשהו למישור הפרויקטיבי וקו שווה מומנט יחסי מתאים לקו חיתוך בין שני מישורים. המסקנה היא, כי אם ניקח פאון מכוון ונבנה על ההיטל שלו מערכת אחת שהיא מסבך ללא סמכים ומערכת אחרת שהיא מבנה מלוחות וצירים, אזי שקווים שווים מומנט במסבך יהיו מתאימים לצירי סיבוב במבנה מלוחות. ביתר פירוט, ניתן להגיד כי קו שווה מומנט מוחלט מתאים לציר סיבוב מוחלט וקו שווה מומנט יחסי מתאים לציר סיבוב יחסי. מכיוון שקווים שווים מומנט יחסיים מתלכדים עם המוטות של המסבך ללא סמכים, כוחות במוטות פועלים לאורך קווים שווים מומנט יחסיים, ומתאימים למהירויות זוויתיות יחסיות הפועלות לאורך צירי סיבוב יחסיים. אז מהו המשתנה הדואלי לכוח בפאה במקרה הזה? עד כאן ידוע כי קו שווה מומנט מוחלט זהו קו שלאורכו פועל כוח בפאה, וכי הוא מתאים לציר הסיבוב המוחלט שלאורכו פועלת מהירות זוויתית מוחלטת. מכאן ניתן להסיק כי כוח בפאה של המסבך ללא סמכים מתאים למהירות זוויתית מוחלטת של המבנה הבנוי מלוחות וצירים (איור 10.9).

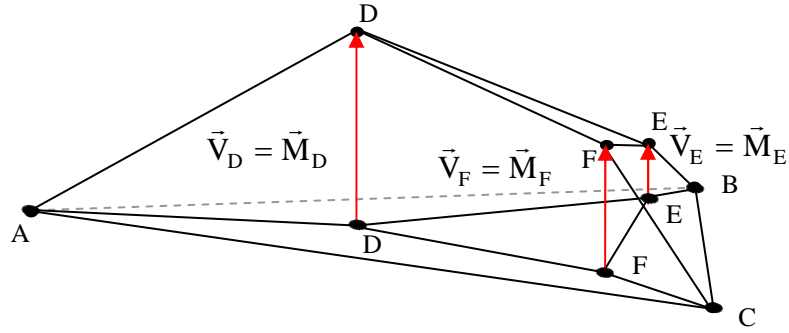


איור 10.9: תיאור כי הכוחות בפאות של המסבך ללא סמכים מתאימים למהירויות זוויתיות מוחלטות במבנה הדואלי הבנוי מלוחות

(a) כוחות בפאות של המסבך ללא סמכים. (b) מהירויות זוויתיות מוחלטות במבנה הבנוי מלוחות.

עד כאן קיבלנו שקווים שווים המומנט המוחלטים במסבך ללא סמכים מתאימים לצירי הסיבוב המוחלטים במבנה הבנוי מלוחות וצירים. לכן, המרחקים מקווים שווים המומנט עד לנקודות של המסבך ומצירי הסיבוב עד לנקודות של המבנה זהים. קיבלנו גם, כי הכוחות בפאות של המסבך ללא סמכים מתאימים למהירויות המוחלטות של הלוחות במבנה הבנוי מלוחות וצירים. מכאן, מקבלים קשר נוסף והוא בין המומנטים שהכוחות בפאות יוצרים על הנקודות במסבך ללא סמכים והמהירויות הקוויות המתקבלות

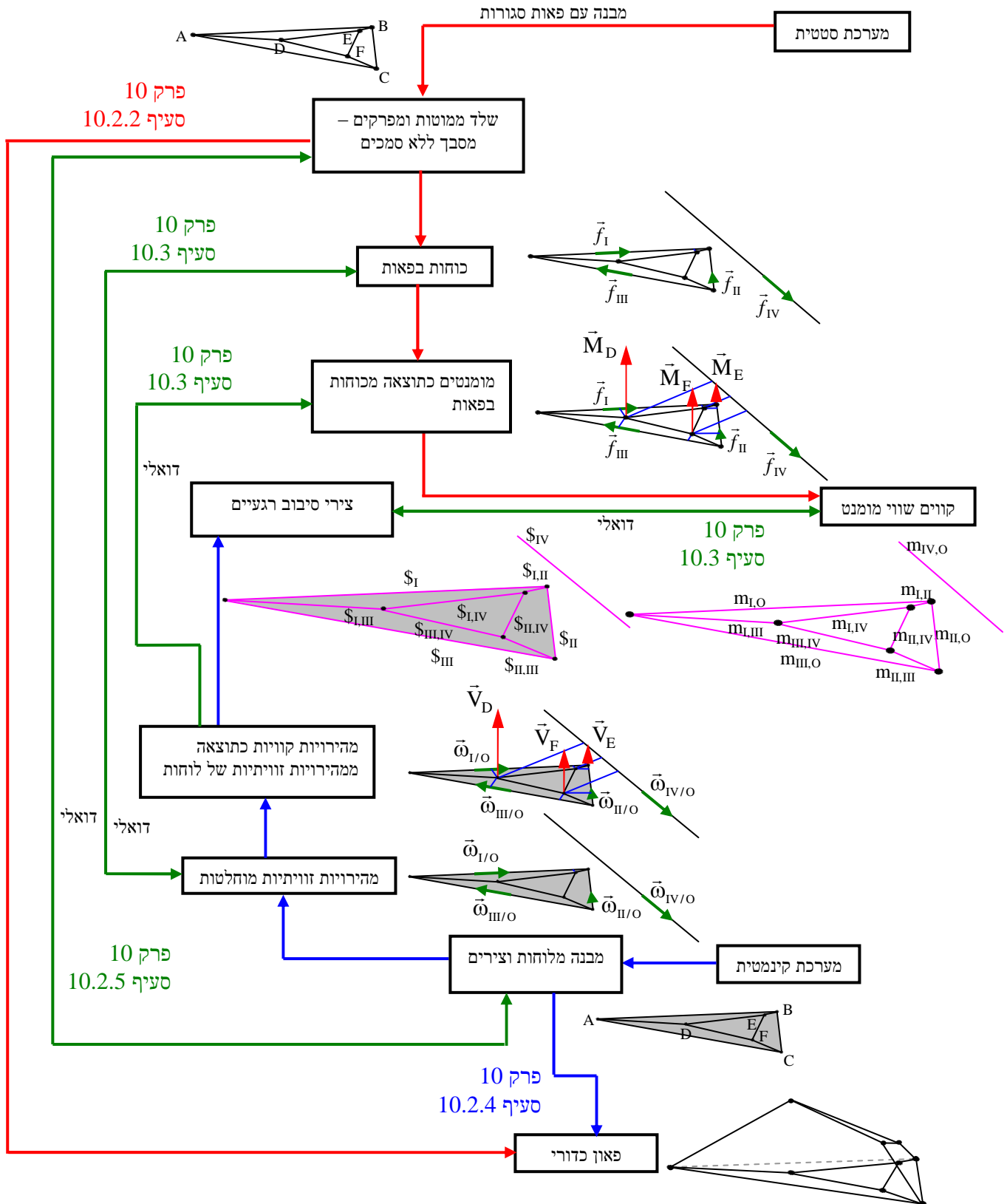
בנקודות של המבנה הבנוי מלוחות וצירים, כמתואר באיור 10.10.



איור 10.10: תיאור הקשר בין המהירויות הקוויות של הנקודות שמתקבלות כתוצאה מ-lifting של המבנה והמומנטים שנוצרים בנקודות של המסבך ללא סמכים כתוצאה מפעולת הכוחות בפאות

10.4 סיכום הפרק

לסיכום באיור 10.11 נציג את תרשימים הזרימה שראינו באיור 10.1, כאשר ליד כל נושא מובאת דוגמה קטנה רלוונטית ומיקומו בפרק בו דיברנו עליו.



איור 10.11: תרשימים זרימה של הנושאים כולל דוגמאות רלוונטיות ומיקומם בפרק 10

פרק 11

הדואליות בין FLGR ו-PLGR מההיבט של תיאורית הבורג

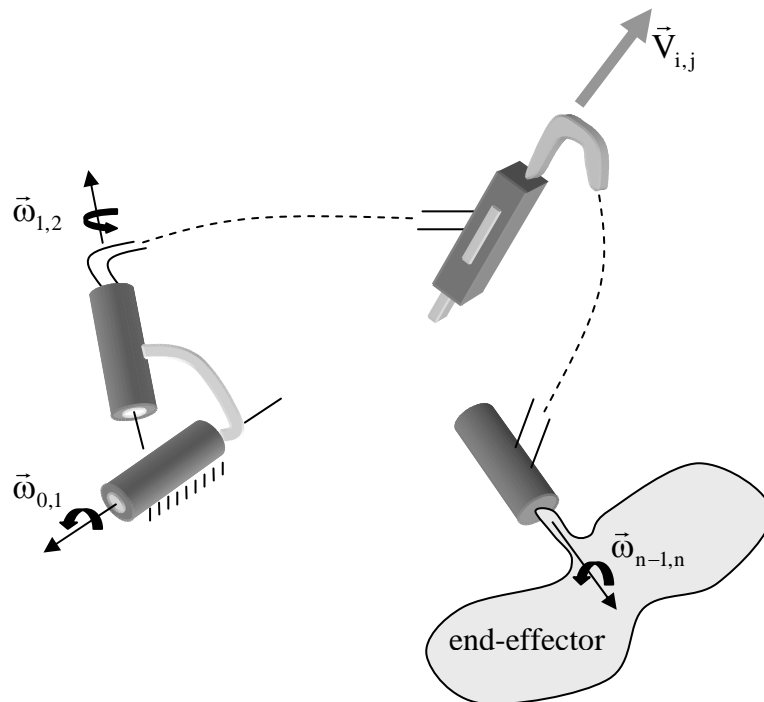
בפרק 3 הראנו שעל סמך הדואליות בין FLGR ו-PLGR המערכות רובוט מקבילי ורובוט טורי הן דואליות. בפרק הזה נציג את אותו הקשר הדואלי אך הפעם מההיבט של תיאורית הבורג. זהו כלי שמשתמשים בו הרבה בפתרון בעיות ברובוטיקה. הנושא של תיאורית הבורג זהו נושא מאוד רחב, ולכן נתייחס רק לדברים הרלוונטיים לעבודה הזו. על הנושא הזה ניתן לקרוא בהרחבה ב- (Davidson and Hunt, 2004).

11.1 קינמטיקה וסטטיקה מההיבט של תיאורית הבורג

בפרק זה נראה כי, כל מערכת קינמטית (מערכת של מהירויות זוויתיות וקוויות) ניתן להמיר למערכת שקולה של מהירות זוויתית אחת הפועלת לאורך ציר מסוים ומהירות קווית הפועלת במקביל לציר הזה. באופן דומה, ניתן גם להמיר כל מערכת סטטית (מערכת של כוחות ומומנטים) למערכת שקולה של כוח אחד הפועל לאורך ציר מסוים ומומנט הפועל במקביל לציר הזה.

11.1.1 הצגת מערכת קינמטית בתיאורית הבורג

ניקח מערכת קינמטית, לדוגמה זרוע של רובוט טורי, עם מהירויות זוויתיות במפרקים סיבוביים וכדוריים, ומהירויות קוויות במפרקים פריזמטיים, כמתואר באיור 11.1.



איור 11.1: דוגמה לזרוע של רובוט טורי עם מהירויות זוויתיות יחסיות במפרקים סיבוביים וכדוריים ומהירויות קוויות יחסיות במפרקים פריזמטיים

ניתן להפוך המערכת הזו למערכת שקולה הבנויה משתי חוליות המחוברות על ידי שני מפרקים. אחת החוליות היא החוליה הנייחת והשנייה היא הקצה הפעיל (end effector). המפרקים המחברים ביניהן הם, המפרק הסיבובי, שבו פועלת המהירות הזוויתית $\vec{\omega}$, השווה לסכום של כל המהירויות הזוויתיות שפעלו במערכת המקורית, והמפרק הפריזמטי, שבו פועלת המהירות הקווית \vec{v} , השווה לסכום של כל

המהירויות הקוויות במערכת המקורית. המערכת החדשה שקיבלנו ניתן בקלות להמיר למערכת בתיאורית הבורג באופן הבא.

נמקם מערכת צירים, כך שראשית הצירים O תתלכד עם נקודה B שבה פועלת מהירות זוויתית שקולה $\vec{\Omega}'$. נמקם באופן כזה שמהירות זו תפעל לאורך ציר Z ומהירות קווית שקולה \vec{V}' תפעל במישור YZ כך שההמשך שלה יחתוך ראשית הצירים O. זווית בין מהירות קווית שקולה לבין ציר Z תהיה ξ' נגד כיוון השעון. וקטור \vec{V}' הוא וקטור חופשי כי הוא זהה לכל הנקודות בקצה הפעיל. ניקח נקודה שרירותית A' במישור XY השייכת ל- end effector ונגדיר זווית מציר X עד לקו \overrightarrow{OA}' על ידי ζ . מהירות של נקודה A' מורכבת משלושה רכיבים שגודלם וכיוונם מוגדרים באופן הבא:

$$(i) \vec{\Omega}'(\overrightarrow{OA}'), \text{ המאונך ל- } \overrightarrow{OA}' \text{ ובעל סימן המתאים לכלל יד ימין סביב ציר } Z.$$

$$(ii) -\vec{V}' \sin \xi' \text{ , המקביל לציר } Y.$$

$$(iii) \vec{V}' \cos \xi' \text{ , המקביל לציר } Z.$$

אנו מעוניינים לקבל מערכת Twist, כלומר מצב בו מהירות קווית ומהירות זוויתית פועלים באותו כיוון (Davidson and Hunt, 2004). לצורך זה נניח נקודה כלשהי A ($x_A, y_A, 0$), כאשר אם נעביר אליה את ראשית הצירים O, נקבל מערכת Twist השקולה למערכת המקורית. נתבונן במהירויות הפועלות במערכת. המהירות המתוארת ב-(i) פועלת במישור XY, כיוון שהגדרנו \overrightarrow{OA}' כך שהוא נמצא גם במישור XY ומהירות זוויתית $\vec{\Omega}'$ פועלת לאורך ציר Z. מכאן, ניתן לפרק את המהירות המתוארת ב-(i) לשני רכיבים: אחד בציר X ששווה ל- $\vec{\Omega}'(\overrightarrow{OA}') \cos \zeta$ והשני בציר Y ששווה ל- $\vec{\Omega}'(\overrightarrow{OA}') \sin \zeta$. כפי שצוין קודם, מהירות זוויתית השקולה של המערכת $\vec{\Omega}'$ פועלת לאורך ציר Z. לכן, במערכת Twist מהירות קווית צריכה לפעול גם לאורך ציר Z. על מנת לקבל מצב זה, אנו צריכים להפטר מרכיבים של מהירות קווית בציר X ובציר Y. כדי לצמצם רכיב מהירות ליניארית בכיוון Y צריך לקיים:

$$\vec{\Omega}'(\overrightarrow{OA}') \cos \zeta = \vec{V}' \sin \xi' \quad (*)$$

וכדי לצמצם רכיב בציר X:

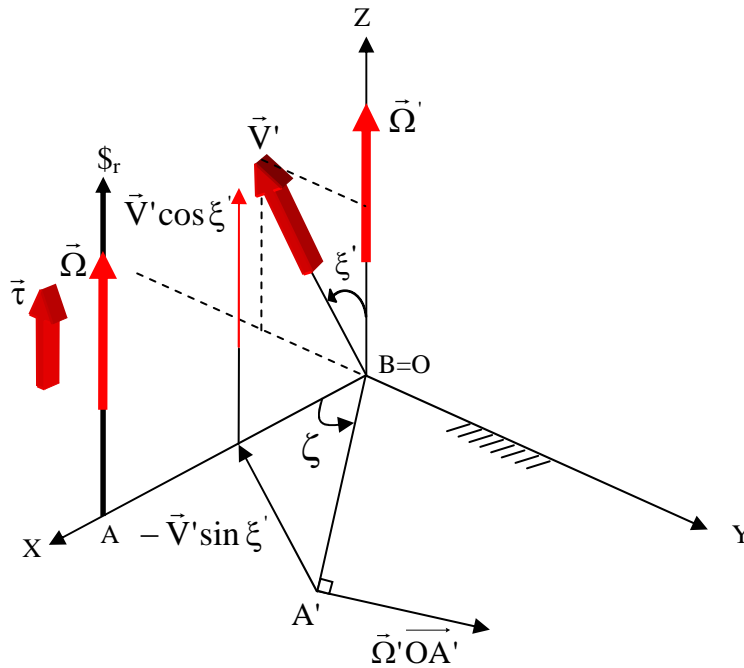
$$\vec{\Omega}'(\overrightarrow{OA}') \sin \zeta = 0 \quad (**)$$

מהמשוואה (**) מקבלים כי ζ חייבת להיות שווה או לאפס או ל- 180° . לכן, ניתן להסיק כי נקודה A נמצאת על ציר X, דהינו $y_A=0$.

$$x_A = (\vec{V}' / \vec{\Omega}') \sin \xi' \text{ כי מקבלים כי } (*)$$

לבסוף, מקבלים מערכת Twist שבה instantaneous screw axis $\$_r$ מקביל לציר Z. מהירות זוויתית של המערכת $\vec{\Omega}$ פועלת לאורך ציר זה ומהירות ליניארית שגודלה $\vec{V}' \cos \xi'$ פועלת במקביל לציר זה. נקרא למהירות קווית שהתקבלה \vec{t} . **באור 11.2** ניתן לראות את השלבים שפורטו מעלה. למערכת Twist שקיבלנו יש פסיעה h_r המקשרת בין מהירות זוויתית ומהירות קווית באופן הבא:

$$\vec{t} = h_r \vec{\Omega} \quad (11.1)$$



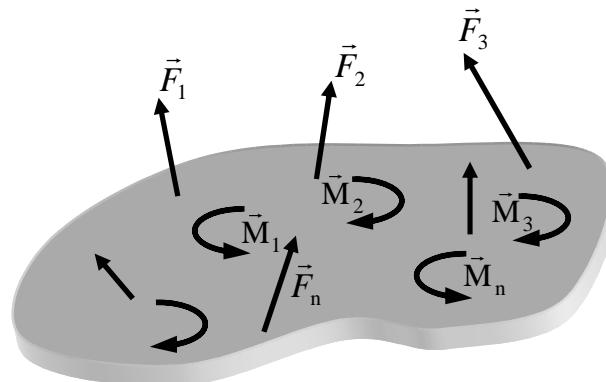
איור 11.2: סכימה למציאת מערכת Twist, כלומר instantaneous screw axis, מהירות זוויתית הפועלת לאורך ציר זה $\vec{\Omega}$ ומהירות ליניארית הפועלת בכיוון של הציר \vec{t} בהינתן מערכת של מהירות זוויתית $\vec{\Omega}'$ ומהירות ליניארית \vec{V}' שקולות

ניתן להבדיל בשני מקרים מיוחדים:

- מקרה 1: פסיעה שווה לאפס, דהיינו $h_t = 0$. מהמשוואה (11.1) מקבלים כי המהירות הקווית שווה לאפס, דהיינו, הגוף מבצע סיבוב טהור.
- מקרה 2: פסיעה שווה לאינסוף, דהיינו $h_t = \infty$. כדי שמשוואה (11.1) תהיה מוגדרת המהירות הזוויתית חייבת להיות שווה לאפס, ואז זהו מקרה שהגוף מבצע העתקה טהורה.

11.1.2 הצגת מערכת סטטית בתיאורית הבורג

נתבונן בגוף קשיח שפועלים עליו מערכת של n כוחות ומומנטים כמתואר באיור 11.3.



איור 11.3: דוגמה לגוף קשיח שפועלים עליו מערכת של n כוחות ומומנטים

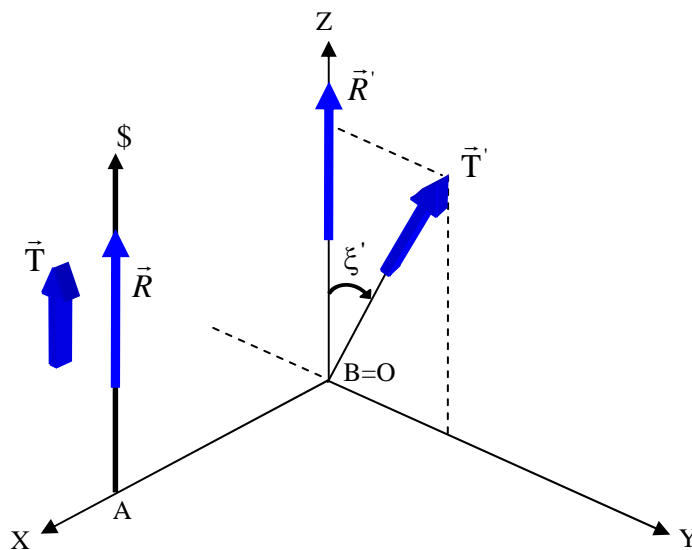
גם במקרה הזה ניתן לקבל מערכת שקולה, שבה על הגוף פועל כוח שקול \vec{R}' , השווה לסכום של כל הכוחות שפעלו במערכת המקורית ומומנט שקול \vec{T}' , השווה לסכום של כל המומנטים. על מנת לקבל

מהמערכת השקולה את המערכת בתיאורית הבורג נבצע שלבים הבאים. נמקם מערכת צירים כך שראשית הצירים O תתלכד עם נקודה B שבה פועל כוח שקול \vec{R}' . נמקם באופן כזה שהכוח יפעל לאורך ציר Z והמומנט שקול יפעל במישור YZ כך שההמשך שלו יחתוך את ראשית הצירים O. זווית בין מומנט שקול לבין ציר Z תהיה ξ' נגד כיוון השעון. מהמערכת שקיבלנו נרצה לקבל מערכת Wrench, שבה הכוח והמומנט פועלים באותו כיוון (Davidson and Hunt,2004). אם נתבונן במערכת שקולה שקיבלנו נראה שווקטור שקול המומנטים ניתן לפרק לשני רכיבים: אחד בכיוון Z ששווה ל- $\vec{T}'\cos\xi'$ והשני בכיוון Y ששווה ל- $\vec{T}'\sin\xi'$. מיקמנו מערכת צירים כך שכוח שקול יפעל לאורך ציר Z. על מנת לקבל שגם מומנט יפעל באותו כיוון אנו צריכים לאפס את הרכיב המומנט בכיוון Y. זה יקרה אם נעתיק את מערכת הצירים שלנו לנקודה A שנמצאת על ציר X במרחק (\vec{T}'/\vec{R}') מהראשית O, כיוון שבעת העתקת כוח \vec{R}' נוצר מומנט ששווה ל- $\vec{T}'\sin\xi' = \vec{R}'(\vec{T}'/\vec{R}')\sin\xi'$ בכיוון חיובי של ציר Y והוא מבטל את הרכיב של המומנט שפועל שם. כתוצאה מכך מקבלים מערכת Wrench שבה \$ screw axis פועל בציר Z. כוח הפועל על המערכת שווה ל- \vec{R}' וכיוונו לאורך ציר זה והמומנט שגודלו שווה ל- $\vec{T}'\cos\xi'$ פועל במקביל לציר זה. נקרא לכוח שהתקבל \vec{R} ולמומנט \vec{T} . **באיור 11.4** מתוארים השלבים לקבלת מערכת Wrench. למערכת Wrench שקיבלנו יש פסיעה h שמקשרת בין כוח ומומנט באופן הבא:

$$\vec{T} = h\vec{R} \quad (11.2)$$

גם כאן ניתן להבדיל בשני מקרים:

- מקרה 1: פסיעה שווה לאפס, דהיינו $h = 0$. מהמשוואה (11.2) נקבל שהמומנט שווה לאפס, וזה מתאים למקרה שבמערכת פועל כוח טהור.
- מקרה 2: פסיעה שווה לאינסוף, דהיינו $h = \infty$. כעת על מנת שהמשוואה (11.2) תהיה מוגדרת הכוח חייב להיות שווה לאפס, וזה מתאים למקרה שבמערכת פועל מומנט טהור.



איור 11.4: סכימה למציאת מערכת Wrench, כלומר \$ screw axis, כוח הפועל לאורך ציר זה \vec{R} ומומנט הפועל בכיוון של הציר \vec{T} בהינתן מערכת של כוח \vec{R}' ומומנט \vec{T}' שקולים

11.2 הקשר הדואלי בין גרף הזרימות הקווי וגרף הפוטנציאלים הקווי לדואליות בין Wrench ו-Twist

בסעיף 11.1.1 הראנו שלכל מערכת קינמטית ניתן לקבל את מערכת השקולה המורכבת ממהירות הזוויתית הפועלת לאורך ציר המכונה ציר הבורג ומהירות הליניארית הפועלת במקביל לציר הזה. המערכת הזו נקראת Twist. בדומה לכך, לכל מערכת סטטית ניתן לקבל את מערכת השקולה המורכבת מכוו הפועל לאורך ציר הבורג ומומנט הפועל במקביל לציר הזה. זוהי מערכת Wrench. נסכם בטבלה הבאה את הדברים שידועים לנו על המערכות האלו.

קינמטיקה	סטטיקה
בהינתן זרוע המורכב מחוליות שמחוברות בטור, לכל הזוג הקינמטי שמחבר בין החוליות ניתן להגדיר Twist הפועל לאורך ציר הבורג. האמליטודה של Twist היא המהירות הזוויתית.	בהינתן רובוט מקבילי, המורכב מפלטות שהמוטות המחברים ביניהן נמצאים במקביל אחד ביחס לשני, לכל המוט ניתן להגדיר Wrench הפועל לאורך ציר הבורג. העוצמה של Wrench היא הכוח.
הקשר בין המהירות הקווית והמהירות הזוויתית במערכת Twist הוא: $\vec{\tau} = h\vec{\Omega}$. h - פסיעה.	הקשר בין המומנט והכוח במערכת Wrench הוא: $\vec{T} = h_r\vec{R}$. h _r - פסיעה.
הגוף שעושה Twist עם פסיעה ששווה לאפס, מבצע תנועת סיבוב טהור סביב ציר הבורג.	הגוף שפועל עליו Wrench עם פסיעה ששווה לאפס נמצא תחת הפעלת הכוח הטהור הפועל לאורך ציר הבורג.
הגוף שעושה Twist עם פסיעה אינסופית, מבצע תנועת העתקה.	הגוף שפועל עליו Wrench עם פסיעה אינסופית נמצא תחת הפעלת המומנט הטהור.

טבלה 11.1: הקשרים הדואלים בין המערכות Twist ו-Wrench

מהטבלה אנו רואים שהקשר בין המהירות הזוויתית והמהירות הליניארית במערכת Twist הוא: $\vec{\tau} = h\vec{\Omega}$, ובין הכוח והמומנט במערכת Wrench: $\vec{T} = h_r\vec{R}$. מתיאורית הבורג ידוע שהמערכות האלו דואליות, ומכאן נובע שהמהירויות הזוויתיות במערכת Twist מתאימות לכוחות במערכת Wrench, כלומר $\vec{R} = \vec{\Omega}$, והמהירויות הקוויות למומנטים, כלומר $\vec{T} = \vec{\tau}$. אם נזכר בדואליות בין גרף זרימות קווי וגרף פוטנציאלים קווי שהצגנו בפרק 7, גם שם קיבלנו את אותו הקשר, שאותו הצגנו בדוגמה של שתי המערכות הדואליות, רובוט טורי ורובוט מקבילי.

פרק 12

סיכום, מסקנות והמשך המחקר

12.1 סיכום

העבודה הזו נתנה זווית חדשה על עבודות שדווחו וחשפה קשרים חדשים ביניהם, כמו כן התגלו פירושים חדשים למושגים שונים, וכן פותחו יישומים נוספים למימוש הדואליות המבוססת על תורת הגרפים. בתזה חקרנו בצורה מעמיקה סוגים רבים של דואליות הקיימים בספרות, בעיקר התעמקנו בנושא reciprocal של Maxwell, שבשנים אחרונות זכה להתעניינות מחודשת מצד חוקרים רבים בעולם, והשוונו אותם מול הדואליות שפותחה לאחרונה ומבוססת על תשתית מתורת הגרפים.

תוצאות שהתקבלו במחקר

כפי שצוין קודם, בעבודה הזו הקדשנו זמן רב לחקור נושא reciprocal של Maxwell, והתברר כי יש קשר בינו לבין דואליות מסבכים ומכניזמים. יתרה מזאת, התגלה לראשונה, כי ניתן לבצע reciprocal אך ורק על קבוצות מבנים מיוחדים שנקראים מבני Assur. על בסיס הקשר ש-Maxwell גילה בין פאוניים מרחביים ו-reciprocal, נחשפה כאן בתזה משמעות גיאומטרית לישות פיזיקלית, קו שווה מומנט, שפותחה לאחרונה בדואליות מסבכים ומכניזמים. החשיפה הזו הובילה לשיפור שיטה הבודקת האם מבנה הוא היטל של פאון מרחבי. נושא חשוב אחר שנקרא parallel drawing נחקר כאן בתזה, והתברר הקשר בינו לבין השיטה הידועה במכניזמים המכונה בבואת מהירויות. על בסיס הקשר הזה התגלה קשר נוסף בין parallel drawing לדואליות מסבכים ומכניזמים. דווח בספרות כי קיימת דואליות בין parallel drawing ו-reciprocal. הדואליות הזו הובילה לגילוי בתזה של קשר בין מהירויות הצמתים ב-parallel drawing וישות חדשה מדואליות מסבכים ומכניזמים, כוח בפאה, הפועל ב-reciprocal. דווח בספרות כי, אם במבנה פועל מאמץ עצמי, אזי ניתן לבנות לו גם reciprocal וגם parallel drawing. יתרה מזאת, דווח לאחרונה, כי רק למבני Assur ניתן להפעיל מאמץ עצמי בכל המוטות וגם כל מוט הוא נייד. מכאן דווח בתזה כי, רק למבני Assur ניתן לבנות גם reciprocal וגם parallel drawing. בעבודה זו הוצגה לראשונה שיטה לקבלת מכניזם דואלי למסבך לא מישורי. השיטה מבוססת על טכניקת Bow's notation הידועה בספרות והכוחות בפאות. בנוסף ל-reciprocal נחקרו בתזה סוגי דואליות אחרים לדוגמה, דואליות בגיאומטריה פרויקטיבית ודואליות בתיאורית הבורג. על בסיס הדואליות בגיאומטריה פרויקטיבית התגלה משתנה הפועל בפאות של pillar system והוא מתאים למהירויות זוויתיות מוחלטות של חוליות במכניזם דואלי. בדואליות מתיאורית הבורג דווח בספרות על קשר בין כוחות ומומנטים במערכת סטטית ומהירויות קוויות ומהירויות זוויתיות במערכת קינמטית, בהתאמה. התברר כי קשר זה אפשר לקבל גם מדואליות בין pillar systems ומכניזמים המבוסס על דואליות FLGR ו-PLGR.

12.2 מסקנות והמשך מחקר

מסקנות

בעבודה זו ניתן מבט כללי רחב על סוגי דואליות הקיימים בתחומים השונים. התגלו קשרים חדשים בין העבודות השונות שנעשו בנושא דואליות, ועל בסיס הקשרים האלו ניתנו משמעויות חדשות לתוצאות שהתקבלו בעבר. לדוגמה, על בסיס העבודה של Maxwell בנושא פאונים שנחקרה בתזה, התקבלה משמעות גיאומטרית לישות חדשה מתחום סטטיקה, קו שווה מומנט.

החפיפה בין סוגי דואליות הקיימים שהתגלתה בתזה והקשרים הדואלים בין הישויות השונות שדווחו בספרות הובילו לגילוי קשרים חדשים. לדוגמה, דואליות בין parallel drawing ו-reciprocal הובילה לגילוי בתזה של קשר בין מהירויות הצמתים ב-parallel drawing וישות חדשה מדואליות בין מסבכים ומכניזמים, כוח בפאה, הפועל ב-reciprocal.

ניתן לגלות מהתזה כי, מבני Assur, שעד כה הורחב עליהם רק בספרות הרוסית, אלה מבנים מיוחדים, שלהם חשיבות רבה בתחום של דואליות. לדוגמה, התגלה בתזה כי רק למבני Assur ניתן לבנות גם reciprocal וגם parallel drawing. משפט זה מקביל למשפט אחר, שדווח לאחרונה בספרות, ואומר כי רק למבני Assur פועל מאמץ עצמי בכל המוטות וכל המוטות ניידים.

התברר כי, reciprocal של Maxwell נותן מענה רק למבני Assur, בזמן שבדואליות בין מסבכים ומכניזמים ניתן לטפל בכל מבנה כללי. מכאן ניתן לסכם כי, דואליות בין מסבכים ומכניזמים כללית יותר מ-reciprocal.

ניתן לראות בתזה כי, דואליות מאפשרת העברת ידע מתחום אחד לתחום אחר. לדוגמה, בתזה משתמשים בידע מתחום של קינמטיקה לתחום של סטטיקה ולהיפך.

אחת המסקנות החשובות של התזה היא, כי דואליות מתורת הגרפים אינה מוגבלת לגרפים מישוריים כמדווח בספרות. מכאן, ניתן לקחת שיטות שפותחו עבור מבנים מישוריים ולהרחיב אותם גם למבנים לא מישוריים. לדוגמה, בתזה הורחבה שיטת הכוח בפאה למציאת מצבים מתים של מכניזמים, וכעת היא תקפה גם למכניזמים לא מישוריים.

המשך מחקר

כפי שצוין קודם, אחת המסקנות של התזה היא, כי מבני Assur אלה מבנים מיוחדים בעלי חשיבות רבה בתחום של דואליות. מכיוון שהמחקר מהווה תחילת הדרך לשילוב מבני Assur בדואליות, ניתן להרחיב על הנושא בצורה מעמיקה יותר במחקרים הבאים.

לאחר שהוצג בתזה כי, דואליות מתורת הגרפים אינה מוגבלת רק למבנים מישוריים, ניתן להעביר את הידע שפותח עבור מבנים מישוריים (קשרים דואלים ושיטות שונות) גם למבנים לא מישוריים.

בשנים אחרונות נושא של דואליות השתלב במגוון רחב של תחומים כגון, ארכיטקטורה, רפואה, ביולוגיה ועוד. כאמור, דואליות מאפשרת העברת ידע בין תחומים שונים, מכאן ניתן לבדוק במחקרים הבאים אפשרויות ליישם שיטות וקשרים שפותחו בתחומים של קינמטיקה וסטטיקה גם בתחומים החדשים.

מקורות

1. Assur L.V., 1952, *Issledovanie Ploskih Sterjney Mehanizmov s Nizshimi Parami s Tochki Zreniya ih Strukturi i Klassifikacii*, Izdat. Akad. Nauk, Edited by Artobolevskiy I.I.
2. Ball R. S., 1900, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press.
3. Cayley A., 1889-1898, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, Cambridge University Press, 1889–1898. Reprinted 1963 by Johnson Reprint Corporation.
4. Chasles M., 1830, "Note sur les propriétés g'énérales du syst`eme de deux corps semblables entr'eux et plac'és d'une mani`ere quelconque dans l'espace; et sur le d'éplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre", *Bulletin des Sciences Mathematiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques*, Vol. 14, pp. 321–326.
5. Crapo H. and Whiteley W., 1982, "Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction", *Structural topology*, Vol. 6, pp. 42-82.
6. Cremona L., 1890, *Graphical Statics*, Oxford Univ. Press.
7. Davidson J. K. and Hunt K. H., 2004, *Robots and Screw Theory*, Oxford University Press.
8. Degani A. and Wolf A., 2006, "Graphical Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators", in *ICRA 2006 Proceeding*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.751-756.
9. Doubilet P., Rota G. C. and Stein J., 1974, "On the Foundations of Combinatorial Theory: IX Combinatorial Methods in Invariant Theory", *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 53, No. 3, pp. 185-216.
10. Erdman A. G. and Sandor G.N., 1997, *Mechanism Design: Analyses and Syntheses*, Prentice Hall.

11. Franco S., 1995, *Electric Circuits Fundamentals*, San Francisco State University, Oxford University Press.
12. Gibbons A., 1985, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
13. Grassmann H. G., 1844, *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*, Leipzig: Otto Wigand.
14. Huffman D. A., 1977, "A duality concept for the analysis of polyhedral scenes", *Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 475–492.
15. Hunt K. H., 1978, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Department of Mechanical Engineering, Monash University.
16. Hunt K.H., 1983, "Structural kinematics of in-parallel actuated robot arms", *Journal Mech. Transm.-T. ASME*, Vol. 105, No.4, pp.705-712.
17. Klein F., 1939, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint Geometry*, Dover Publication.
18. Kurmann D., 1998, "Sculptor: How to design space? In T. Sasada et al. (eds), *Proceedings of The Third Conference on Computer Aided Architectural Design Research in Asia*, pp. 317-325.
19. Maibie H. M. and Ovcvirk F.W., 1963, *Mechanisms and Dynamics of Machinery*, John Wiley and Sons.
20. Maxwell J. C., 1864, "On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces", *Phil. Mag.*, Vol XXVII, pp. 250-261.
21. Maxwell J. C., 1872, "On Reciprocal Figures Frames and Diagrams of Forces", *Edinb. Roy. Soc. Proc.*, Vol. VII, pp. 53-56.
22. Oba Y., Hirai T., Yoshiura Y., Yoshikuni M., Kawauchi H. and Nagahama Y., 1999, "The Duality of Fish Gonadotropin Receptors: Cloning and Functional Characterization of a Second Gonadotropin Receptor cDNA Expressed in the Ovary and Testis of Amago Salmon (*Oncorhynchus rhodurus*)", *Biochemical and Biophysical Research Communications*, Vol. 265, No. 2, pp. 366-371.

23. Perry B. N. and Arbiser J. L., 2006, "The Duality of Angiogenesis: Implications for Therapy of Human Disease", *Journal of Investigative Dermatology*, Vol. 126, pp. 2160-2166.
24. Poinot L., 1806, "Sur la composition des moments et la composition des aires", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Vol. 6, No. 13, pp. 182–205.
25. Roth B., 1984, Screws, motors, and wrenches that cannot be bought in a hardware store, in: Proceedings of the 1st International Symposium of Robotics Research, pp. 679–693.
26. Servatius B., Shai O. and Whiteley W., 2006, "Assurance for Assur graphs by rigidity circuits", *submitted for the conference book ESI - Program 2006: Rigidity and Flexibility*.
27. Shai O., 2001a, "The duality relation between mechanisms and trusses", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, pp. 343-369.
28. Shai O., 2001b, "Combinatorial Representation in Structural Analysis", *Journal of Computing in civil engineering*, Vol. 15, pp. 343-369.
29. Shai O., 2001c, "The Multidisciplinary Combinatorial Approach and its Applications in Engineering", *AIEDAM - AI for Engineering Design, Analysis and Manufacturing*, Vol. 15, No. 2, pp.109-144.
30. Shai O., 2002, "Utilization of the Dualism between Determinate Trusses and Mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, No.11, pp. 1307-1323.
31. Shai O., 2003, "Transforming Engineering Problems through Graph Representation", *Advanced Engineering Informatics*, Vol. 17, No. 2, pp. 77 - 93.
32. Shai O. and Polansky I., 2005, "[Finding Dead-Point Positions of Planar Pin-Connected Linkages through Graph Theoretical Duality Principle](#)", *accepted for publication in ASME – Journal of Mechanical Design*.
33. Shai O. and Penock G. R., 2006, "[Extension of Graph Theory to the Duality Between Static Systems and Mechanisms](#)", *An Invited Paper, Special Issue of the Journal of*

- Mechanical Design, Spatial Mechanisms and Robot Manipulators, Trans. ASME, Vol. 128, No. 1, pp. 179-191.*
34. Sugihara K., 1984, "An Algebraic Approach to Shape-from-Image Problems", *Artificial Intelligence*, Vol.23, No.1, pp.59-95.
 35. Swamy M. N. S. and Thulasiraman K., 1981, *Graphs, Networks, and Algorithms*, Jhon Wiley and sons Inc., New York.
 36. Waldron K. J., 1969, *The Mobility of Linkage*, Ph.D. dissertation, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
 37. Fang Y. and Tsai L. W., 2004, "Enumeration of a class of overconstrained mechanisms using the theory of reciprocal screws", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 39, No.11, pp.1175-1187.
 38. Wilson C. E. and Sadler J.P., 1993, *Kinematics and Dynamics of Machinery*, Harper and Row.
 39. White N., 1994, "Grassmann-Cayley Algebra and Robotics", *Journal of Intelligent Robotics Systems*, Vol. 11, pp. 91-107.
 40. White N., 1995, "A Tutorial on Grassmann-Cayley Algebra, in N. White (ed.), *Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*, Kluwer, pp. 93-106.
 41. White N., 1997, "Geometric Applications of the Grassmann-Cayley Algebra, in J. E. Goodman and J. O'Rourke (eds.)", *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, pp. 881-892.
 42. Whiteley W., 1979, "Realizability of Polyhedra", *Structural Topology*, Vol. 1, pp. 46-58.
 43. Whiteley W., 1982, "Motions and Stresses of Projected Polyhedra", *Structural Topology*, Vol. 7, pp. 13-38.
 44. Whiteley W., 1986, "Parallel Redrawing of Configurations in 3-Space", *preprint*, York University, North York, Ontario.

45. פסן ד. ו-שביט א., 1975, תורת המכונות, "מכלול" הוצאה לפועל, חיפה.

Table of contents

List of Notations	viii
List of Figures	x
List of Tables	xiv
Chapter 1: Introduction	<u>1</u>
1.1 Introduction	1
1.2 Practical utilizations through different types of duality	3
1.2.1 Deriving Dead Center Positions of Linkages through the Graph Theory Duality Principle	3
1.2.2 Deriving Singular Positions of Planar Parallel Manipulators through Reciprocal Principle	3
1.2.3 Realizability of a Polyhedron through Trusses and Mechanisms' Duality Principle	4
1.3 Research objective	4
Chapter 2: Maxwell diagram as projection of polyhedron and duality	<u>5</u>
2.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	5
2.2 Maxwell diagram (reciprocal)	7
2.2.1 Construction of reciprocal appropriate to truss with self-stress	7
2.2.2 Reciprocal diagram and Assur structures	8
2.2.3 Steps for constructing a reciprocal	10
2.2.4 Example of constructing a reciprocal	11
2.2.5 Special properties of reciprocal	13
2.3 Construction of reciprocal appropriate to truss with an external force	13
2.3.1 Steps for constructing a reciprocal appropriate to truss with an external force	13
2.3.2 Example of a construction of a reciprocal appropriate to truss with an external force	13
2.4 Different instances of reciprocal	14
2.5 Structure with a self-stress and a reciprocal as a projection of spherical polyhedron and dual polyhedron, respectively	16

2.5.1 Construction of a spherical polyhedron as a structure with a self-stress	18
2.5.2 Steps for constructing a reciprocal from space polyhedron	18
2.5.3 Reciprocal and a projection of dual polyhedron	19
2.6 Relations between forces applied to a framework, edges of a polyhedron and edges of a projection	20
2.6.1 Type of edge in polyhedron dependent on internal angle between the two faces it separates	20
2.6.2 Type of edge in projection of polyhedron dependent on its place	20
2.6.3 Type of force in a rod within a framework dependent on type of edge of polyhedron and type of edge in projection	21
2.6.4 Dual relation between forces in a framework and forces in a reciprocal	22
2.7 Summary of the chapter	23

Chapter 3: Duality between trusses and mechanisms

based on duality between flow graph FGR and potential graph PGR **24**

3.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	24
3.2 Flow graph and representation of trusses through it	26
3.2.1 Flow Graph Representation	26
3.2.2 Representation of statically determinate truss through flow graph	27
3.2.3 Steps for constructing a flow graph to a truss	27
3.2.4 Example of constructing a flow graph topology to a truss	28
3.3 Potential graph and representation of mechanisms through it	28
3.3.1 Potential Graph Representation	28
3.3.2 Representation of one degree mechanism through potential graph	29
3.3.3 Steps for constructing a potential graph to a mechanism	29
3.3.4 Example of constructing a potential graph topology to a mechanism	29

3.4 Duality between trusses and mechanisms based on duality	
between flow graph and potential graph	30
3.4.1 Dual graph	30
3.4.2 The relation between primal graph and dual graph	30
3.4.3 Steps for constructing a dual graph to a non-oriented graph	31
3.4.4 Example of a dual graph construction	31
3.4.5 Duality between flow graph and potential graph	31
3.4.6 Duality between statically determinate trusses and one degree mechanisms	32
3.4.7 Steps for constructing a dual mechanism from a truss	32
3.4.8 Example of constructing a dual mechanism from a truss	33
3.5 Face forces and equipomental lines	33
3.5.1 Face force	33
3.5.2 Relation between forces in a truss and relative velocities in a mechanism	34
3.5.3 Equipomental lines	35
3.6 Summary of the chapter	37

Chapter 4: Relation between duality of trusses and mechanisms and reciprocal diagram **38**

4.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	38
4.2 Deriving dual mechanism to truss through reciprocal diagram	40
4.2.1 Steps for constructing a dual mechanism to a truss through reciprocal diagram	40
4.2.2 Example 1 for deriving a dual mechanism to a truss through reciprocal diagram	40
4.2.3 Example 2 for deriving a dual mechanism to a truss through reciprocal diagram	43
4.3 Deriving dual truss to a mechanism through reciprocal diagram	45
4.3.1 Steps for constructing a dual truss to a mechanism through reciprocal diagram	45
4.3.2 Example 1 for deriving a dual truss to a mechanism through reciprocal diagram	46
4.3.3 Example 2 for deriving a dual truss to a mechanism through reciprocal diagram	49

4.4 Summary of the chapter	51
-----------------------------------	-----------

<u>Chapter 5: Parallel drawing and duality</u>	<u>52</u>
---	------------------

5.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	52
5.2 Parallel drawing	54
5.2.1 Steps for constructing a parallel drawing	55
5.2.2 Example of a parallel drawing construction	56
5.3 Relation between parallel drawing and image velocity	58
5.4 Relation between reciprocal diagram and parallel drawing	59
5.5 Relation between parallel drawing and duality of trusses and mechanisms	61
5.6 Parallel drawing and Assur structure	62
5.7 Summary of the chapter	63

<u>Chapter 6: Dual mechanism to non planar truss</u>	<u>64</u>
---	------------------

6.1 Bow's notation technique and the duality between trusses and mechanisms	64
6.2.1 Bow's notation technique	64
6.2.2 Deriving a truss from a dual mechanism using Bow's notation technique	64
6.2.3 Example for deriving a dual mechanism to a non-planar truss through Bow's notation technique	66
6.2 Expanding of the face force technique to a non-planar mechanisms	67

<u>Chapter 7: Duality between pillar system and mechanism based on duality between flow line graph FLGR and potential line graph PLGR</u>	<u>69</u>
--	------------------

7.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	69
7.2 Flow line graph and representation of pillar system through it	71
7.2.1 Flow Line Graph Representation	71
7.2.2 Representation of pillar system through flow line graph	71
7.2.3 Steps for constructing a flow line graph to a pillar system	71
7.2.4 Example of constructing a flow line graph topology to a pillar system	72

7.3 Potential graph and representation of mechanisms through it	72
7.3.1 Potential Line Graph Representation	72
7.3.2 Representation of mechanism through potential line graph	72
7.3.3 Steps for constructing a potential line graph to a mechanism	73
7.3.4 Example of constructing a potential line graph topology to a mechanism	73
7.4 Duality between pillar systems and mechanisms based on duality between flow line graph and potential line graph	73
7.4.1 Duality between flow line graph and potential line graph	73
7.4.2 Duality between pillar systems and mechanisms	74
7.4.3 Face force of pillar system	74
7.4.4 Additional dual relations between mechanism and pillar system	75
7.4.5 Steps for constructing a dual pillar system from a mechanism	75
7.4.6 Example of constructing a dual pillar system from a mechanism	76
7.5 Summary of the chapter	77
<u>Chapter 8: Duality between variables from kinematics and statics</u>	<u>78</u>
8.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	78
8.2 Survey of known method for deriving instant centers in kinematic system	80
8.2.1 Steps for deriving instant centers	80
8.2.2 Example of deriving instant centers in a mechanism	80
8.3 Duality between instant centers and equimomental lines	83
8.4 Method for deriving equimomental lines in a static system	84
8.4.1 Steps for deriving equimomental lines	84
8.4.2 Example of deriving equimomental lines in a pillar system	84
8.5 Summary of the chapter	86
<u>Chapter 9: Spatial geometrical interpretation for equimomental line</u>	<u>87</u>
9.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	87

9.2 Survey of cross-section method for checking realizability of projection of a spatial polyhedron	89
9.2.1 Steps for constructing a cross-section	89
9.2.2 Example of a cross-section construction	91
9.3 Identity between cross-section diagram and equimomental lines	94
9.4 Interpretation of equimomental line in polyhedron and in line drawing that to be built on the projection	95
9.5 Relation between the dual Kennedy circle, equimomental lines in a framework and a polyhedron	97
9.6 Relation between instant centers, equimomental lines and polyhedron	98
9.7 Summary of the chapter	99

Chapter 10: Dual variable to face force in duality between

FLGR and PLGR based on duality that existence

in projective geometry **100**

10.1 Abstract of the chapter according to the flow diagram	100
10.2 Duality between frameworks and panel hinge structures	102
10.2.1 Statics of frameworks in projective geometry	102
10.2.2 Deriving polyhedron from a framework	102
10.2.3 Instantaneous kinematics of panel hinge structure in projective geometry	103
10.2.4 Deriving polyhedron from a panel hinge structure	104
10.2.5 Duality between frameworks and panel hinge structures in projective geometry	105
10.3 Dual variable to face force in duality between FLGR and PLGR	107
10.4 Summary of the chapter	109

Chapter 11: Duality between FLGR and PLGR from aspect

of screw theory **110**

11.1 Kinematics and statics from the aspect of the screw theory	110
11.2.1 Performance of kinematical system in screw theory	110
11.2.2 Transformation of force and moments system to an identical system in screw theory	112

11.2 Relation of duality between flow line graph and potential line graph to duality between Wrench and Twist	114
<u>Chapter 12: Summary, Conclusions and Further Research</u>	<u>115</u>
12.1 Summary	115
12.2 Conclusions and further research	116
<u>References</u>	<u>117</u>

Abstract

The issue of dualism was first reported in literature by Maxwell back in 1864, who discovered that for every truss in statics there exists another truss, termed *reciprocal*, while the rod length in the first corresponds to the magnitude of the force in the corresponding reciprocal rod and vice versa. Since then, a number of types of dualisms were developed and reported in many fields, such as Algebraic dualism, screw theory duality, the works of structural topology and more, where in the works of structural topology it has been reported on duality between systems in statics and kinematics using projective geometry.

In the last decade, a duality between structures in statics and kinematics has been developed with the entire mathematical foundation is stemming purely from graph theory.

In this thesis, two types of dualities, derived through graph theory representation, were investigated: duality between trusses and mechanisms and duality between pillar systems and mechanisms, all with respect to other published works.

In the thesis, it was found that there exists a relation between duality of trusses and mechanisms, and Maxwell's reciprocity. It was revealed that most of the reciprocals are actually a special type of structures that were reported in the Russian literature, known as *Assur* structures. The relations between the different dualities led to interesting results as reported in the thesis. For example, from the duality between trusses and mechanisms, new physical entities were received in the field of statics: *equimomental line* and *face force*. On the basis of the connection between spatial polyhedrons and the reciprocal structures, discovered by Maxwell, it was found that there exists a geometric meaning to equimomental lines and face forces, while the latter two are physical entities dual to instant centers and absolute velocities in kinematics, respectively. Moreover, on the basis of the *Bow's notation* method which was used by Maxwell, the duality between trusses and mechanisms has been extended, and now includes also non planar mechanisms. Therefore, the face force method is now applicable also in finding singular positions of non planar mechanisms. In the thesis, it was also discovered, that there exists a relation between methods developed by mathematicians who examined Maxwell's works and known methods in the mechanisms community. For example, the parallel drawing method used in rigidity theory community resembles to the image velocity method which is known in machine theory.

Another duality based on graph theory, which has been dealt with in the thesis, is the duality between pillar systems and mechanisms. It was found that there exists a tight relation between that duality and the duality in projective geometry, widely used in screw theory. Here also, the generalized view of duality led to new results, such as the face force in pillar systems.

To conclude, the generalized view of the duality led to a general comprehension of relations between different works which were done in the field, and revealing of new ones, receiving new meanings to previous results and extending methods and techniques that had already been developed. Furthermore, it was found that methods examined and developed in the thesis are applicable to integrated static and kinematic systems such as *tensegrity* deployable structures, and provide us with a general view on both kinematics (during deploying and folding) and statics (while the structure can sustain external loads).

TEL AVIV UNIVERSITY

The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering

General View on Duality of Statics and Kinematics

A thesis submitted toward the degree of
Master of Science in Mechanical Engineering

by

Svetlana Portnoy

This research was carried out in the Department of Solid Mechanics, Materials and Systems
under the supervision of Dr. Offer Shai

March, 2008

TEL AVIV UNIVERSITY

The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering

Department of Solid Mechanics, Materials and Systems

General View on Duality of Statics and Kinematics

A thesis submitted toward the degree of
Master of Science in Mechanical Engineering

by

Svetlana Portnoy

March, 2008