

УДК 536.25

А. Ю. Гельфгат

ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ И НАПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

В настоящее время большое внимание уделяется изучению колебательных режимов конвективных течений. В частности, представляет интерес возможность воздействия на пульсации конвективного потока проводящей жидкости магнитным полем. Этой проблеме посвящены работы [1—5], в которых изучалось влияние магнитного поля на стационарные и колебательные конвективные течения в различных системах, подогреваемых снизу. Более сложными для анализа являются системы, нагреваемые сбоку, так как в этом случае необходимо исследовать устойчивость стационарных течений, возникающих при сколь угодно малой разнице температур. Влияние магнитного поля на такие течения в стационарном случае исследовалось в [6, 7]. В настоящей работе приводятся результаты расчетов порога колебательной неустойчивости и колебательных режимов конвекции жидкости в помещенной в постоянное однородное горизонтальное или вертикальное магнитное поле квадратной полости, вертикальные стенки которой имеют разные температуры.

Течение описывается безразмерной системой уравнений свободной конвекции (приближение Обербека—Буссинеска), в которой электромагнитная сила учитывается в безындукционном приближении

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Gr} \Theta \mathbf{e}_y + \text{Ha}^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \partial \Theta / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \Theta = \Delta \Theta / \text{Pr} \quad (2), (3)$$

с граничными условиями

$$\Theta|_{x=0} = 1; \quad \Theta|_{x=1} = \Theta'_y|_{y=0,1} = 0; \quad \mathbf{v}|_{x=0,1} = \mathbf{v}|_{y=0,1} = 0, \quad (4)$$

где Θ — температура, $\text{Pr} = \nu / \alpha$ — число Прандтля, α — температуропроводность. В качестве характерного размера выбрана длина полости. Остальные обозначения общепринятые.

Решение задачи ищется в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{M_1} c_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y); \quad \Theta = (1-x) + \sum_{i,j=0}^{M_2} d_{ij}(t) g_{ij}(x, y) \quad (5)$$

методом Галеркина. Координатные функции g_{ij} и φ_{ij} строятся из линейных комбинаций полиномов Чебышева 1-го и 2-го родов $T_i(x)$ и $U_j(x)$:

$$g_{ij}(x, y) = (T_i(x) + \alpha_i T_{i+2}(x)) (T_j(y) + \beta_j T_{j+2}(y)), \quad (6)$$

$$\varphi_{ij}(x, y) = \left(\begin{array}{l} \sum_{l=0}^4 \frac{f_{li}}{2i} T_{i+l}(x) \sum_{l=0}^4 q_{lj} U_{j+l-1}(y) \\ - \sum_{l=0}^4 f_{li} U_{j+l-1}(x) \sum_{l=0}^4 \frac{q_{lj}}{2j} T_{j+l}(y) \end{array} \right). \quad (7)$$

Табл. 1

Число Гартмана	Максимальное значение функции тока		Число Гартмана	Максимальное значение функции тока	
	вертикальное поле	горизонтальное поле		вертикальное поле	горизонтальное поле
0	462	462	100	106	107
10	429	428	150	54,8	51,3
25	341	335	200	31,1	29,3
50	229	229	300	14,1	13,5
75	151	163	500	5,19	5,04

Коэффициенты α_i , β_i , f_{ii} , q_{ij} выбираются так, чтобы удовлетворить всем однородным граничным условиям. Такой выбор координатных функций позволяет исключить давление из уравнений Навье—Стокса и свести задачу (1)—(4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dX_i/dt = a_{ij}X_j(t) + b_{ijk}X_j(t)X_k(t) + F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

где $X_i(t)$ — один из коэффициентов c_{ij} или d_{ij} . Более подробно применяемый вариант метода Галеркина изложен в [8].

Расчеты проводились для шести координатных функций ($M_1 = M_2 = 5$) по каждому направлению ($N = 72$). Ограничения на M_1 и M_2 связаны с размером трехмерной матрицы b_{ijk} , содержащей N^3 чисел. Однако и при таком (сравнительно небольшом) числе координатных функций можно получать достаточно точные результаты. Кроме того, возможность подробного исследования устойчивости неподвижных точек и сравнительно быстрого численного интегрирования по времени системы (8) позволяет сделать ряд качественных выводов, недоступных для многомодовых методов конечных разностей или конечных элементов. Все расчеты проводились для $Pr = 0,02$, характерного для жидких металлов и полупроводников.

Неподвижные точки системы (8), соответствующие стационарным решениям системы (1)—(4), определялись методом Ньютона.

В табл. 1 показано, как изменяется максимальное значение функции тока ψ ($v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = \partial\psi/\partial x$) в вычисленных неподвижных точках при увеличении магнитного поля в случае $G_r =$

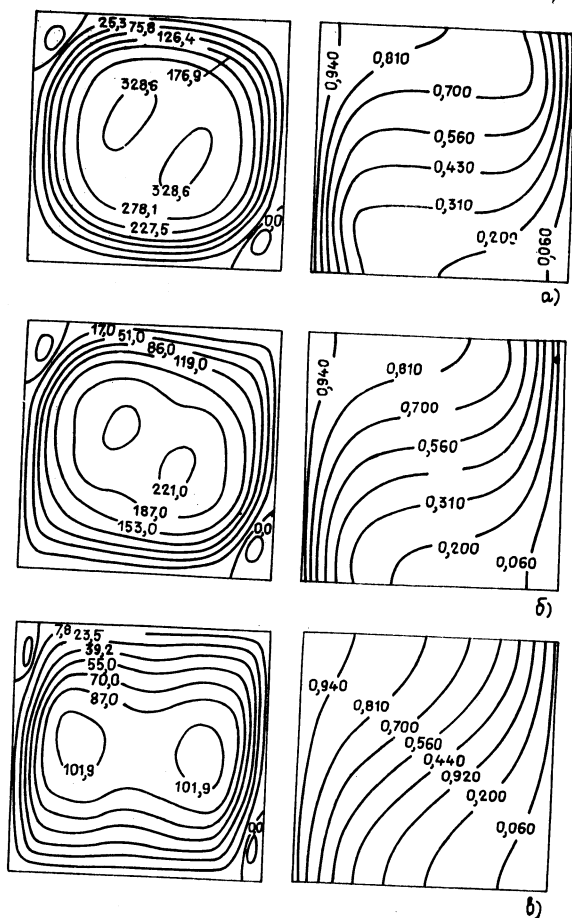


Рис. 1.

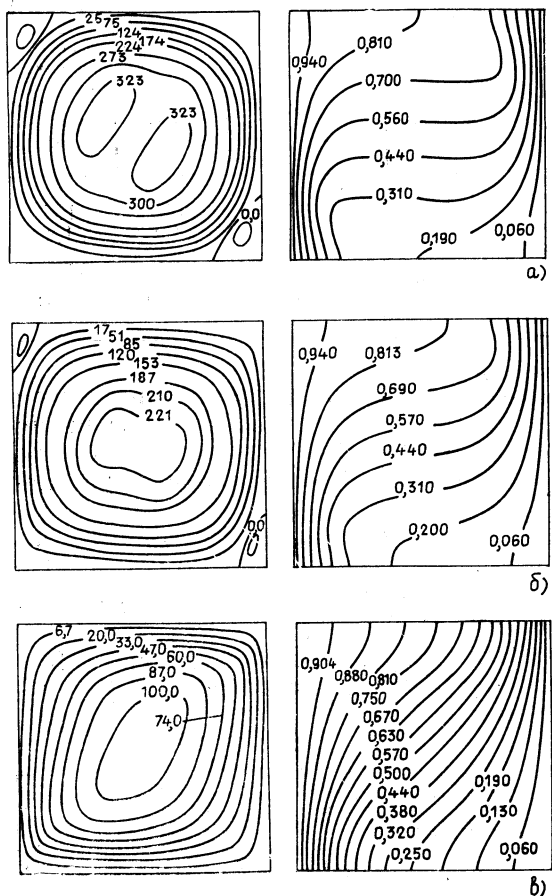


Рис. 2.

ных точек системы (8) относительно бесконечно малых возмущений сводится к определению критического значения числа Грасгофа, при котором хотя бы одно собственное значение матрицы Якоби системы (8), вычисленной в соответствующей неподвижной точке, имело неотрицательную вещественную часть. Вычисления, проводившиеся с помощью программы BIFOR2 [9], показали, что такие собственные значения появляются комплексно сопряженными парами, что свидетельствует о колебательной неустойчивости стационарного решения (1)–(4) [1, 9].

На рис. 3а изображена нейтральная кривая, показывающая зависимость критического числа Грасгофа от числа Гартмана в вертикальном (сплошная) и горизонтальном (штриховая линия) магнитных полях. Ниже, на рис. 3б, показана соответствующая зависимость безразмерной частоты колебаний течения в критической точке от числа Гартмана. Нейтральные кривые состоят из двух частей, определяемых различными собственными значениями матрицы Якоби. Левый участок кривых при $0 < \text{Ha} < 12$ соответствует неустойчивости свободноконвективного течения в слабом магнитном поле, которое оказывает мало-существенное влияние на характер и устойчивость движения. Правые ветви нейтральных кривых при $\text{Ha} > 12$ описывают те режимы, для которых влияние магнитного поля является определяющим. При этом небольшое увеличение ($12 < \text{Ha} < 30$) магнитного поля скачком изменяет частоту колебательного течения (рис. 3б), а следовательно, и структуру нестационарного потока. При $\text{Ha} > 30$ начинается быстрый рост критического числа Грасгофа.

$= 10^7$. Из представленных результатов видно, что интенсивность конвективного потока слабо зависит от направления магнитного поля: наибольшее отличие максимального значения ψ при $\text{Ha} = 75$ составляет около 8%. С другой стороны, сильные магнитные поля по-разному влияют на структуру конвективного течения. На рис. 1 и 2 показаны линии тока (слева) и изотермы (справа) для $\text{Gr} = 10^7$ и $\text{Ha} = 25, 50, 100$ (соответственно позиции а, б, в) в вертикальном (рис. 1) и горизонтальном (рис. 2) магнитном поле. Как видно из рисунков, увеличение числа Гартмана в горизонтальном магнитном поле приводит к слиянию двух максимумов функции тока в ядре течения, а в вертикальном поле расстояние между максимумами функции тока увеличивается.

Задача исследования устойчивости неподвижных

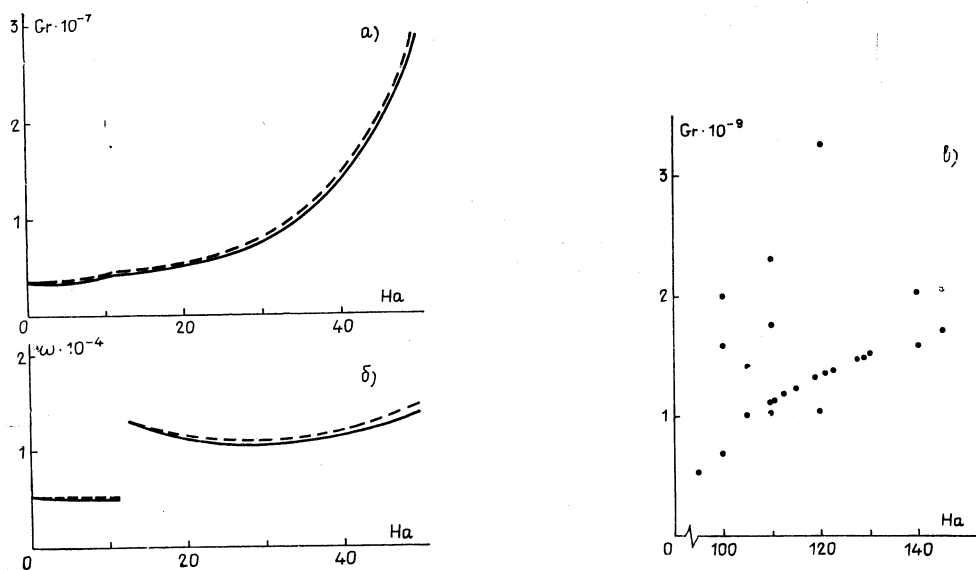


Рис. 3.

Указанный скачок частоты осциллирующего конвективного течения при увеличении числа Гартмана может быть использован в качестве критерия для экспериментальной проверки полученных результатов. Кроме того, как видно из рис. 3, направление магнитного поля очень слабо влияет на значения критического числа Грасгофа и частоту колебаний течения. Указанный факт является важным качественным выводом и также легко поддается экспериментальной проверке. Более сильное подавление колебательной неустойчивости горизонтальным магнитным полем может быть объяснено неодинаковым взаимодействием полей различной ориентации с течением в пограничном слое, расположенном у вертикальных стенок полости.

Дальнейшее увеличение числа Гартмана ($Ha > 70$) при фиксированных G_r и R_g приводит к появлению нескольких слабо различающихся между собой неподвижных точек системы уравнений (8). Это означает, что в сильных магнитных полях при достаточно большом числе Грасгофа существует несколько близких ветвей стационарных решений задачи (1)–(4), каждой из которых при фиксированных значениях R_g и Ha соответствует некоторое критическое значение числа Грасгофа. Появление одного из стационарных или колебательных режимов в этом случае зависит от истории процесса. Этот факт иллю-

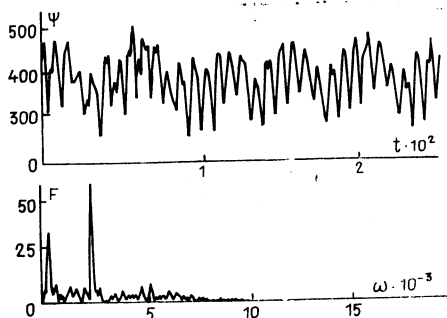


Рис. 4.

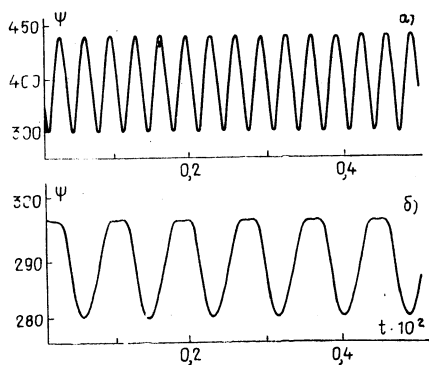


Рис. 5.

Табл. 2

Ha	Вертикальное поле				Горизонтальное поле			
	$\psi_{\text{ср}}$	$\theta_{\text{ср}}$	A_{ψ}	A_{θ}	$\psi_{\text{ср}}$	$\theta_{\text{ср}}$	A_{ψ}	A_{θ}
10	320	0,316	0,181	0,139	389	0,310	0,133	0,041
20	311	0,298	0,128	0,036	307	0,298	0,130	0,035
30	255	0,293	0,085	0,032	242	0,292	0,099	0,034
40	210	0,305	0	0	190	0,302	0	0

Табл. 3

Ha	Вертикальное поле				Горизонтальное поле			
	$\psi_{\text{ср}}$	$\theta_{\text{ср}}$	$A_{\psi} \cdot 10^{-2}$	$A_{\theta} \cdot 10^{-1}$	$\psi_{\text{ср}}$	$\theta_{\text{ср}}$	$A_{\psi} \cdot 10^{-2}$	$A_{\theta} \cdot 10^{-1}$
10	484	0,5	1,42	0,133	530	0,5	0,117	0,195
20	430	0,5	0,096	0,179	430	0,5	0,095	0,177
30	341	0,5	0,045	0,126	346	0,5	0,045	0,129
40	280	0,5	0	0	288	0,5	0	0

стрируется рис. 3а, на котором показаны вычисленные точки потери устойчивости различными стационарными режимами при $Ha > 100$ в вертикальном магнитном поле. Следует отметить, что согласно рис. 3 некоторые из стационарных режимов, показанных в табл. 1 и на рис. 1 и 2, являются неустойчивыми или неединственными и поэтому отражают лишь общий характер изменения конвективных течений при увеличении магнитного поля.

Исследование колебательных режимов проводилось для случая $Gr = 10^7$ и $P_r = 0,02$ в магнитных полях, различных по величине и направлению. В отсутствие магнитного поля при указанных значениях параметров наблюдаются аperiodические колебания конвективного течения. На рис. 4 показаны колебания функции тока в точке с координатами (0,25; 0,25) и ниже — плотность частотного спектра этих колебаний. При наложении слабого магнитного поля с $Ha = 10$ колебания становятся периодическими и их амплитуда уменьшается. Этот факт иллюстрируется рис. 5, на котором показаны колебания функции тока в той же точке при $Ha = 10$ (а — в вертикальном и б — в горизонтальном магнитном поле). Как видно из рисунка, колебательные режимы конвекции в магнитных полях разной ориентации существенно различаются. В то же время из линейного анализа устойчивости (рис. 3а, б) следует, что вблизи точки потери устойчивости колебания течения в различно направленных полях происходят с близкими частотами.

В табл. 2 и 3 приведены средние значения и относительные амплитуды колебаний

$$A_f = |f_{\text{max}} - f_{\text{min}}| / |f_{\text{max}} + f_{\text{min}}| \quad (9)$$

функции тока и температуры в различных магнитных полях для точек с координатами $x = 0,25$; $y = 0,25$ — в табл. 2 и $x = 0,5$; $y = 0,5$ — в табл. 3. Из этих результатов следует, что при $Ha > 20$ средние значения функций и амплитуды колебаний в горизонтальном и вертикальном магнитных полях становятся близкими, что подтверждает выводы, полученные при линейном анализе устойчивости стационарных течений. В слабых магнитных полях при $Ha < 20$, как уже указывалось ранее, характеристики колебательных режимов конвекции зависят и от направления магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М., 1972. — 392 с.
2. Proctor M. R. E., Weiss N. O. Magnetoconvection // Rep. Prog. Phys. — 1982. — Vol. 45. — P. 1317—1379.
3. Fauve S., Laroche C., Libchaber A. Horizontal magnetic field and the oscillatory instability onset // J. Phys. lettres. — 1984. — N 45. — P. L-101—L-105.
4. Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л., Шлиомис М. И. Монотонные и колебательные режимы конвекции проводящей среды в магнитном поле // Магнит. гидродинамика. — 1975. — № 4. — С. 22—30.
5. Шлиомис М. И. О колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28, № 4. — С. 678.—683.
6. Секи М., Кавамура Х., Санокава К. Свободная конвекция ртути в магнитном поле, параллельном вектору силы тяжести // Теплопередача. — 1979. — № 2. — С. 45—51.
7. Oreper G. M., Szekely J. The effect of an externally imposed magnetic field on buoyancy driven flow in a rectangular cavity // J. Cryst. Growth. — 1983. — Vol. 64. — P. 505—515.
8. Гельфгат А. Ю. Вариационный метод решения задач динамики вязкой жидкости в прямоугольных областях // Прикладные задачи математической физики. — Рига, 1987. — С. 14—24.
9. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М., 1985. — 280 с.

Поступила в редакцию 10.06.87