

УДК 532.5.011:536.252

ПОДАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

ГЕЛЬФГАТ А. Ю., ПЕРЕЦ И. В.

Для совершенствования некоторых технологических процессов, например выращивания монокристаллов, желательно управлять интенсивностью течения жидкости с целью влияния на тепло- и массообменные процессы. Для этого обычно используют вращение, наложение электромагнитного поля или создание условий пониженной гравитации [1].

В настоящей работе на примере простейших решений системы уравнений свободной конвекции в бесконечных вертикальных каналах показано, что задача снижения степени устойчивой (по плотности) стратификации жидкости с величиной факторов, вызывающих течение. Ниже рассматривается возможность использования температурной стратификации, однако все выводы полностью относятся и к концентрационной стратификации.

Рассмотрим неизотермическое течение в плоском слое, ограниченном плоскостями $x=\pm d$, на границах которого задается линейное распределение температуры; $T=kz$ ($x=-d$); $T=kz+T_0$ ($x=d$), где $k>0$ — параметр стратификации, $T_0>0$ — горизонтальный перепад температуры.

Свободная конвекция в приближении Буссинеска описывается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{Pr} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra T \mathbf{e}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \Delta T \quad (1)$$

$$T = z \quad (x = -1); \quad T = z + \frac{T_0}{kd} \quad (x = 1) \quad (2)$$

$$\int_0^1 v_z dx = 0 \quad (3)$$

Здесь $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, $Ra = g\beta kd^4/\nu\chi$ — число Рэлея, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность, g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения.

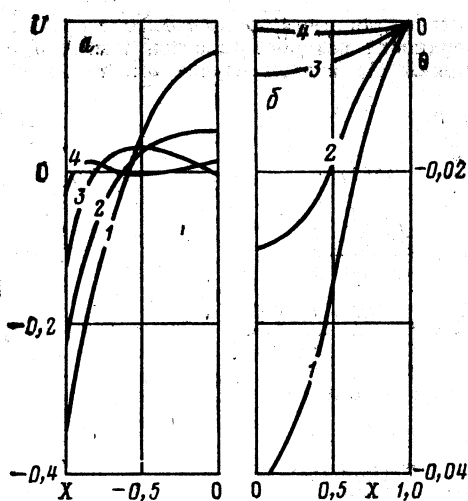
Если движение жидкости вызывается постоянными внешними силами, параллельными оси z , то решение имеет вид $\mathbf{v} = (0, 0, v_z(x))$, $T = z + f(x)$.

Естественная конвекция ($v_z(x=\pm 1)=0$) в такой системе хорошо исследована [2, 3]. В [2] показано, что с увеличением k скорость течения v_z уменьшается как $k^{-1/2}$ и изменяется характер неустойчивости свободноконвективного течения. Влияние устойчивой температурной стратификации на движение жидкости, обусловленное другими причинами, до сих пор не изучалось.

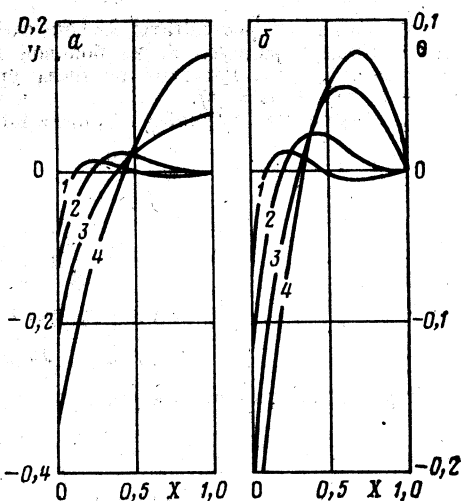
Рассмотрим конвективное течение, вызванное термокапиллярной силой. Пусть $T_0=0$ и

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \mp Ma \frac{\partial T}{\partial z} \quad (x = \pm 1); \quad Ma = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right| \frac{kd^2}{\nu\chi\rho} \quad (4)$$

где ρ — плотность, σ — коэффициент поверхностного натяжения, Ma — число Маран-



Фиг. 1



Фиг. 2

гони. Тогда решение задачи (1)–(4) имеет вид

$$v_z = \frac{Ma}{\gamma Ra} G_1(x), \quad f(x) = \frac{Ma}{\gamma Ra} G_2(x)$$

$$G_1(x) = \text{Im} \left[\bar{\alpha} \frac{\text{ch } \bar{\alpha} x}{\text{sh } \bar{\alpha}} \right], \quad G_2(x) = \text{Im} \left[\frac{\text{ch } \bar{\alpha} x - \text{ch } \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} \text{ sh } \bar{\alpha}} \right] \quad (5)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Ra}{4}} (1+i), \quad \bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{Ra}{4}} (1-i)$$

Проанализируем влияние температурной стратификации на полученное течение. Вместо увеличения параметра стратификации рассмотрим более общий случай – увеличение числа Рэлея Ra . При этом величины $G_1(x)$ и $G_2(x)$ остаются ограниченными, а v_z и $f(x)$ стремятся к нулю как $MaRa^{-1/4}$ и $MaRa^{-1/4}$ соответственно.

На фиг. 1, а показаны $u = v_z/Ma$, а на фиг. 1, б – $\theta = f(x)/Ma$ при числах Рэлея $Ra = 0, 100, 10^3, 10^4$ (кривые 1–4). Начиная с $Ra = 10^4$ течение вытесняется к границе слоя, а в центральной части слоя скорость колеблется около значения $v_z = 0$, причем число корней функции $v_z(x)$ растет как $Ra^{1/4}$. Среднеквадратичное значение скорости

$$\langle v \rangle = \int_0^1 |v_z|^2 dx$$

убывает как $MaRa^{-1/4}$.

Рассмотрим случай, когда плоскости $x = \pm 1$ движутся с постоянной скоростью W , т. е. при $x = \pm 1$ $v_z = -W$, однако вертикальный градиент температуры остается неизменным и выполняется условие замкнутости потока (3). Тогда при $T_0 = 0$ имеем

$$v_z = W \frac{\text{Im}[\bar{\alpha} \text{sh } \alpha \text{ch } \bar{\alpha} x]}{\text{Im}[\alpha \text{sh } \bar{\alpha} \text{ch } \alpha]} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{W}{\gamma Ra} \frac{\text{Im}[\bar{\alpha} \text{sh } \alpha (\text{ch } \bar{\alpha} x - \text{ch } \bar{\alpha})]}{\text{Im}[\alpha \text{sh } \bar{\alpha} \text{ch } \alpha]} \quad (7)$$

Здесь увеличение числа Рэлея не влияет на максимальное значение скорости, так как скорость жидкости на границах фиксирована. Однако среднеквадратичное значение скорости убывает как $W Ra^{-1/4}$. Функция $f(x)$ аналогично предыдущим случаям уменьшается как $W Ra^{-1/4}$.

На фиг. 2 показано, как изменяются величины $u = v_z/W$ и $\theta = f(x)/W$ при увеличении числа Рэлея $Ra = 10^4, 10^3, 100, 0$ (кривые 1–4). С ростом Ra течение вытесняется к границе. При этом, как следует из фигуры, скорость в центральной части слоя уменьшается быстрее, чем в предыдущем примере. Таким образом, и в этом случае эффект подавления течения имеет место.

Аналогичные результаты можно получить и для прямого кругового вертикального цилиндра радиуса d , на боковой поверхности которого задается температура $T=kz$, при $(r=d)$. Решение системы уравнений (1) в этом случае имеет вид $v=(0, 0, v_z(r))$, $T=z+f(r)$.

Для термокапиллярной конвекции получаем

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\text{Ma} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (r=1)$$

$$v_z = \frac{\text{Ma}}{2\beta} \left[\frac{J_0(\beta r)}{J_1(\beta)} + i \frac{J_0(i\beta r)}{J_1(i\beta)} \right] \quad (8)$$

$$f(r) = \frac{\text{Ma}}{2\beta^3} \left[\frac{J_0(\beta) - J_0(\beta r)}{J_1(\beta)} + i \frac{J_0(i\beta) - J_0(i\beta r)}{J_1(i\beta)} \right] \quad (9)$$

Если на поверхности цилиндра задана скорость, то имеем

$$v_z = -W \quad (r=1)$$

$$v_z = -W \frac{J_1(\beta) J_0(i\beta r) + i J_1(i\beta) J_0(\beta r)}{J_1(\beta) J_0(i\beta) + i J_1(i\beta) J_0(\beta)} \quad (10)$$

$$f(r) = \frac{W}{\beta^3} [J_1(i\beta) (J_0(\beta r) - J_0(\beta)) - J_1(\beta) (J_0(i\beta r) - J_0(i\beta))] (J_1(\beta) J_0(i\beta) + i J_1(i\beta) J_0(\beta))^{-1}$$

где $\beta = \sqrt[4]{\text{Ra}}$, J_0 , J_1 — функции Бесселя.

Значения (8)–(9) и (10)–(11) также могут подавляться путем наложения устойчивой температурной стратификации. При этом сохраняются полученные выше выводы: $f(r)$ (9), (18) убывает пропорционально $\text{Ra}^{-1/4}$; $v_z(r)$ в случае термокапиллярной (8) конвекции убывает как $\text{MaRa}^{-1/4}$; число корней функции в обоих случаях растет как $\text{Ra}^{1/4}$. Среднеквадратичное значение скорости убывает как $\text{MaRa}^{-1/4}$ и $W \text{Ra}^{-1/4}$ соответственно для (8) и (11).

Аналогичные результаты также можно получить, рассматривая вертикальный цилиндрический слой с радиальным перепадом температуры, движущимися поверхностями и термокапиллярной силой на одной или обеих поверхностях.

Отметим, что из (5), (7), (9) и (11) следует: $f'(1)=0$.

Это значит, что выводы справедливыми и в случае, когда на боковой поверхности ставится условие теплообмена по Ньютону или условие Стефана — Больцмана.

Приведенные выше примеры показывают, что устойчивая (по плотности) стратификация жидкости приводит к подавлению не только естественных термоконвективных течений, то и течений, вызванных любыми другими факторами.

Авторы благодарят Б. Я. Мартузана за ценные указания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Острач. Влияние гидродинамики на рост кристаллов. Фримановская лекция. // Тр. амер. о-ва, инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов. 1983. Т. 105. № 1. С. 89–107.
2. Bergholz R. F. Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer. // J. Fluid Mech. 1978. V. 84. № 4. P. 743–768.
3. Nielsen H. B., True H. Numerical investigation of the 3-dimensional stability of a convective flow in a slot. — In: Boundary and Inter. Layers Comput. — Asympt. Meth. Proc. BAIL 1 Conf., Dublin, 1980. Dublin, 1980, p. 381–386.