

УДК 536.25

А. Ю. Гельфгат

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ СТРУКТУРУ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

В работах [1...5] изучалось влияние магнитного поля на термогравитационные конвективные течения неоднородно нагретой жидкости в условиях, характеризующихся подводом тепла снизу. Более сложный случай — подогрев сбоку — рассмотрен в работе [6], посвященной исследованию влияния постоянного однородного магнитного поля на устойчивость стационарных и развитие нестационарных режимов свободной конвекции электропроводящей жидкости в нагреваемой сбоку квадратной полости. Было показано, что воздействием магнитного поля на исследуемое свободноконвективное течение можно повысить порог устойчивости стационарных режимов конвекции, regularизовать или подавить автоколебания конвективного течения. Однако вопрос об изменении пространственной структуры колебательных конвективных течений под действием магнитного поля не рассматривался.

В настоящей работе изложены результаты исследований влияния постоянного однородного магнитного поля на пространственную структуру наиболее опасного бесконечно малого возмущения, вызывающего неустойчивость стационарного конвективного течения; усредненных и пульсационных составляющих закритических конвективных течений; траекторий жидких частиц, определяющихся колебательными режимами конвекции. Изучение воздействия магнитного поля на различные пространственные свойства колебательных конвективных течений позволяет установить в частности качественно и количественно аналогичные изменения пространственной структуры конвективных течений, происходящие при увеличении числа Гартмана или уменьшении числа Грасгофа, а также при увеличении числа Гартмана или числа Прандтля.

Как и в работе [6], рассматривается задача о термогравитационной конвекции в квадратной области, помещенной в постоянное однородное магнитное поле. Течение описывается системой уравнений свободной конвекции в приближении Обербека—Буссинеска, в которой электромагнитная сила учитывается в безындукционном приближении:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Gr \theta \mathbf{e}_y + Ha^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad \partial \theta / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \theta = \Delta \theta / Pr. \quad (2), (3)$$

Здесь θ — температура; $\theta_0 - \theta_1$ — характерная разность температур; B_0 — характерное значение индукции внешнего магнитного поля; l — длина области; $Gr = g\beta(\theta_0 - \theta_1)l^3/\nu^2$; $Pr = \nu/\chi$; $Ha = B_0 l \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ — числа Грасгофа, Прандтля и Гартмана соответственно; остальные обозначения общепринятые. Рассматривается область с четырьмя твердыми границами. На вертикальных границах задаются постоянные и различные значения температуры, горизонтальные границы считаются теплоизолированными;

$$\mathbf{v}(x=0; 1) = \mathbf{v}(y=0; 1) = 0; \quad \theta(x=0) = 1; \quad \theta(x=1) = 0; \quad \theta'_y(y=0, 1) = 0. \quad (4)$$

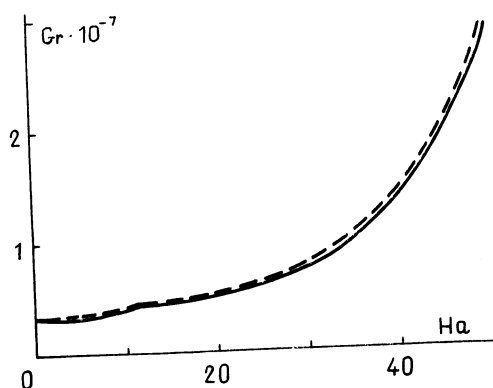


Рис. 1.

водностью (жидкие металлы и полупроводники), для которых $C_p \approx 10^2$ Дж/(кг·К), $\beta \approx 10^{-3}$ К $^{-1}$. При $l \leq 1$ м величина D^* — порядка 10^{-4} или меньше. В наших расчетах $Na \leq 10^2$, $Gr \geq 10^6$, следовательно, $D \leq 10^{-6}$, и поэтому в уравнении (3) членом, описывающим джоулеву диссипацию, можно пренебречь.

Для решения задачи (1)...(4) используется вариант метода Галеркина, численная реализация которого подробно описана в [7]. Решение задачи (1)...(4) ищется в виде

$$v = \sum_{i,j=0}^N c_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y); \quad \theta = (1-x) + \sum_{i,j=0}^K d_{ij}(t) g_{ij}(x, y), \quad (5)$$

где функции φ_{ij} и g_{ij} образуют базисы в соответствующих функциональных пространствах; c_{ij} и d_{ij} — неизвестные, зависящие от времени коэффициенты. В результате применения метода Галеркина задача (1)...(4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dX_l/dt = a_{lk}X_k + b_{lmk}X_mX_k + f_l, \quad (6)$$

где X_l — один из коэффициентов c_{ij} или d_{ij} .

Тестовые расчеты, иллюстрирующие работоспособность используемого в настоящей работе численного метода при решении системы уравнений конвекции в прямоугольных областях, подробно описаны в [8]. Получено хорошее совпадение с результатами работы [9] при исследовании устойчивости стационарного конвективного течения арсенида галлия ($Pr = 0,015$) в нагреваемой сбоку прямоугольной полости с отношением длины к высоте, равным 4. Как и в [6], в настоящей работе расчеты проводились для $Pr = 0,02$, характерного для жидких металлов и полупроводников, при шести координатных функциях по каждому пространственному направлению. Число координатных функций сильно ограничено производительностью используемого компьютера (расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1060), однако, как показано в [8], и столь небольшое число соответствующим образом построенных пространственных мод позволяет получить вполне удовлетворительные результаты.

Устойчивость стационарных решений задачи (1)...(4) определяется устойчивостью соответствующего стационарного решения системы (6). В результате исследований устойчивости стационарных конвективных течений, которые проведены в [6] с помощью вычисления собственных значений матрицы Якоби системы (6), получены нейтральные кривые

Джоулева диссипация тепла описывается слагаемым $\sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 / C_p \rho$ в уравнении переноса температуры, где C_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении. После обезразмеривания, используемого для получения системы уравнений (1)...(3) (см. [1]), коэффициент при указанном слагаемом становится равным $D = \sigma v B_0^2 / [C_p \rho (\theta_0 - \theta_1)] = D^* Na^2 / Gr$, где $D^* = g \beta l / C_p$. Основной интерес в изучаемой проблеме представляют конвективные течения жидкостей с относительно большой электропро-

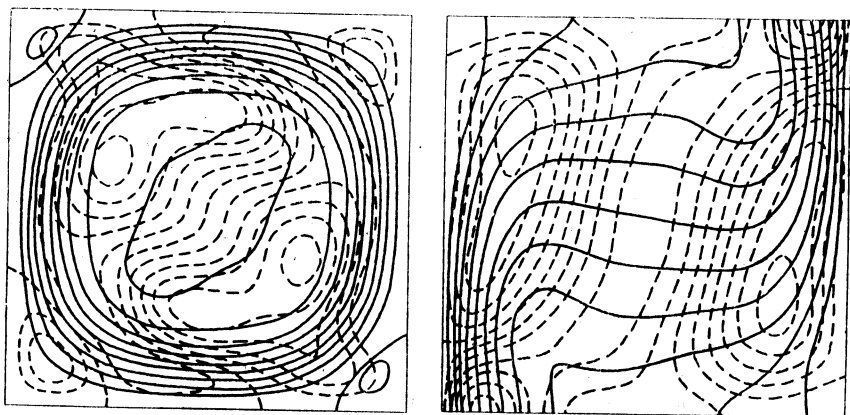
$Gr(Na)$ (рис. 1), показывающие зависимость критического числа Грасгофа от числа Гартмана в случае вертикального (сплошная линия) или горизонтального (штриховая линия) магнитного поля. Нейтральные кривые состоят из двух гладких участков с изломом при $Na \approx 12$. В точке излома нейтральных кривых происходит скачкообразное изменение физического механизма, вызывающего колебательную неустойчивость конвективного течения. Определенное представление о механизмах конвективной неустойчивости дает анализ структуры наиболее опасного бесконечно малого возмущения, которое определяется собственным вектором системы (6), вычисленным при критических значениях параметров и соответствующим собственному значению с неотрицательной вещественной частью. Значения коэффициентов c_{ij} и d_{ij} , равные значениям соответствующих компонент собственного вектора системы (6), совместно с формулами (5) определяют с точностью до умножения на константу наиболее опасные возмущения скорости и температуры. На рис. 1, 2 показаны линии тока и изотермы конвективных течений при критических значениях числа Грасгофа (сплошные линии) и изолинии наиболее опасных бесконечно малых возмущений функции тока и температуры (штриховые линии). В момент возникновения колебательной неустойчивости конвективное течение состоит из суммы изображенного сплошными линиями (см. рис. 2) постоянного слагаемого и изображенной штриховыми линиями пульсирующей части с экспоненциально растущей амплитудой. На рис. 2а и б показаны результаты для $P_r = 0,02$ и чисел Гартмана и Грасгофа, принадлежащих различным гладким участкам нейтральной кривой — $Na = 10$, $Gr = 4,3 \cdot 10^6$ (см. рис. 2а) и $Na = 20$, $Gr = 5,3 \cdot 10^6$ (см. рис. 2б). На рис. 2в изображены результаты для случая отсутствия магнитного поля ($Na = 0$) при $P_r = 0,04$, $Gr = 2,5 \cdot 10^6$. Как видно из рис. 2а,б, изолинии наиболее опасных возмущений при $Na = 10$ и 20 различаются качественно. Изменение пространственной структуры наиболее опасного возмущения происходит скачкообразно при переходе через излом нейтральной кривой при $Na \approx 12$. В то же время сопоставление рис. 2б и в показывает, что изолинии наиболее опасных возмущений в этих двух случаях имеют одинаковую форму. Это означает, что неустойчивость конвективного течения при увеличении числа Гартмана и при увеличении числа Прандтля вызывается аналогичными физическими механизмами.

Результаты исследования устойчивости рассматриваемого конвективного течения в отсутствие магнитного поля изложены в [10]. Обнаруженная аналогия между увеличением чисел Гартмана и Прандтля позволяет сделать вывод о возможности моделирования обнаруженных в [10] эффектов, связанных с непрерывным увеличением числа Прандтля, посредством изучения движения токопроводящей жидкости с неизменяющимися свойствами в постоянно увеличивающемся магнитном поле.

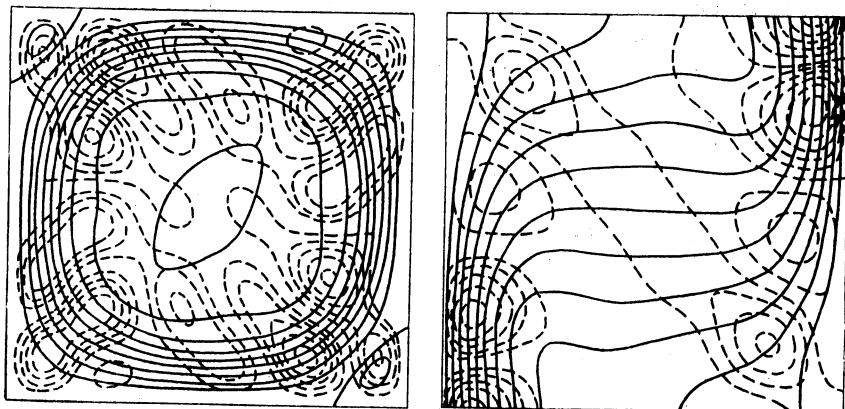
Анализ свойств полученных в процессе нестационарных расчетов автоколебательных режимов конвекции проводился следующим образом: значения коэффициентов $c_{ij}(t)$ и $d_{ij}(t)$ сохранялись в моменты времени t_n через равные интервалы Δt . После накопления информации в $2M$ точках коэффициенты $c_{ij}(t)$ и $d_{ij}(t)$, являющиеся компонентами вектора $X_k(t)$, с помощью быстрого преобразования Фурье аппроксимировались тригонометрическими суммами вида

$$X_k(t) = \bar{X}_k^0 + \sum_{l=1}^{M-1} \left[\bar{X}_k^l \cos \frac{2\pi l}{L} t + \bar{X}_k^l \sin \frac{2\pi l}{L} t \right], \quad (7)$$

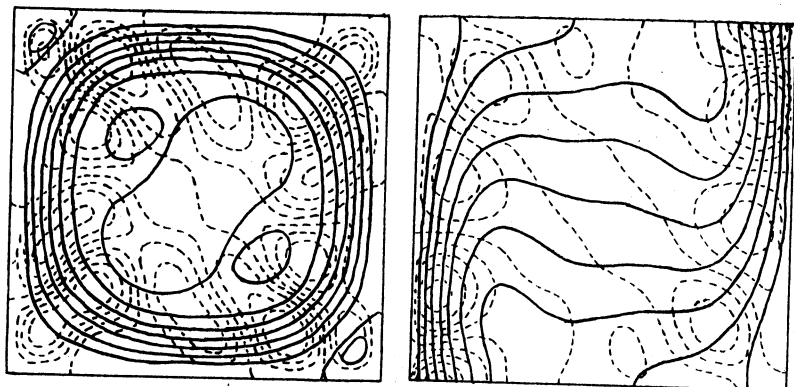
где $L = 2M\Delta t$ — интервал времени, на котором проведены расчеты. В описываемых расчетах разложение (7) проводилось с использованием 512 точек ($M = 256$).



а



б

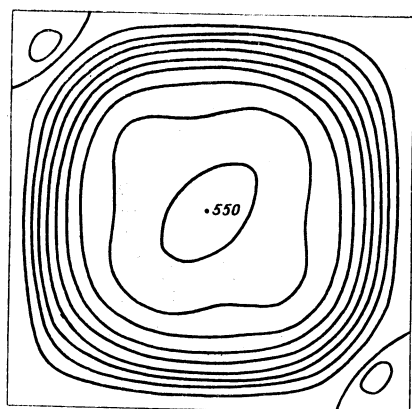


в

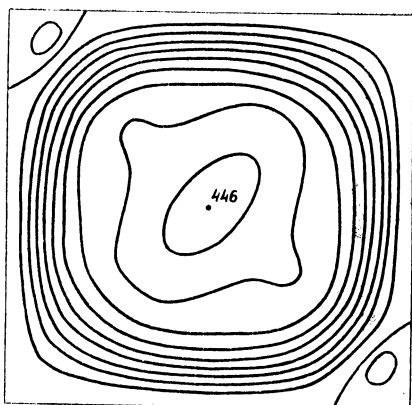
Рис. 2.

Усреднение по интервалу времени L приводит к следующим выражениям для усредненной $(\bar{v}, \bar{\theta})$ и пульсационной (v', θ') составляющих движения:

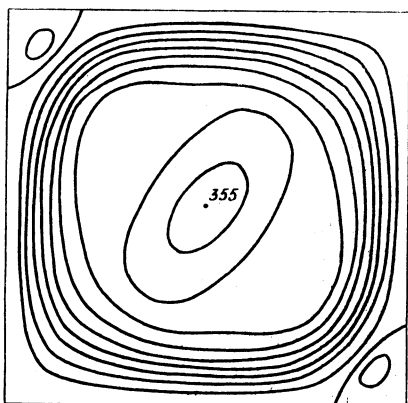
$$\bar{v} = \sum_{i,j=0}^N \tilde{c}_{ij}^0 \varphi_{ij}(x, y); \quad \bar{\theta} = (1-x) + \sum_{i,j=0}^K \tilde{d}_{ij}^0 g_{ij}(x, y); \quad (8), (9)$$



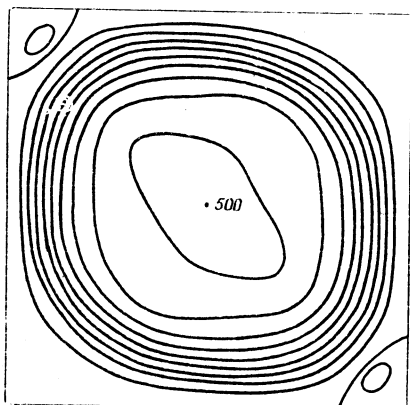
a



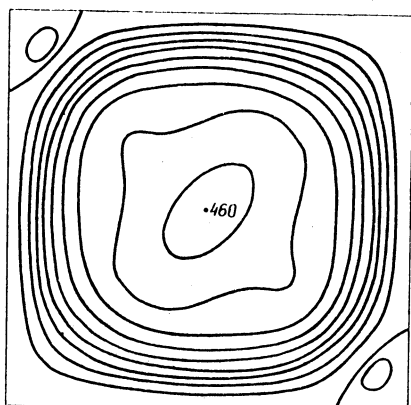
б



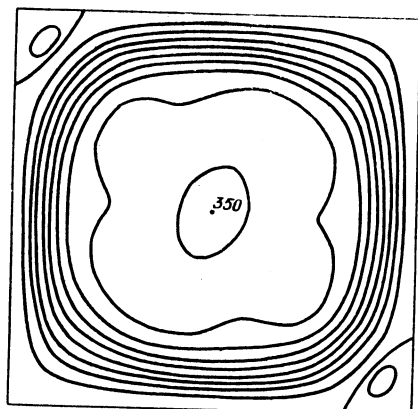
в



г



д



е

Рис. 3.

$$v' = \sum_{i,j=0}^N \sum_{l=1}^{M-1} \left[\tilde{c}_{ij}{}^l \cos \frac{2\pi l}{L} t + \hat{c}_{ij}{}^l \sin \frac{2\pi l}{L} t \right] \varphi_{ij}(x, y); \quad (10)$$

$$\theta' = \sum_{i,j=0}^K \sum_{l=1}^{M-1} \left[\tilde{d}_{ij}{}^l \cos \frac{2\pi l}{L} t + \tilde{a}_{ij}{}^l \sin \frac{2\pi l}{L} t \right] g_{ij}(x, y). \quad (11)$$

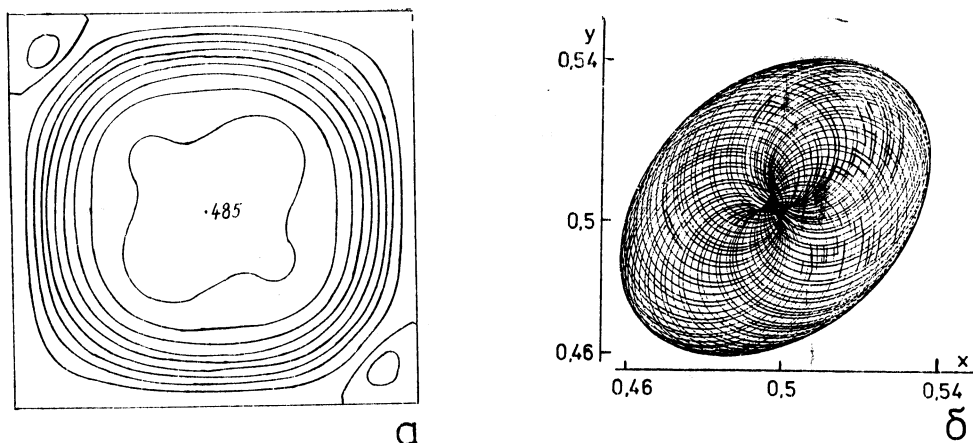
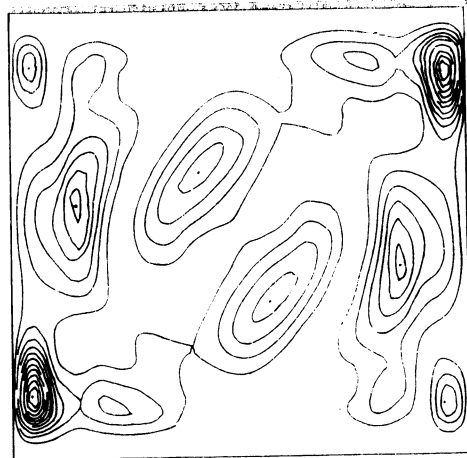
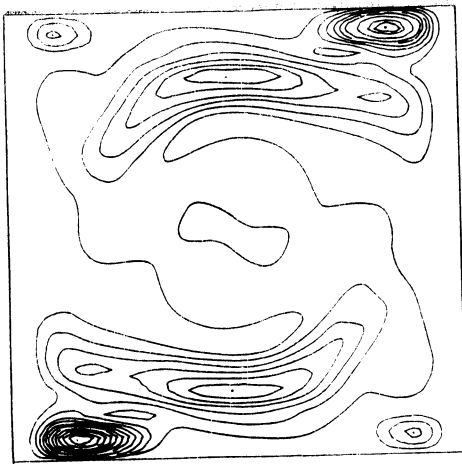


Рис. 4.

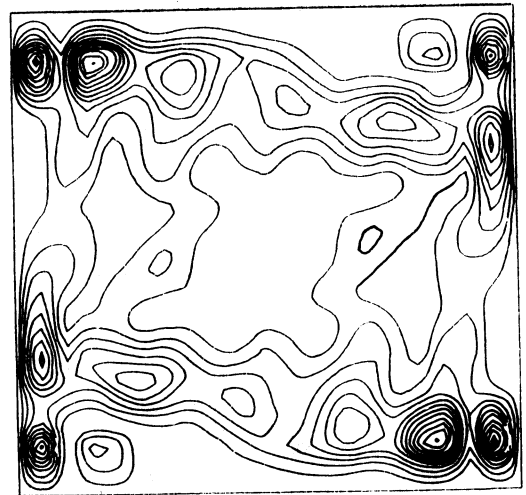
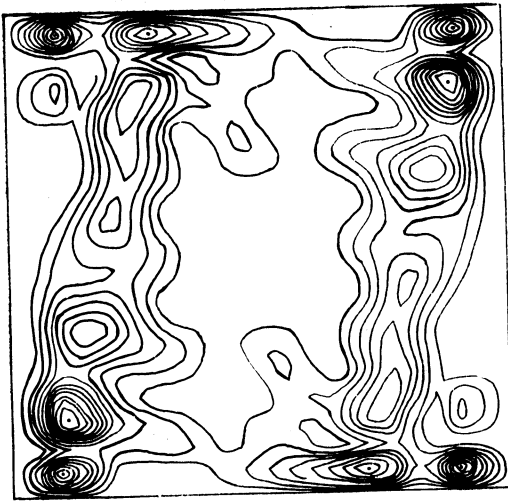
Таким образом, Фурье-разложение (7) позволяет получить явные выражения для пульсационной и усредненной составляющих течения. Выражения для среднеквадратичных пульсаций $\overline{v'^2}$ и $\overline{\theta'^2}$, а также для других моментов второго и более высоких порядков, можно получить из (10), (11) непосредственным интегрированием по времени.

Анализ временной структуры колебаний конвективного течения, проведенный в [6], показал, что нелинейное развитие колебательной неустойчивости происходит по-разному в различно направленных магнитных полях. Этот вывод подтверждает анализ усредненных составляющих течения. На рис. 3 показаны линии тока усредненных течений при $Pr=0,02$, $Gr=10^7$ в вертикальном (см. рис. 3а...в) и горизонтальном (см. рис. 3г...е) магнитных полях при $Na=10$ (а,г), 20 (б,д) и 30 (в,е). Наибольшие различия линий тока, соответствующих одним и тем же значениям параметров и разным направлениям магнитного поля, наблюдаются вблизи центра полости. Исключением является случай $Na=20$, для которого форма линий тока и интенсивность конвективного течения в различно направленных магнитных полях близки. На рис. 4а изображены линии тока усредненного течения при $Pr=0,02$, $Gr=6 \cdot 10^6$ в отсутствие магнитного поля. Сопоставление рис. 3б,д и рис. 4а показывает, что во всех трех рассматриваемых случаях структура и интенсивность усредненных течений близки. Таким образом, развитие конвективных течений при увеличении числа Гартмана и уменьшении числа Грасгофа происходит аналогично. Следовательно, с помощью магнитного поля можно моделировать некоторые эффекты, связанные с условиями пониженной гравитации.

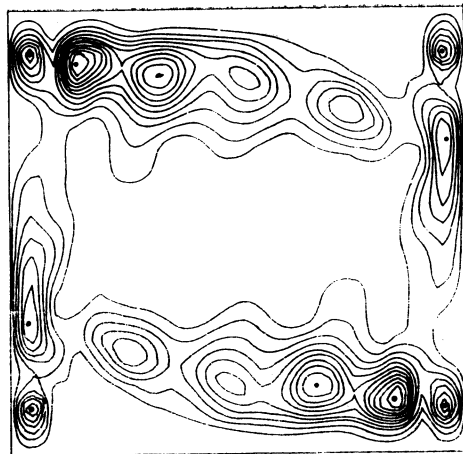
В отличие от частотных спектров и усредненных характеристик колебательных режимов конвекции распределение величин среднеквадратичных пульсаций скорости и температуры не зависит от направления магнитного поля. На рис. 5а,б показаны изолинии величин $\overline{v_x'^2}$ и $\overline{v_y'^2}$ при $Pr=0,02$, $Gr=10^7$, $Na=10$ и $Na=30$ соответственно. Изменение формы изолиний среднеквадратичных пульсаций происходит в окрестности значения числа Гартмана $Na \approx 12$, соответствующего излому нейтральных кривых (см. рис. 1). Изменения пространственного распределения пульсаций конвективного течения связаны с изменением структуры наиболее опасного бесконечно малого возмущения (см. рис. 1, 2б). На рис. 5в показаны изолинии пульсаций обеих компонент скорости в условии отсутствия магнитного поля при $Pr=0,1$, $Gr=4,1 \cdot 10^6$. Сравнение рис. 5б и в показало, что распределения пульсаций скорости по области течения изменяются аналогично в случае увеличения числа Гартмана или в отсутствие магнитного поля при увеличении числа Прандтля. Выше отмечалось, что форма изолиний



a



b



b

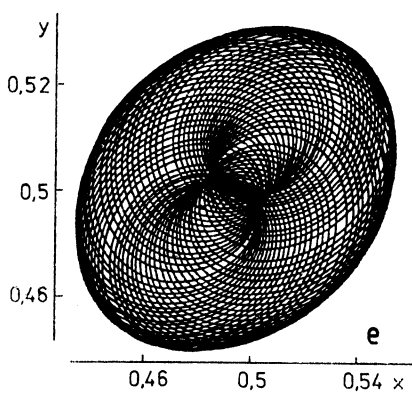
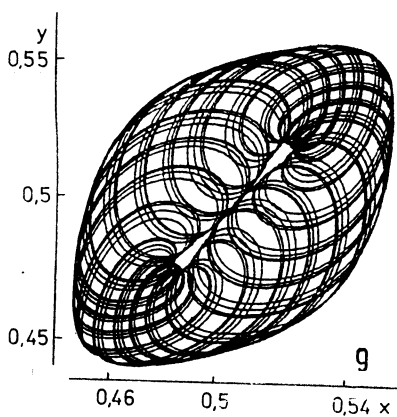
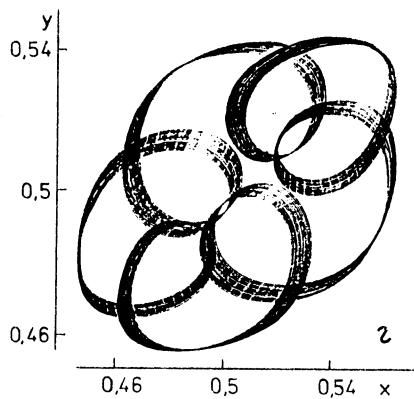
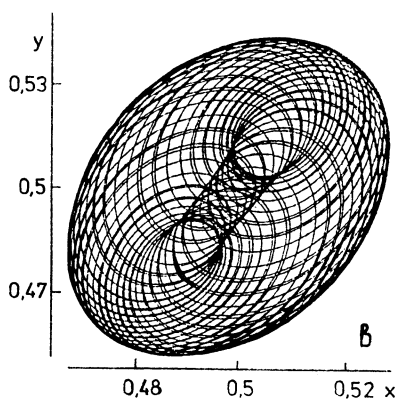
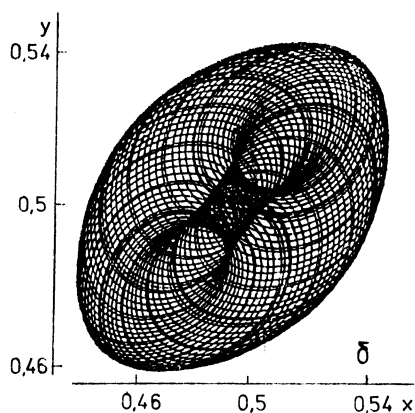
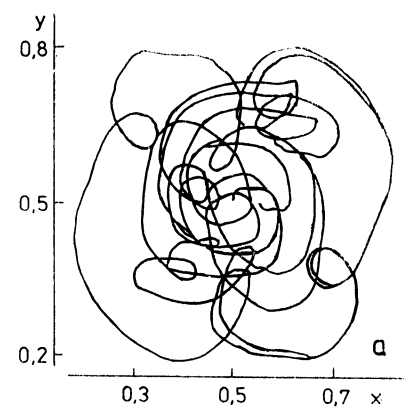


Рис 6.

среднеквадратичных пульсаций и наиболее опасных возмущений не меняется при изменении направления магнитного поля.

Таким образом, существование аналогий между увеличением чисел Гартмана и Прандтля связано со структурой пульсационной составляющей нестационарного конвективного течения (например, со структурой наиболее опасного возмущения или пространственным распределением среднеквадратичных пульсаций) и не зависит от направления магнитного поля.

На	Вертикальное поле			Горизонтальное поле		
	$\overline{v_x'^2} \cdot 10^{-6}$	$\overline{v_y'^2} \cdot 10^{-6}$	$\overline{\theta'^2}$	$\overline{v_x'^2} \cdot 10^{-6}$	$\overline{v_y'^2} \cdot 10^{-6}$	$\overline{\theta'^2}$
0	0,96	0,87	0,015	0,96	0,87	0,015
10	0,57	0,56	0,0043	0,925	0,837	0,017
20	0,35	0,35	0,0034	0,36	0,35	0,0035
30	0,13	0,14	0,0016	0,12	0,13	0,0016
34,5	0,0014	0,0013	0,000018	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0

Количественные характеристики подавления колебаний конвективного течения магнитным полем приведены в таблице, где показано изменение максимальных по области течения значений среднеквадратичных пульсаций скорости и температуры в зависимости от числа Гартмана при $G_r = 10^7$.

Как отмечено в [10], неустойчивость исследуемого конвективного течения (при $Pr = 0,02$) сопровождается нарушением свойства центральной симметрии: изолинии стационарных режимов конвекции симметричны относительно поворота на 180° вокруг центра полости (см. рис. 2а), а закритические колебательные течения не обладают этим свойством. В то же время (см. рис. 3, 5) линии тока и изотермы усредненных по времени течений, а также изолинии среднеквадратичных пульсаций центрально симметричны. Это означает, что пульсационные составляющие описываемых автоколебательных режимов конвекции в центрально симметричных точках области течения имеют противоположные знаки.

Непрерывная по временным и пространственным переменным аппроксимация течения, определяемая выражениями (5), (7), позволяет проинтегрировать уравнения траекторий жидких частиц

$$dx/dt = v_x(x, y, t); \quad dy/dt = v_y(x, y, t)$$

с достаточно высокой точностью. Определенный интерес представляет траектория, проходящая через центр полости $x=y=0,5$. В случае устойчивого стационарного течения частица, находящаяся в центре полости, неподвижна. После потери устойчивости вследствие нарушения центральной симметрии течения проходящая через центр полости траектория превращается в кривую, изображенную на рис. 4б. Эта кривая представляет собой квазипериодическую обмотку двумерного тора и является характерной для слаборазрешенных режимов конвекции как при наличии магнитного поля, так и без него.

Изменение формы траектории, проходящей через центр полости, в случае $G_r = 10^7$, $Pr = 0,02$ при постепенном увеличении магнитного поля показано на рис. 6. В отсутствие магнитного поля колебания течения являются непериодическими (см. [6, 10]), но регуляризуются уже при $Na = 10$. Однако в горизонтальном магнитном поле проходящая через центр полости траектория сохраняет нерегулярную форму (см. рис. 6а). С увеличением магнитного поля траектория становится регулярной (см. рис. 6б...е). При этом размеры области, в которую может попасть находившаяся в центре полости жидкая частица, постепенно уменьшаются.

Выводы. 1. Направление магнитного поля оказывает сильное влияние на структуру усредненных составляющих течения и практически не влияет на характеристики устойчивости стационарных течений и пространственные свойства пульсационных составляющих колебательных течений.

2. Существуют аналогии между увеличением числа Гартмана и уменьшением числа Грасгофа, а также между увеличением чисел Гартмана и Прандтля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуковский Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М., 1972. — 392 с.
2. Proctor M. R. E., Weiss N. O. Magnetoconvection // Rep. Progr. Phys. — 1982. — Vol. 45. — P. 1317...1379.
3. Fauve S., Laroche C., Libchaber A. Horizontal magnetic field and the oscillatory instability onset // J. Phys. Lettres. — 1984. — N 45. — P. L-101...L-105.
4. Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л., Шлиомис М. И. Монотонные и колебательные режимы конвекции проводящей среды в магнитном поле // Магнит. гидродинамика. — 1975. — № 4. — С. 22...30.
5. Шлиомис М. И. О колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28, № 4. — С. 678...683.
6. Гельфгат А. Ю. Влияние величины и направления магнитного поля на колебательные режимы термогравитационной конвекции в прямоугольной полости // Магнит. гидродинамика. — 1988. — № 3. — С. 70...75.
7. Гельфгат А. Ю. Вариационный метод решения задач динамики вязкой жидкости в прямоугольных областях // Прикладные задачи математической физики. — Рига, 1987. — С. 14...24.
8. Гельфгат А. Ю. Решение задач тепловой конвекции методом Галеркина: тестовые расчеты // Прикладные задачи математической физики. — Рига, 1989. — С. 22...31.
9. Crochet M. J., Geyling F. T., Schaftingen J. J. van. Finite element method for calculating the growth of semi-conductor crystals // Finite element methods in flow problems. — 1984. — Austin. — P. 1...5.
10. Гельфгат А. Ю., Мартузан Б. Я. Устойчивость и колебательные режимы естественной конвекции в нагреваемой сбоку прямоугольной полости // Прикладные задачи математической физики. — Рига, 1988. — С. 31...40.

Поступила в редакцию 12.04.89 (09.03.89)