

**תקציר-הרצאות בקורס
נושאים מתקדמים בתורת
האינפורמציה
0510-7101**

סמסטר ב' - 2006

מרצה: פרופ' רם זמיר

**** סיכום זה אינו כולל הרצאות זהות לאילו שניתנו בסמסטר ב' 2004**

תוכן עניינים

2	תוכן עניינים
3	1 - הרצאה
3	משוונים, חיזוי וכלל השרשרת לאינפורמציה הדדית בעולם הגאוס.
15	2 - הרצאה
15	קידוד ערוץ גאוס עם אינפורמצית צד
22	3-4 - הרצאה
22	סריגים ושימושם במערכות תקשורת
30	5 - הרצאה
30	בעיית קידוד מקור עם אינפורמצית-צד למקרה הגאוס (GAUSSIAN WYNER-ZIV)
36	6 - הרצאה
36	בעיית גלפנד-פינסקר (GEL'FAND-PINSKER):
46	7 - הרצאה
46	ערוצי MAC ו BC וקטוריים - ערוצי MIMO (MULTIPLE INPUT MULTIPLE OUTPUT)
54	8 - הרצאה
54	קידוד מקור עם עיוות בשלבים (SR - SUCCESSIVE REFINEMENT)

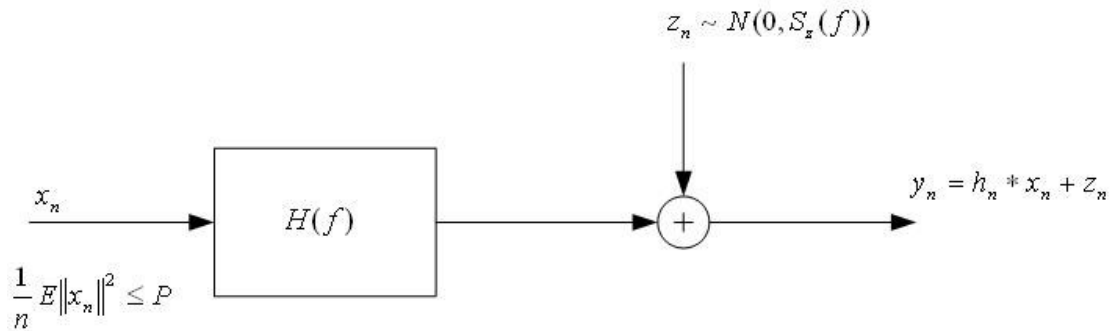
הרצאה - 1

משוונים, חיזוי וכלל השרשרת לאינפורמציה הדדית בעולם הגאוזי

סוכם ע"י ניר וינברגר

א. ערוץ רעש גאוזי עם הפרעה בין סימנית (ISI)

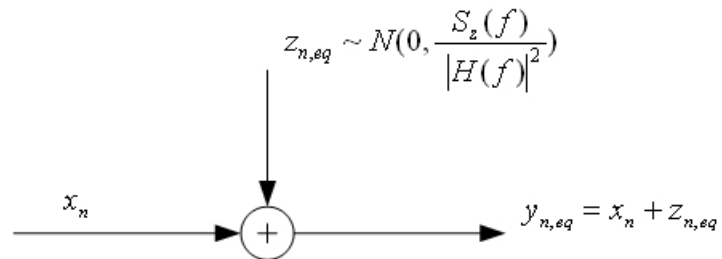
נעסוק במודל זמן בדיד הבא לערוץ עם הפרעה בין סימנית (Inter-symbol interference, ISI).



המוצא מתואר ע"י $y_n = h_n * x_n + z_n$ כאשר

- הכניסה x_n מוגבלת הספק, $\frac{1}{n} E \|x_n\|^2 \leq P$.
- הערוץ מכיל מסננת ליניארית קבועה בזמן בעלת תגובת הלים h_n , ותגובת תדר $H(f)$.
- מתווסף רעש חיבורי גאוזי z_n , בעל ספקטרום הספק $S_z(f)$.

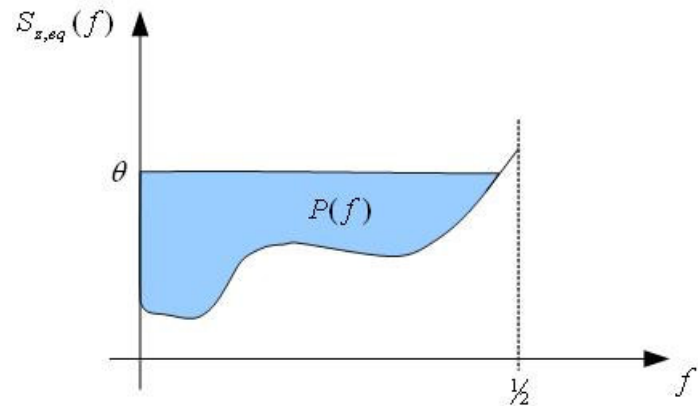
ע"י הוספת מסננת הופכית ל $H(f)$ במוצא הערוץ ניתן לעבור לערוץ השקול הבא,



כך שכעת המוצא מתואר ע"י $y_n = x_n + z_{eq,n}$ כאשר הרעש החיבורי השקול $z_{eq,n}$ הוא גאוזי עם

$$S_{z,eq}(f) = |H(f)|^{-2} \cdot S_z(f)$$

מציאת קיבול הערוץ – לפי כלל מזיגת מים



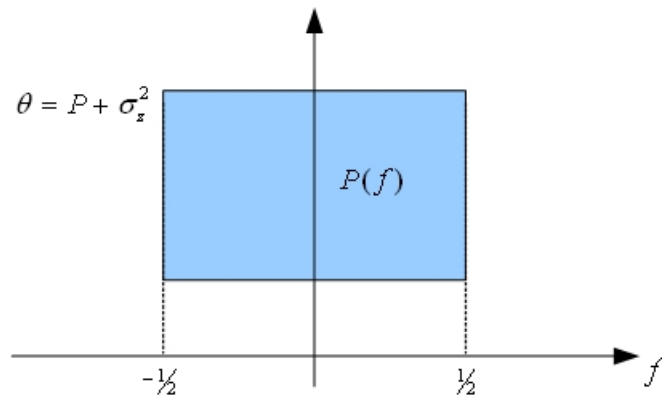
$$C = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P(f)}{S_{z,eq}(f)} \right) df = \int_{f: \theta > S_{z,eq}(f)} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\theta}{S_{z,eq}(f)} \right) df \quad \left(\frac{\text{bits}}{\text{channel use}} \right)$$

כאשר θ הוא "גובה המים" וההספק בכל תדר נקבע כך ש $\int_{-1/2}^{1/2} P(f) df = P$

מקרים פרטיים ותכונות:

- ערוץ AWGN – $y_n = x_n + z_n$. הקיבול נתון ע"י

$$C_{AWGN} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma_z^2} \right) \quad \left(\frac{\text{bits}}{\text{channel use}} \right)$$



- החסם העליון של Shannon –

$$C \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{P + \sigma_{z,eq}^2}{S_{z,eq}(f)} \right) df$$

כאשר $\sigma_{z,eq}^2$ הוא שונות הרעש השקול, $\sigma_{z,eq}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_{z,eq}(f) df$. החסם מתקבל בשוויון כאשר המים מכסים את כל הרעש, דהיינו $\theta \geq S_{z,eq}(f)$ לכל $|f| \leq 1/2$ (מצב זה מתקבל בד"כ כאשר יחס האות לרעש גבוה).

- המבוא האופטימלי - מכיוון ש

$$C = \sup \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) = \bar{I}(\{x_n^*\}; \{y_n\})$$

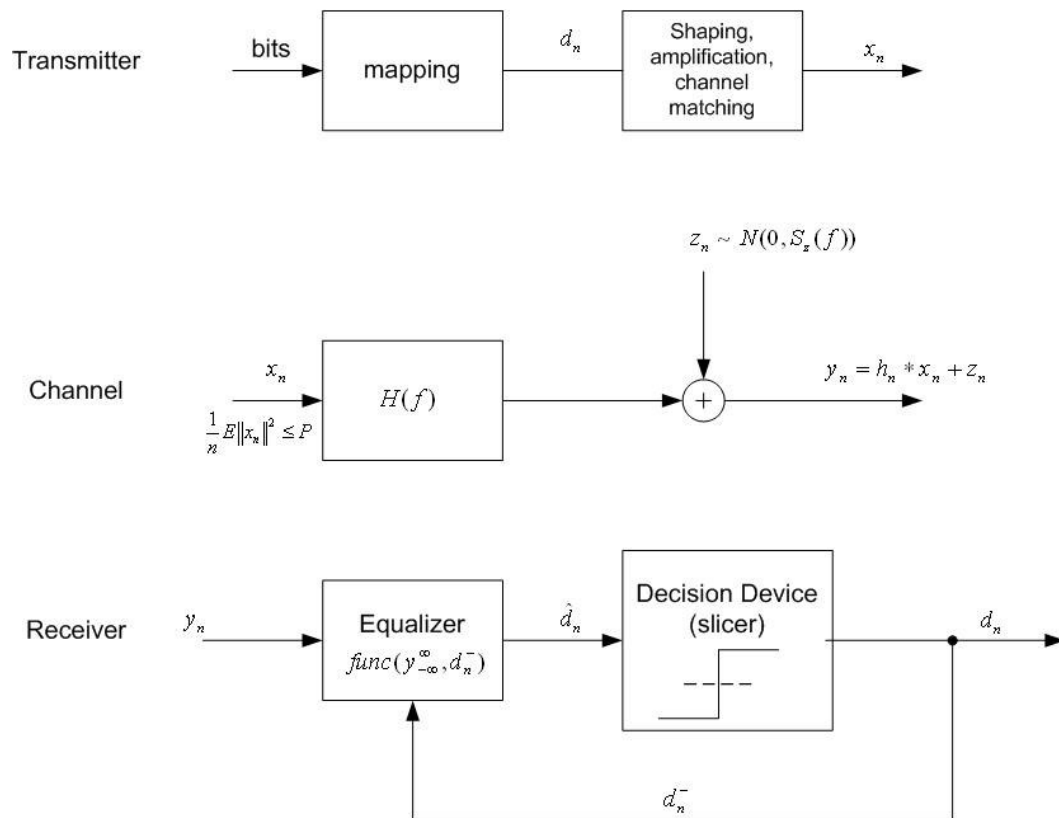
כאשר הסופרימום נלקח על פני כל התהליכים האקראיים הסטאציונריים שמקיימים את אילוץ ההספק, $E(x_n^2) \leq P$, הגודל $\bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\})$ הוא האינפורמציה החדית הממוצעת בין $\{x_n\}$ ל $\{y_n\}$

$$\bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(x_1^N; y_1^N)$$

ו $\{x_n^*\}$ הוא תהליך אקראי גאוסי עם ספקטרום הספק $P(f)$, הנקבע באמצעות כלל מזיגת המים.

ב. שימוש במשוון עם משוב החלטה לשידור וגילוי בערוץ ISI גאוסי

משוון עם משוב קדמי (Feed forward equalizer) ומשוב החלטה (Decision feedback equalizer) מתואר ע"י המערכת הבאה.



כאשר עבור סדרה d_n , עברה מסומן ע"י $\{d_{-\infty}^{n-1}\}$.

הנחה: החלטות העבר ב slicer נכונות, ולכן סימבולי העבר ידועים במקלט.

מטרת המערכת היא להגיע למצב שבו קיבול הערוץ עם הזיכרון שווה לאינפורמציה ההדדית הסקלארית על פני יחידת ההחלטה, דהיינו $C = \sup \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) = I(\hat{d}_n; d_n)$.

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

$$I(\hat{d}_n; d_n) = I(\hat{d}_n; \hat{d}_n + e_n) \text{ ואז } e_n = d_n - \hat{d}_n$$

תזכורות:

- כלל השרשרת לאינפורמציה החדית - לכל שלושה משתנים אקראיים a, b, c מתקיים

$$I(a; b, c) = I(a; b) + I(a; c|b)$$

עבור המקרה שלנו נזדקק לפיתוח

$$\begin{aligned} \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N I(x_{-N}^N; y_{-N}^N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N I(x_n; y_{-N}^N | x_{-N}^{n-1}) = I(x_n; y_{-\infty}^{\infty} | x_n^-) \end{aligned}$$

כאשר השוויון השני נובע מכלל השרשרת, והשוויון השלישי נכון עבור תהליכים

אקראיים סטאציונריים במצב היציב, כאשר מגדירים $x_n^- = \{x_{n-1}, x_{n-2}, \dots\}$.

- משפט אי שוויון עיבוד הנתונים - לכל שני משתנים אקראיים a, b ופונקציה $\varphi(\cdot)$ מתקיים

$$I(a; \varphi(b)) \leq I(a; b)$$

ושוויון אם $\varphi(\cdot)$ הפיכה.

ננתח את שני הגדלים $I(\hat{d}_n; d_n)$ ו $\bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\})$

הגודל הראשון

$$\begin{aligned} \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) &= \bar{I}(\{d_n\}; \{y_n\}) = I(d_n; y_{-\infty}^{\infty} | d_n^-) = h(d_n | d_n^-) - h(d_n | y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-) \\ &= h(d_n) - h(d_n - \hat{d}_n | y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-) = h(d_n) - h(e_n | y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-) \end{aligned}$$

כאשר:

- השוויון הראשון נכון תמיד משום שמצד אחד לפי אי-שוויון עיבוד הנתונים מתקיים $\bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) \geq \bar{I}(\{d_n\}; \{y_n\})$ ומצד שני, מכיוון ש x_n נקבעים דטרמיניסטית ע"י d_n , ובאמצעות כלל השרשרת וחייביות האינפורמציה החדית מתקיים אי שוויון הפוך

$$\bar{I}(\{d_n\}; \{y_n\}) = \bar{I}(\{d_n\}; \{x_n\}; \{y_n\}) = \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) + \bar{I}(\{d_n\}; \{y_n\} | \{x_n\}) \geq \bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\})$$

- השוויון השני נכון מכלל השרשרת והפיתוח אחריו.

- השוויון השלישי מתקבל מפירוק האינפורמציה החדית להפרש אנטרופיות.

- השוויון הרביעי מתקבל כאשר d_n היא סדרה i.i.d, ומכיוון שהמשעריך \hat{d}_n הוא פונקציה של

$$\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$$

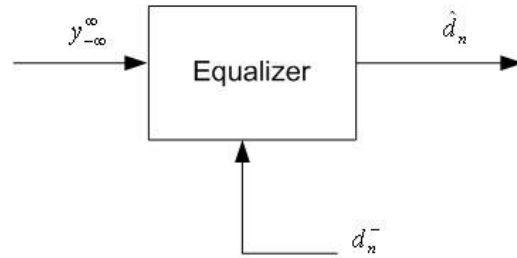
כעת נשתמש בכלל האורתוגונליות של משעריך MMSE, האומר שאם \hat{d}_n הוא משעריך MMSE של

d_n מתוך המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$, אזי שגיאת השערוך $e_n = d_n - \hat{d}_n$ ניצבת למדידות. במקרה הגאוס

הניצבות (חוסר קורלציה) גוררת אי תלות סטטיסטית, ולכן e_n המתקבל משערוך אופטימלי במובן

MMSE, בת"ס במדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$.

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר



מכאן נובע שכאשר המשוון הוא משערך אופטימלי במובן MMSE מתקבל $h(e_n | y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-) = h(e_n)$ ולכן בסה"כ מתקבל $\bar{I}(\{x_n\}; \{y_n\}) = h(d_n) - h(e_n)$ הגודל השני הוא

$$I(\hat{d}_n; d_n) = h(d_n) - h(d_n | \hat{d}_n) = h(d_n) - h(e_n | \hat{d}_n) = h(d_n) - h(e_n)$$

כאשר השוויון השני נכון מכיון ש \hat{d}_n הוא פונקציה (ליניארית) של המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$ ומכיוון ש e_n בת"ס במדידות אלו הרי שהוא בת"ס גם ב \hat{d}_n .

מהשוואת שני הביטויים ניתן לראות שקיבלנו את התוצאה הרצויה, המסוכמת במשפט הבא.

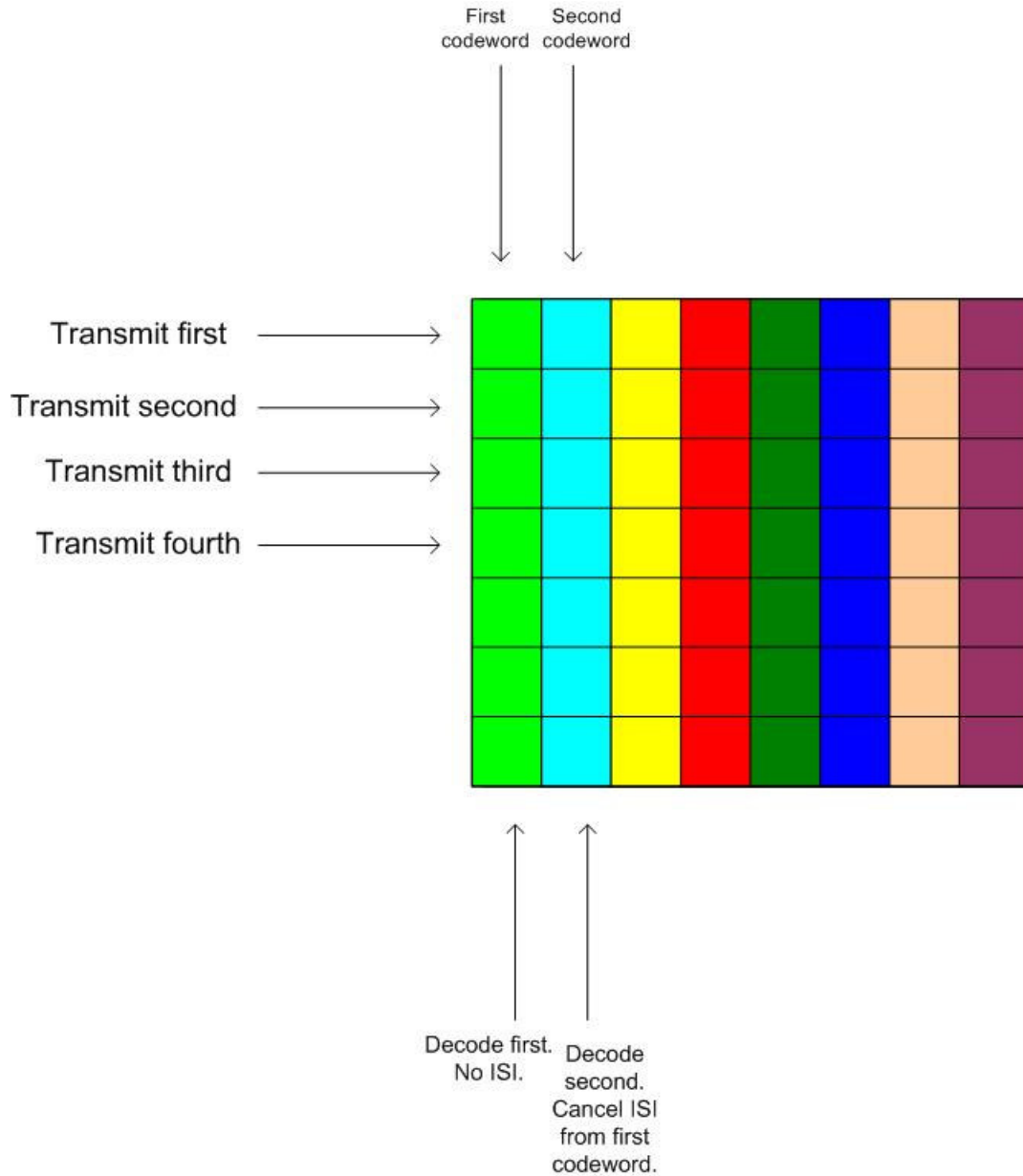
משפט (Cioffi, Dudeney, Eyuboglu, Forney) : אם

- d_n סדרה i.i.d. גאוסית, בעלת שונות σ_d^2 .
 - $\{x_n\} = \{x_n^*\}$, כלומר מתאם הערוץ הוא מסנן $G(f)$ המקיים $|G(f)|^2 = \frac{P(f)}{\sigma_d^2}$.
 - המשוון הוא מסננת ווינר האופטימלית לשערך d_n מתוך המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$ (דהיינו מסדר אינסופי).
 - החלטות העבר ב slicer נכונות.
- מקבלים $C = I(\hat{d}_n; d_n)$.

משמעות המשפט היא שכאשר רוצים לשדר בערוץ גאוזי צבעוני ניתן להפריד בין החלק של הקידוד והחלק של שיוויון הערוץ ללא הפסד בקצב השידור. הקידוד יתבצע עבור ערוץ גאוזי לבן, ובאמצעות כלים של עיבוד אותות, כגון מסנן ווינר ומתאם הערוץ, ניתן לטפל בצבעוניות הערוץ.

נדון כעת בקיום הנחות המשפט. ההנחה על מתאם הערוץ נכונה תמיד, וההנחה על משערך ווינר מתקיימת בקירוב כאשר מספר המקדמים של המסננת גדול מספיק כך שההפסד ביחס למסננת אינסופית זניח. לעומת זאת, ההנחות לגבי גאוסיות הסימבולים d_n , וההנחה שהחלטות העבר נכונות, נראות סותרות את המבנה הסדרתי של המערכת. בכדי שהסימבולים d_n יראו כמ"א גאויסיים i.i.d. יש צורך בקוד עיצוב (shaping), ובפענוח לא סיבתי. כמו כן, ההנחה שהחלטות העבר נכונות, והשימוש באינפורמציה החדית כמדד לביצועים מחייבים שימוש בקוד טוב עבור ערוץ AWGN, ובהכרח פענוח לא סיבתי. נתיר כעת את הסתירה באמצעות שימוש בשזירה (Interleaving). נניח בשלב ראשון שאין לנו ערוץ צבעוני בודד יחיד, אלא מספר ערוצים בלתי תלויים במקביל. הקידוד יתבצע על פני הערוצים הבלתי תלויים, ולא על פני ציר הזמן. כאשר הקוד טוב, ההנחות לגבי גאוסיות d_n וידיעת סימבולי העבר במקלט יתקיימו והאינפורמציה החדית אכן תהיה מדד לקצב השידור. כאשר אין מספר ערוצים במקביל ניתן להשתמש בשזירה. נבנה מטריצה כך שכל עמודה היא מילת קוד, ומספר השורות גדול כך שניתן לקבל קוד באורך מספיק גדול. נשדר את המטריצה שורה שורה, וכאשר נתקבל כל המטריצה במקלט נתחיל בפענוח. ראשית נפענח את העמודה הראשונה. מכיוון שזוהי מילה מקוד טוב עבור ערוץ AWGN, הסימבולים הם בקירוב גאויסיים i.i.d., והפענוח מדויק. כעת, כאשר באים לפענח את העמודה השנייה ניתן לבטל את ה- ISI מהעמודה הראשונה. נמשיך בצורה דומה ונפענח כל עמודה בנפרד כאשר מבטלים

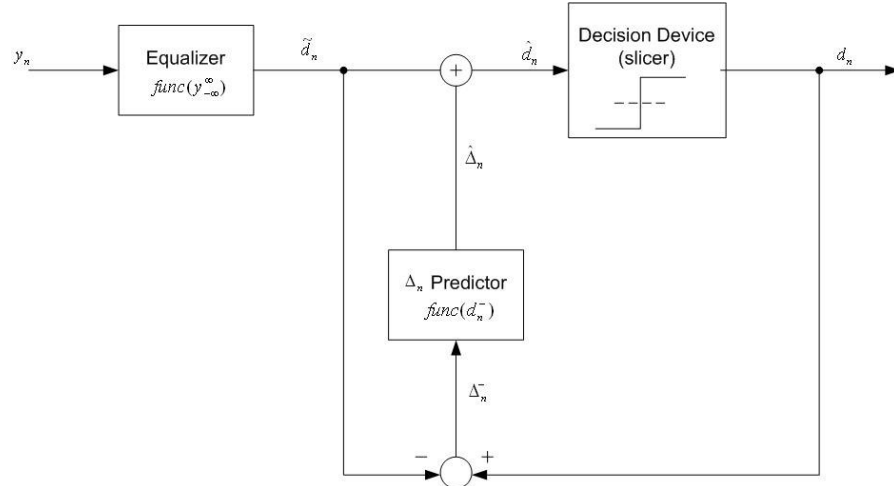
את ה ISI מעמודות קודמות. הבעייתיות בגישה זו היא ההשהיה הגדולה שנוצרת, מכיוון שמספר השורות צריך להיות גדול בכדי שהקוד יהיה טוב וגם מספר העמודות צריך להיות גדול. הסיבה שגם מס' העמודות צריך להיות גדול היא שבכדי שלא נקבל ISI מהסימבול האחרון בשורה מסוימת לסימבול הראשון בשורה הבאה יש להקדים ולשדר בכל שורה אפסים באורך תגובת הערוץ. בכדי שההפסד בקצב יהיה קטן יש לשדר מס' עמודות גדול, וכאשר מס' העמודות שואף לאינסוף לא נפסיד בקצב כלל והקיבול יושג.



משוון ה FFE/DFE שהתקבל הוא משערך של סימבולי השידור d_n מתוך המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$. תוך שימוש בעקרון האורתוגונליות ניתן להראות, שמכלי לאבד מאופטימליות המשערך, ניתן להציג אותו כמשערך בעל שני שלבים.¹ בשלב הראשון המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}\}$ משמשות לשערך אופטימלי \tilde{d}_n , של סימבול השידור d_n , ויוצרות שגיאת שערך $\Delta_n = d_n - \tilde{d}_n$. כעת, בשלב השני, משום שהנחנו שהעבר

¹ נכונות אלגוריתם Levinson – Durbin מעיבוד אותות מוכחת בצורה דומה. ההוכחה של פירוק המשוון ניתנה כתרגיל בית.

של הסדרה d_n ידוע במדויק במקלט, גם העבר של הסדרה Δ_n ידוע במקלט וניתן להשתמש בו בכדי לחזות את הערך הנוכחי של Δ_n , וכך להקטין את שונות השגיאה בשערוך של d_n . המערכת המתקבלת נראית כך,



נפתח כעת ביטוי מפורש לאינפורמציה ההדדית על פני יחידת ההחלטה ונראה שהיא שווה לקיבול הערוץ הצבעוני. נראה עבור המקרה שחסם Shannon הדוק, למרות שמשיקולי עיבוד אותות הפירוק נכון תמיד. נסמן ב $S_{\Delta}(f)$ את ספקטרום שגיאת השערוך האופטימלי של d_n מתוך $\{y_{-\infty}^{\infty}\}$ (בלבד), כאשר $y_n = h_n * g_n * d_n + z_n$. לפי הביטוי לספקטרום שגיאת השערוך של מסגרת ווינר נקבל,

$$S_{\Delta}(f) = \frac{\sigma_d^2 \cdot \frac{S_z(f)}{|G(f)|^2 |H(f)|^2}}{\sigma_d^2 + \frac{S_z(f)}{|G(f)|^2 |H(f)|^2}} = \frac{\sigma_d^2 \cdot S_{z,eq}(f)}{P(f) + S_{z,eq}(f)} = \frac{\sigma_d^2 \cdot S_{z,eq}(f)}{\theta} = \frac{\sigma_d^2 \cdot S_{z,eq}(f)}{P + \sigma_d^2}$$

כאשר $S_d(f) = \sigma_d^2$, השוויון השני נכון משום ש $S_{z,eq}(f) = |H(f)|^{-2} \cdot S_z(f)$ ו $P(f) = \sigma_d^2 \cdot |G(f)|^2$ או $P(f) = \sigma_d^2 \cdot |G(f)|^2$ ו $P(f) = \sigma_d^2 \cdot |G(f)|^2$ כאשר חסם Shannon הדוק.

שגיאת החיזוי של הסדרה Δ_n מתוך העבר שלה תסומן כעת $e_n = \Delta_n - \hat{\Delta}_n$ והיא שגיאת השערוך הכוללת בשערוך d_n מתוך כל המדידות $\{y_{-\infty}^{\infty}, d_n^-\}$. שגיאה זו נתונה ע"י הספק האנטרופיה (entropy power) של Δ_n , המסומן $P_e(\Delta_n)$. נקבל,

$$\sigma_e^2 = \text{Var}(e_n) = P_e(\Delta_n) = \exp\left(\int_{-1/2}^{1/2} \log S_{\Delta}(f) df\right)$$

$$= \frac{\sigma_d^2}{P + \sigma_d^2} \exp\left(\int_{-1/2}^{1/2} \log S_{z,eq}(f) df\right)$$

האינפורמציה ההדדית הסקלארית המתקבלת על פני יחידת ההחלטה היא

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

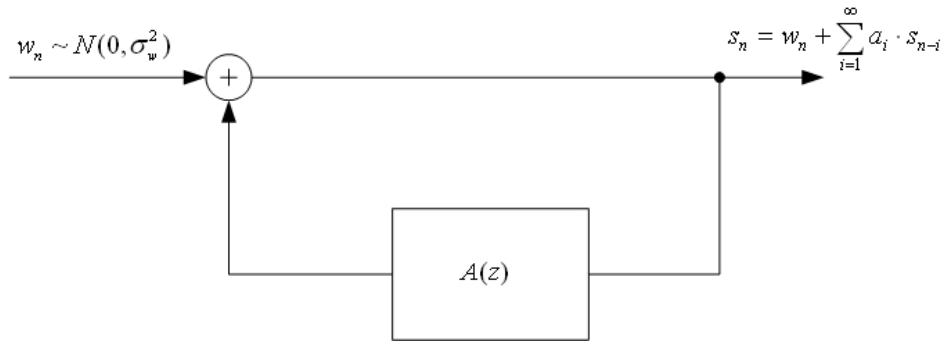
$$I(\hat{d}_n; d_n) = h(d_n) - h(e_n) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \cdot \sigma_d^2) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi e \cdot \sigma_e^2)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 + P + \sigma_z^2 \cdot S_{z,eq}(f)} \right) df = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\theta}{S_{z,eq}(f)} \right) df = C$$

כאשר חסם Shannon הדוק. מכיוון שהשגנו את קיבול הערוץ הרי שהפירוק לשני שלבים של מערכת ה FFE/DFE שהצענו שומר על אופטימליות.

ג. דחיסה עם עיוות ריבועי של מקור גאוסי צבעוני

נעסוק במודל זמן בדיד הבא למקור גאוסי צבעוני מסוג Auto – regressive (AR).



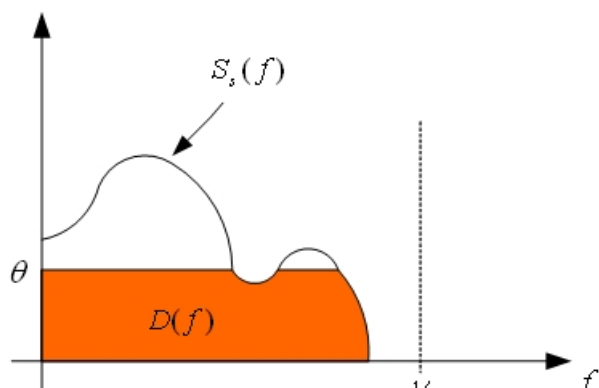
המקור מתואר ע"י s_n כאשר

- תהליך החידושים (אינובציות) w_n הוא תהליך גאוסי לבן בעל תוחלת אפס ושונות σ_w^2 .
- המקור נבנה ע"י מסננת ליניארית קבועה בזמן וסיבתית בעלת התמרת $A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot z^{-i}$,
- ספקטרום המקור נתון ע"י $S_s(f) = \frac{\sigma_w^2}{|1 - A(f)|^2}$. כמו כן מתקיים הקשר

$$\sigma_w^2 = P_e(s_n) = \exp \left[\int_{-1/2}^{1/2} \log S_s(f) df \right]$$

כאשר $P_e(s_n)$ מסמן את הספק האנטרופיה של המקור s_n .

מציאת פונקצית קצב עיוות – לפי כלל מזיגת מים



נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

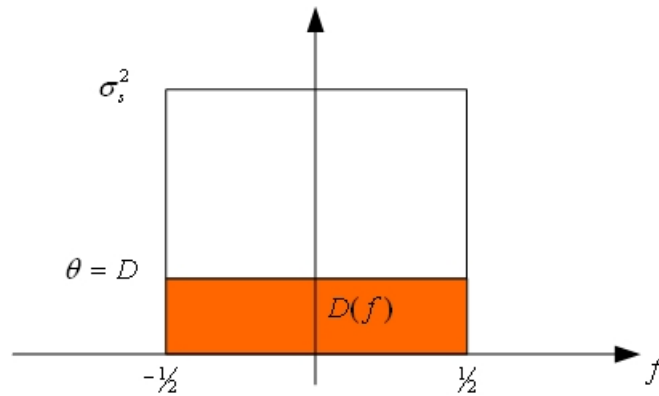
$$R = R(D) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{S_s(f)}{D(f)} \right) df = \int_{f: \theta < S_s(f)} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{S_s(f)}{\theta} \right) df \quad \left(\frac{\text{bits}}{\text{sample}} \right)$$

כאשר θ הוא "גובה המים" והעיוות בכל תדר נקבע כך ש $\int_{-1/2}^{1/2} D(f) df = D$.

מקרים פרטיים ותכונות:

- מקור גאוסני לבן – כאשר למקור שונות σ_s^2 פונקציית קצב עיוות נתונה ע"י

$$R(D) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_s^2}{D} \right) \quad \left(\frac{\text{bits}}{\text{sample}} \right)$$



- החסם התחתון של Shannon –

$$R(D) \geq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{S_s(f)}{D} \right) df = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\sigma_w^2}{D} \right)$$

כאשר σ_w^2 הוא שונות תהליך החידושים ונתון ע"י הספק האנטרופיה של המקור. החסם מתקבל בשוויון כאשר גובה המים נמצא מתחת לנקודת ספקטרום המקור המינימלית, דהיינו $S_s(f) \geq \theta$ לכל $|f| \leq 1/2$ (מצב זה מתקבל בד"כ כאשר העיוות קטן).

- "הערוץ" האופטימלי - מכיוון ש

$$R(D) = \inf \bar{I}(\{s_n\}; \{\hat{s}_n\})$$

כאשר האינפיומום נלקח על פני כל הפילוגים $p(\{\hat{s}_n\} | \{s_n\})$ היוצרים תהליכים אקראיים

$$E(\hat{s}_n - s_n)^2 \leq D, \text{ שמקיימים את אילוץ העיוות,}$$

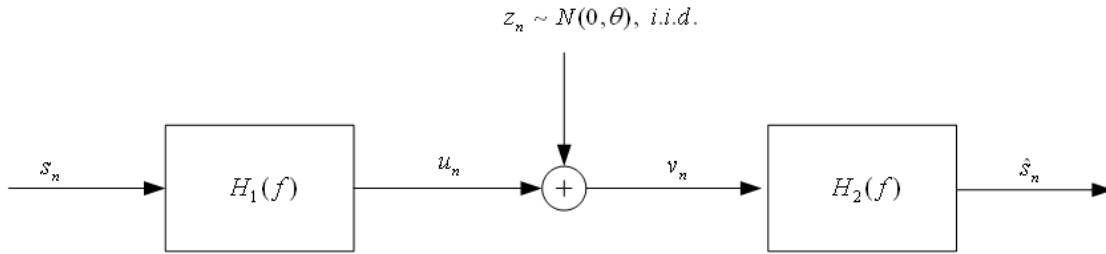
מפתרון מזיגת המים נובע שהערוץ ההפוך $\{s_n\} \rightarrow \{\hat{s}_n\}$, המגשים את פונקציית קצב עיוות מקיים ש

$$s_n = \hat{s}_n + e_n, \text{ כאשר } e_n \text{ גאוסני בת"ס ב } \hat{s}_n, \text{ וספקטרום ההספק שלו נתון ע"י } D(f), \text{ כך ש}$$

$$S_s(f) = S_{\hat{s}}(f) + D(f)$$

במקרה שלנו ניתן לקבל גם ערוץ מגשים קדמי

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר



כאשר המסנגות נתונות ע"י

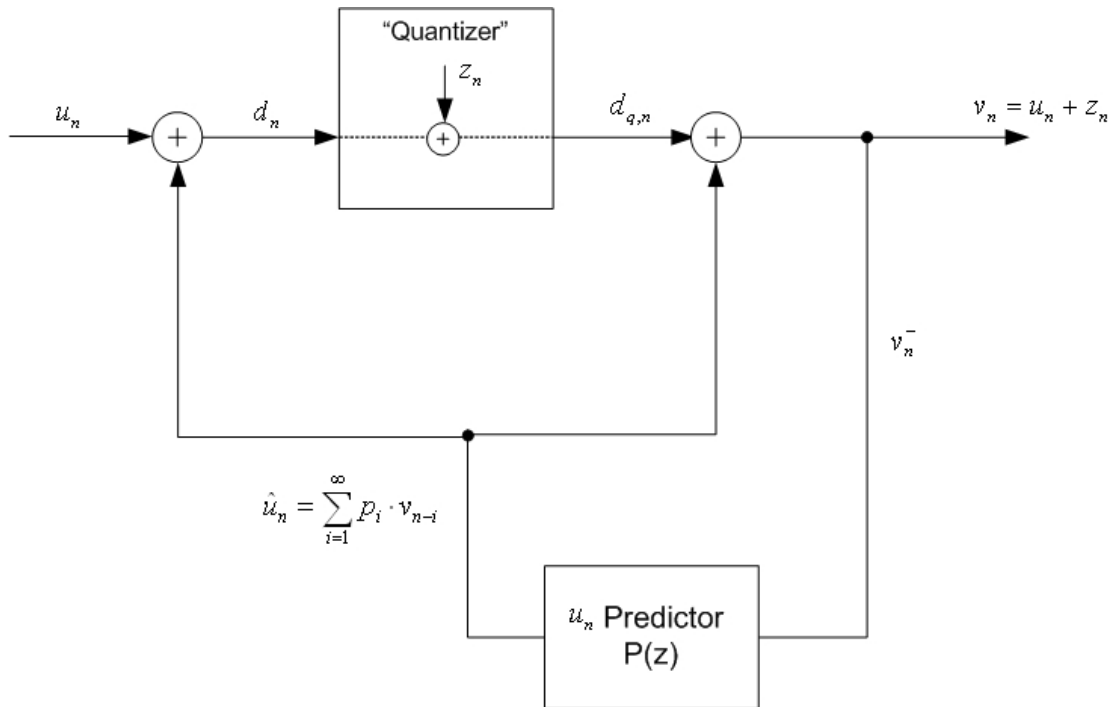
$$|H_1(f)|^2 = 1 - \frac{S_s(f)}{D(f)}$$

$$H_2(f) = H_1^*(f)$$

, וניתן לוודא שאכן האינפורמציה ההדדית היא $\bar{I}(\{s_n\}; \{\hat{s}_n\}) = \bar{I}(\{u_n\}; \{v_n\}) = R(D)$, כאשר אילוץ העיוות נשמר $E(\hat{s}_n - s_n)^2 \leq D$, ע"י מציאת האינפורמציה ההדדית והעיוות בכל תדר בנפרד.

ד. שימוש בחיזוי לדחיסת מקור AR גאוסי צבעוני

מערכת של קוונטייזר עם חיזוי מתוארת ע"י



המסנן $P(z)$ הוא חזאי ל u_n מתוך v_n^- , ו"הרעש" הנוצר בקונטייזר z_n הוא רעש גאוסני לבן, בת"ס בתהליך $\{u_n\}$ וב v_n^- , העבר של התהליך $\{v_n\}$.

מטרת המערכת היא להגיע למצב שבו פונקציות קצב עיוות של המקור הצבעוני שווה לאינפורמציה ההדדית הסקלארית על פני הקוונטיזר, דהיינו $R(D) = \inf \bar{I}(\{s_n\}; \{\hat{s}_n\}) = I(d_n; d_{q,n})$.

בדומה לפיתוח בחלק הקודם עבור קידוד ערוץ נפתח,

$$\begin{aligned} R(D) &\stackrel{(1)}{=} \bar{I}(\{u_n\}; \{v_n\}) \stackrel{(2)}{=} I(v_n; u_{-\infty}^\infty | v_n^-) \stackrel{(3)}{=} I(v_n - \hat{u}_n; u_n - \hat{u}_n, u_{-\infty}^{n-1}, u_{n+1}^\infty | v_n^-) \\ &\stackrel{(4)}{=} I(d_{q,n}; d_n, u_{-\infty}^{n-1}, u_{n+1}^\infty | v_n^-) \stackrel{(5)}{=} h(d_{q,n} | v_n^-) - h(d_{q,n} | d_n, u_{-\infty}^{n-1}, u_{n+1}^\infty, v_n^-) \\ &\stackrel{(6)}{=} h(d_{q,n} | v_n^-) - h(z_n) \stackrel{(7)}{=} h(d_{q,n}) - h(z_n) \stackrel{(8)}{=} I(d_n; d_n + z_n) = I(d_n; d_{q,n}) \end{aligned}$$

כאשר :

- השוויון הראשון נכון כאשר משתמשים במסננים $H_1(f)$ ו $H_2(f)$.
 - השוויון השני נובע מכלל השרשרת למקרה הסטאציונרי והפיתוח אחריו.
 - השוויון השלישי מתקבל מכיון שהחזאי \hat{u}_n הוא פונקציה של המדידות v_n^- בלבד.
 - השוויון הרביעי מתקבל ממבנה המערכת.
 - השוויון החמישי מתקבל מפירוק האינפורמציה הדדית להפרש אנטרופיות.
 - השוויון השישי מתקבל מכיון ש z_n בת"ס בתהליך $\{u_n\}$ וב v_n^- .
 - השוויון השביעי מתקבל כאשר $d_{q,n}$ בת"ס ב v_n^- .
 - השוויון השמיני מתקבל ע"י חזרה מהפרש אנטרופיות לאינפורמציה הדדית.
- התוצאה המבוקשת מתקבלת לאחר השוויון התשיעי ממבנה המערכת.

נרצה לבדוק מתי מתקיים השוויון השביעי. מכיון ש $v_n = u_n + z_n$ ו z_n הוא רעש גאוסני לבן, בת"ס בתהליך $\{u_n\}$ וב v_n^- , הרי שהחזאי הטוב ביותר ל v_n מתוך v_n^- הוא החזאי הטוב ביותר ל u_n מתוך v_n^- , ולכן שגיאת החזוי ל v_n שהיא $d_{q,n}$ מקימת את עיקרון האורתוגונליות, דהיינו ניצבת למדידות v_n^- . מכיוון שהתהליכים הם גאוסיים, חוסר קורלציה שקול לאי תלות סטטיסטית, ולכן כאשר $P(z)$ הוא החזאי האופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת ל u_n (ולכן גם ל v_n) מתוך v_n^- , נקבל ש $d_{q,n}$ בת"ס ב v_n^- .

במצב זה פונקציות קצב עיוות של המקור הצבעוני שווה לאינפורמציה ההדדית הסקלארית על פני הקוונטיזר.

בדומה לבעיית הערוץ הצבעוני, גם עבור מקור צבעוני ניתן להפריד בין הטיפול בצבעוניות המקור לבין הטיפול בקוונטיזציה. צבעוניות המקור תטופל באמצעות המסננים $H_1(f)$, $H_2(f)$ והחזאי $P(z)$, והקוונטיזר צריך להתאים למקור גאוסני לבן בלבד.

כמו כן ניתן להסביר את הסתירה בין העובדה שהמערכת חוזה באופן סדרתי, לבין העובדה שרעש הקוונטיזציה הוא גאוסני ולכן בהכרח ישנו שימוש בקוד (שאינו סיבתי), משיקולים דומים לשיקולים של בעיית הערוץ – הנחה של מספר מקורות שרוצים לקודד במקביל או שימוש בשזור במקרה של מקור יחיד.

- [1] Cioffi J. M. , Dudgeon G. P. , Eyuboglu M. V., and Forney G. D. , Jr. ;
“MMSE decision-feedback equalizers and coding- Part I: Equalization
results” ; IEEE Trans. Commun., vol. 43, no. 10, pp. 2582–2594, Oct.
1995.
- [2] -- ; “MMSE decision-feedback equalizers and coding- Part II: Coding
results” ; IEEE Trans. Commun., vol. 43, no. 10, pp. 2595–2604, Oct.
1995.
- [3] Guess T. Varanasi M.K. ; "A new successively decodable coding technique for
intersymbol-interference channels" ; Proceedings. IEEE International Symposium on
Information Theory , 2000, 25-30 June 2000, Page 102.
- [4] Forney G. David, Jr. ; Shannon meets Wiener II: On MMSE estimation in
successive decoding schemes
- [5] Zamir R. , Kochman Y. , Erez U. ; Achieving the Gaussain Rate-Distortion
function by prediction, to appear in ISIT 2006 , Seattle, Washington.

הרצאה – 2

קידוד ערוץ גאוסי עם אינפורמצית צד

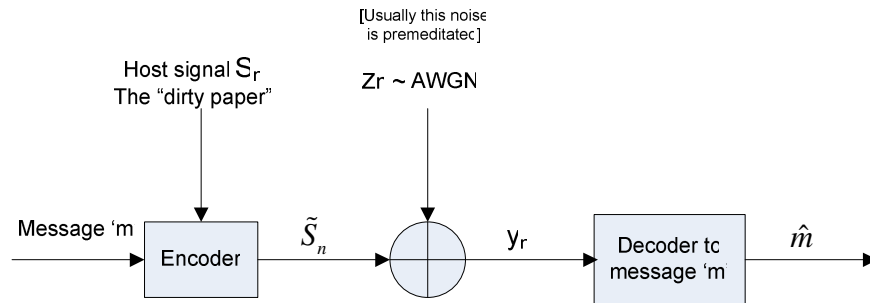
סוכם ע"י עידן אלרוד

נראה דואליות של אינפורמצית צד בין אינפורצית צד לקידוד מקור ואינפורמצית צד לקידוד ערוץ כלומר נראה שזו אותה בעייה תיאורטית. נדגים את הנושא בעזרת בעיית כתיבה על נייר מלוכלך (Writing on dirty paper).

הבעייה מוגדרת כך: יש לנו נייר מלוכלך ורוצים לכתוב עליו כך שמאוחר יותר ניתן יהיה לקרוא את הכתוב. יש שתי אפשרויות:

- למחוק את הנייר המלוכלך כך שיהיה נקי ואז לכתוב על הנייר הנקי.
- ברור כי פעולת ניקוי הנייר היא קשה ודורשת אנרגייה ולכן נרצה להימנע ממנה. לכך ניתן לכתוב על הנייר המלוכלך כמות שהוא אולם להסכים עם הקורא על דרך הקריאה כך שיקל עליו לקרוא.

בשנת 1983 הוכיח COSTA כי ניתן להשתמש בצורה השנייה ללא אובדן אינפורמציה. אחת האפליקציות כיום לשימוש בשיטתו של COSTA היא הגנה על זכויות יוצרים בהפצת מוזיקה, וידאו ותמונות. למי שרוכש את המוצר ניתנת אינפורמצית צד שבעזרתה יוכל לקרוא/לנגן את האינפורמציה שהיא גלויה לכל. מודל זה ניקרא Digital Water Marking (DWM). מודל המערכת נבנה באופן הבא:



האות לאחר המקודד אינו מעוות מידי כלומר קימת המגבלה כי:

$$(1.1) \quad E\{d(S, \tilde{S})\} \leq D$$

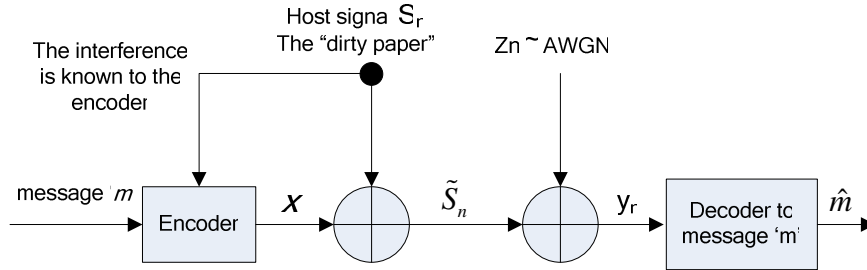
כאשר בדרך כלל $d(\cdot)$ הוא מדד עיוות ריבועי. מכאן יש עיוות מקסימלי בהטבעה או לחלופין אנרגיה סופית של ההודעה הנכתבת. נגדיר:

$$(1.2) \quad x \triangleq \tilde{S} - S$$

לפי הגדרה (1.2) נקבל כי:

$$(1.3) \quad y = s + x + z$$

המודל של COSTA ניקרא קידוד ערוץ עם אינפורמצית צד, והוא שונה רק במקצת מ DWM:



מגבלת ההספק השקולה היא:

$$(1.4) \quad E\{x^2\} \leq P$$

עתי בעיית DWM ובעיית קידוד הערוץ עם אינפורמציה צד שלנו לפי הגדרת 'x' במשוואה (1.3) הן שקולות כאשר הספק הערוץ P שווה לעיוות הריבועי המותר בהטבעה D כלומר D=P. נסתכל עתה מה ידוע על הבעייה של COSTA ומז נלמד על בעיית קידוד המקור שלנו. למעשה בעייה זו היא בעיית ערוץ. ובכן COSTA הוכיח את משפט COSTA בשנת 1983 בהתבססו על מאמר של Gelfand Pinsker משנת 1980. המשפט שהוכיח COSTA הוא:

$$(1.5) \quad C_{SI@Tx} = C_{SI@both} = C_{zero\ interference} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma_z^2} \right)$$

כאשר:

- $C_{SI@Tx}$ - קיבול הערוץ כאשר ידועה הפרעה S למקודד בלבד.
- $C_{SI@Both}$ - קיבול הערוץ כאשר ידועה הפרעה S למקודד ולמפענח גם יחד.
- $C_{zero\ interference}$ - קיבול הערוץ כאשר אין הפרעה S כלל.

למעשה כאשר S ידוע במקלט ניתן לחסרו ולכן זה שקול למצב שהוא לא קיים כלל. כלומר גם אם המפענח לא ידוע את ה"ליכלוך על הנייר" שכתבנו עליו עדיין ניתן לפענח את מה שניכתב כאילו כן ידע המפענח מה היה הליכלוך המקורי. כלומר אין כל צורך למחוק את הנייר וקיבול האינפורמציה תלוי רק בהספק ההודעה שניכתבה ביחס לרעש הלבן במערכת.

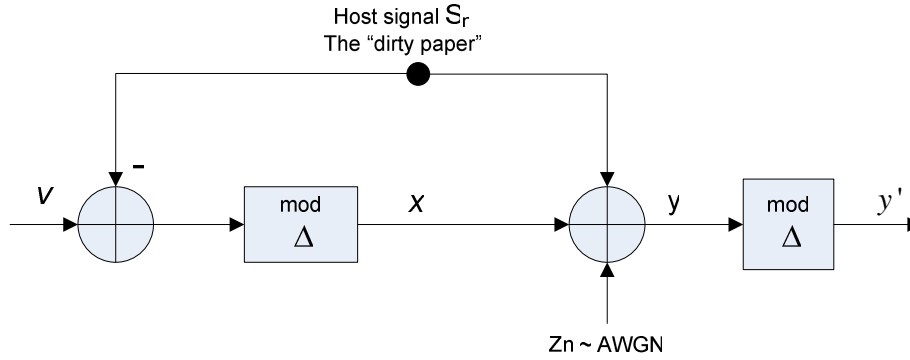
נראה עתה את החלק היותר מסובך בשייון COSTA כלומר נראה כי:

$$(2.1) \quad C_{SI@Tx} = C_{SI@Both}$$

נראה כי ניתן להתקרב לכך על ידי ביטול הפרעה בעזרת אריטמטיקת Modulo סקאלרית. נגדיר את הפעולה של modulo:

$$(2.2) \quad x \text{ modulo } \Delta = x - \Delta \cdot \left\lfloor \frac{x}{\Delta} \right\rfloor = \min \{ |x - i \cdot \Delta| : i \in \mathbb{Z} \} = \left. \begin{array}{l} \text{error in rounding } x \\ \text{to the nearest} \\ \text{multiple of } \Delta \end{array} \right\}$$

נסתכל עתה על פתרון קידוד ערוץ עם אינפורמציה צד לפי מודל COSTA כאשר המקודד מבצע פעולת modulo לאחר חיסור הפרעה שהוא ידוע כי תתוסף ובדרגת הכניסה של המפענח קיימת אותה פעולת modulo.



עדיין לפי המודל הספק המשדר מוגבל כלומר:

$$(2.3) \quad E\{x^2\} \leq P$$

נסכל על האינפורמציה ההדדית בין v ו- y' . לאחר דרגת הכניסה יש במפענח מערכת ML שמשערכת את v . כמובן שלפי הגדרת בעיית COSTA ה"לכלוך" S ידוע למשדר אבל לא למקלט. נסתכל על y' במונחי v :

$$(2.4) \quad y' = y \bmod \Delta = \underbrace{x}_{(v-s) \bmod \Delta} + s + z \bmod \Delta = [(v-s) \bmod \Delta + s + z] \bmod \Delta$$

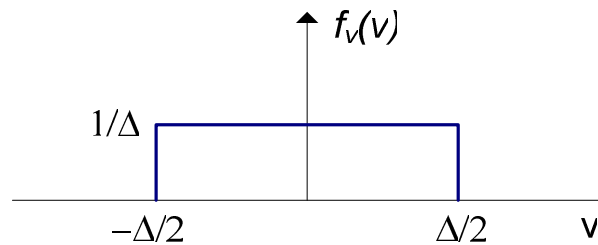
כיוון שהפעלת פעולות modulo בטור שקולה להפעלת פעולת modulo אחת בסיום אזי נקבל:

$$(2.5) \quad y' = (v + z) \bmod \Delta$$

המסקנה מ- (2.5) היא כי:

$$(2.6) \quad I(v; y') = I[v; (v + z) \bmod \Delta]$$

שזהו ערוץ רעש חיבורי modulo. בקורס הבסיסי למדנו כי הקיבול בערוץ רעש חיבורי modulo מתקבל על ידי פילוג מבוא אחיד או הפילוג המגשים בכניסה הינו אחיד. במקרה כזה כלומר הכניסה מתפלגת אחיד בין $-\Delta/2$ ל- $\Delta/2$ בגובה $1/\Delta$. הפילוג נראה כך:



התוחלת היא אפס והשונות היא:

$$(3.1) \quad E\{v^2\} = \frac{\Delta^2}{12}$$

נשיב לכ שלכל 's' (קבוע או אקראי) מתקיים $x = v - s \bmod \Delta$ גם כן אחיד. ומכאן $E\{x^2\} = \frac{\Delta^2}{12}$ גם כן. כיוון שהספק הכניסה מוגבל כלומר $E\{x^2\} = P$ אזי נקבל כי:

$$(3.2) \quad \Delta = \sqrt{12 \cdot P}$$

הקיבול של ערוץ רעש חיבורי modulo הוא מקסימלי כאשר פילוג המבוא אחיד. נסמן את הפרמטר של הפילוג האחיד ב- Δ הקיבול נתון ע"י:

$$(3.3) \quad C_{eq} = h(out) - h(equivalent noise) = \log(\Delta) - h(Z \bmod \Delta)$$

נציב את (3.2) לתוך (3.3) נקבל:

$$(3.4) \quad C_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \log(12 \cdot P) - h(Z \bmod \Delta)$$

לכל משתנה אקראי Z ובפרט גאوسی פעולת ה- mod מקטינה את האנטרופיה ולכן:

$$(3.5) \quad h(Z \bmod \Delta) \leq h(Z)$$

נשתמש ב- (3.5) ונקבל מ- (3.4) חסם תחתון לקיבול הערוץ:

$$(3.6) \quad C_{eq} \geq \frac{1}{2} \cdot \log(12 \cdot P) - h(Z)$$

נשים לב כי ב- SNR גבוה מתקיים:

$$(3.7) \quad \Delta \ll \sigma_z \rightarrow Z \bmod \Delta \approx Z$$

ומכאן שב- SNR גבוה החסם (3.6) הוא הדוק. נציב ב- (3.6) את הביטוי לאנטרופיה של משתנה גאوسی ונקבל:

$$(3.8) \quad C_{eq} \geq \frac{1}{2} \cdot \log(12 \cdot P) - \frac{1}{2} \cdot \log(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma_z^2) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{P}{\sigma_z^2}\right)}_A - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot e}{12}\right)}_B$$

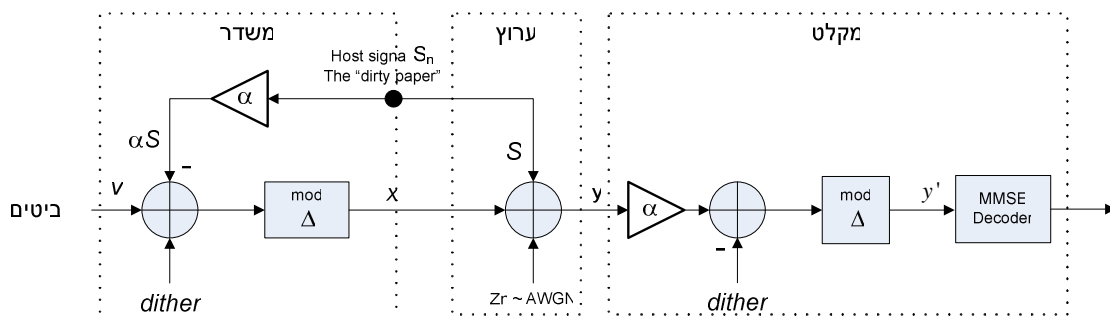
ביטוי A במשוואה (3.8) הינו הקיבול של ערוץ AWGN ללא ה- '1' כלומר כמעט אופטימלי ובמצב של SNR גבוה הם קרובים כלומר:

$$(3.9) \quad C_{AWGN} = \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 + \frac{P}{\sigma_z^2}\right) \underset{High\ SNR \rightarrow \frac{P}{\sigma_z^2} \gg 1}{\approx} \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{P}{\sigma_z^2}\right) = A$$

ביטוי B הוא הפסד כיוון שלא עשינו Shaping ומהווה ~0.254 [ביט לשימוש ערוץ]. הוא נובע מכך שביצענו פעולת חיסור modulo ולמעשה בגלל זה איבדנו אינפורמציה. כדי להרוויח בחזרה את ה- Shaping Gain צריך לשדר סיגנל על שריג רב ממדי בהמשך נילמד על שריגים וניראה כיצד ניתן לשפר את הסיגנל המשודר. כדי להרוויח בחזרה את ה- '1' בנוסחת הקיבול (3.9) כלומר לעבור מביטוי 'A' ל- (3.9) חלק שמאלי צריך לבצע סינון MMSE במקלט ולהיעזר ברנדמיזציה משוטפת (common randomness) בצורה של dither.

הגדרה: dither הוא משתנה אקראי שמתפלג אחיד על תא השריג בין $-\Delta/2$ ל- $\Delta/2$. זהו רעש ידוע גם למקודד וגם למפענח ובד"כ מבוסס על מעגל פסאודו אקראי.

הסכמה עם ה- dither נקראת lattice pre-coding ונראית כך:



הוספנו הכפלה בקבוע של האות המארח בחיבורו בכניסת המקודד וכן הכפלה באותו קבוע לפני החסרת ה - dither במפענח. נסתכל עתה על הרעש השקול וניראה שכאשר מכפילים בקבוע (α) אות שטבול ברעש אזי ניתן להוריד את הרעש השקול. לפני החסרת ה - dither במקלט נקבל:

$$(4.1) \quad \alpha \cdot y = \alpha \cdot (x + s + z) = x + \alpha \cdot s + \underbrace{[(1-\alpha) \cdot x + \alpha \cdot z]}_{Z_{eq}}$$

ניתן עי ידי שינוי α להביא גודל זה (Z_{eq}) למינימום אנרגיה, המינימום הוא:

$$(4.2) \quad \text{Var}(Z_{eq}) = (1-\alpha)^2 \cdot P + \alpha^2 \cdot \sigma_z^2 \Big|_{\alpha_{opt} = \frac{P}{P+\sigma_z^2}} = \frac{P \cdot \sigma_z^2}{P + \sigma_z^2}$$

כאשר כמובן X ו- Z הם בלתי תלויים סטטיסטית I - Z עם תוחלת אפס וכן:

$$(4.3) \quad E\{x^2\} = P, \quad E\{Z^2\} = \sigma_z^2$$

עבור SNR גבוה $P \gg \sigma_z^2$ ואז $\alpha_{opt} \approx 1$ כלומר חוזרים לסכמה המקורית ואין צורך ב - dither. לא הראינו זאת אולם אם 's' הוא "חזק וחלק" (כלומר בעל פילוג שטוח ורחב בייחס למשרת של 'x') אזי אין צורך ב - dither גם עבור $\alpha < 1$.

טענה: עבור משתנה אחיד dither כלומר $dither \sim Unif\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$ אזי לכל ערך

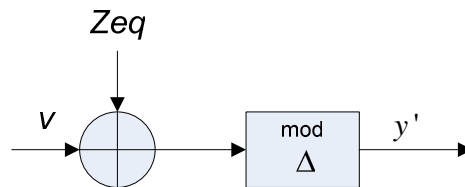
דטרמיניסטי 'a' מתקיים:

$$(4.4) \quad \boxed{(a + dither) \bmod \Delta \sim Unif\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)}$$

מהטענה נובע כי לכל משתנה אחיד w שאינו תלוי ב - dither הפעולה של הוספת dither ואח"כ ביצוע $\bmod \Delta$ לא תלויה ב - w בסימונים שלנו:

$$(4.5) \quad \boxed{(w + dither) \bmod \Delta \stackrel{d}{\sim} w}$$

משפט: סכמת ה - lattice pre-coding שקולה לערוץ האדיטיבי הבא:



כאשר Z_{eq} הוא בת"ס בכניסה, ומקיים:

$$(5.1) \quad Z_{eq} = \alpha \cdot Z + (1-\alpha) \cdot dither; \quad Z \sim N(0, \sigma_z^2); \quad dither \sim Unif\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$$

הוכחה: נסתכל על היציאה של המערכת המקורית כלומר ה lattice pre-coding וניראה כי היא זהה לבסוף לערוץ האדיטיבי השקול. הכניסה למקלט ML בסכמה המקורית היא:

$$(5.2) \quad y' = (\alpha \cdot y + dither) \bmod \Delta = (\alpha \cdot [x + Z + S] - dither) \bmod \Delta = \dots \\ \dots = (\alpha \cdot Z + \alpha \cdot S + x + [\alpha - 1] \cdot x - dither) \bmod \Delta$$

כאשר:

$$(5.3) \quad x = (v - \alpha \cdot S + dither) \bmod \Delta$$

לתוך משוואה (5.2) נציב את (5.3) נקבל:

$$(5.4) \quad y' = (\alpha \cdot z + \alpha \cdot S + [(v - \alpha \cdot S + dither) \bmod \Delta] + [\alpha - 1] \cdot x - dither) \bmod \Delta$$

נשתמש בעובדה כי במקום שתי פעולות modulo בטור ניתן לבצע רק אחת בסוף ונקבל:

$$(5.5) \quad y' = (v + \alpha \cdot z + [\alpha - 1] \cdot x) \bmod \Delta$$

נשתמש במסקנה מהטענה כלומר אם מחברים למשתנה אחד עם פרמטר Δ (dither במיקרה שלנו) משתנה אחר כלשהו (במיקרה שלנו $v - \alpha S$) ועושים modulo Δ לאחר מכן (משתנה 'x' במקרה שלנו) אזי התוצאה 'x' אינה תלויה בכניסה כלומר אינה תלויה ב- $v - \alpha S$ ולכן אינה תלויה ספציפית גם ב- 'v'. כלומר לפי המסקנה מהטענה 'x' אינו תלוי ב- 'v'.

נסתכל עתה על (5.5) ונסמן את החלק הימני שלו כ- Z_{eq} כלומר:

$$(5.6) \quad y' = \left(v + \underbrace{\alpha \cdot z + [\alpha - 1] \cdot x}_{Z_{eq}} \right) \bmod \Delta = (v + Z_{eq}) \bmod \Delta$$

כיוון ש- 'x' אינו תלוי ב- 'v' וכן 'Z' אינו תלוי ב- 'v' אזי Z_{eq} אינו תלוי ב- 'v' בכתוב מתמטי:

$$(5.7) \quad x \perp v \rightarrow Z_{eq} \perp v$$

לפי החלק הראשון בטענה 'x' מתפלג כמו dither ומכאן:

$$(5.8) \quad Z_{eq} = \alpha \cdot z + [\alpha - 1] \cdot x = \alpha \cdot z + [\alpha - 1] \cdot dither$$

משוואה (5.8) יחד עם (5.6) מהווה הוכחה של המשפט. עתה נשתמש בסכמה השקולה לסכמת lattice pre-coding כדי לחשוב את הקיבול של מערכת ה- lattice pre-coding. נניח כי 'v' מתפלג אחיד עם פרמטר כלשהוא אז הקיבול של המערכת השקולה נתון על ידי:

$$(5.9) \quad C_{lattice\ pre-coding} = I(v; y') \Big|_{v \sim uniform} = h(out) - h(equivalent\ noise) = \log(\Delta) - h(Z_{eq})$$

נשים לב כי פילוג אחיד בכניסה משיג קיבול ללא אילוצי הספק, במידה ויש אילוצי הספק צריך לבחור Δ (גודל הקונסטלציה הבסיסי) שיקיים $\Delta^2/12 = P$. נחשב עתה חסם תחתון לקיבול על ידי כך שידוע כי אנטרופיה של משתנה כלשהו עם שונות σ^2 תמיד קטנה מאנטרופיה של משתנה גאוסי בעל אותה שונות. כלומר בשונות נתונה למשתנה גאוסי יש את האנטרופיה המקסימלית.

בכתוב מתמטי:

$$(6.1) \quad h(Z_{eq}) \leq h(Z_{eq}^*) \quad ; \quad Var(Z_{eq}) = \sigma_{zeq}^2 \quad ; \quad Z_{eq}^* \sim N(0, \sigma_{zeq}^2)$$

אנטרופיה של משתנה גאוסי ידועה:

$$(6.2) \quad h(Z_{eq}^*) = \frac{1}{2} \log(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma_{zeq}^2)$$

הגודל σ_{zeq}^2 חושב כבר קודם לכן עבור $\alpha = \alpha_{opt}$ במשוואה (4.2) נציב אותו ונקבל:

$$(6.3) \quad h(Z_{eq}^*) = \frac{1}{2} \log\left(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \frac{P \cdot \sigma_z^2}{P + \sigma_z^2}\right)$$

נציב את (6.3) ב- (6.1) ונקבל בעזרת (5.9) כי החסם התחתון לקיבול הוא:

$$(6.4) \quad C_{lattice\ pre-coding} \geq \log(\Delta) - \frac{1}{2} \log\left(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \frac{P \cdot \sigma_z^2}{P + \sigma_z^2}\right)$$

נציב את (3.2) ב- (6.4) ונקבל:

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

$$(6.5) \quad C_{\text{lattice pre-coding}} \geq \frac{1}{2} \cdot \log(12 \cdot P) - \frac{1}{2} \log\left(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \frac{P \cdot \sigma_z^2}{P + \sigma_z^2}\right)$$

ע"י כינוס איברים נגיע ל:

$$(6.6) \quad C_{\text{lattice pre-coding}} \geq \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 + \frac{P}{\sigma_z^2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot e}{12}\right)$$

כלומר הצלחנו אכן להחזיר את ה- '1' לביטוי 'A' במשוואה (3.8). איבר ההפסד הנותר, כלומר ביטוי 'B' במשוואה (3.8) נובע מאי ביצוע shaping על אות הכניסה, דבר זה ייפתר כאשר נעבור לפעולת modulo ביחס לסריג רב מימדי טוב.

ביבליוגרפיה:

- ISI pre-coding from the books of Gitlin, or Proakis, or Lee-Messerschmidt
- Chen, B. Wornell, G.W. / Quantization index modulation: a class of provably good methods for digital watermarking and information embedding, IEEE Transactions on Information Theory, May 2001 vol. 47, issue 4, pg. 1423-1443.
- Erez, U. Shamai, S. Zamir, R "Capacity and lattice strategies for canceling known interference", IEEE Transactions on Information Theory, Nov. 2005 vol 51, Issue: 11 pg. 3820- 3833.

הרצאה 3-4

סריגים ושימוש במערכות תקשורת

סוכם ע"י י אמיר סלומון

"כתיבה על נייר מלוכלך"

Costa הוכיח שבערוץ הכולל אות הפרעה הידוע למשדר בלבד ניתן להגיע לקיבול. חיסור-מודולו Δ במשדר משיג אנפורמציה הודית הקרובה לקיבול. שימוש ב dither במשדר (חיבור) ובמקלט (חיסור) ושיערוך MMSE במוצא נותן חסם לאנפורציה ההדדית בין הכניסה למוצא:

$$I(y'; v) \geq \frac{1}{2} \log \left(\frac{p + \sigma_z^2}{\sigma_z^2} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{2\pi e}{12} \right)$$

כאשר החסם די הדוק. קיים הפסד של $\frac{1}{2} \log \left(\frac{2\pi e}{12} \right) \approx 0.255 \text{ bit}$ פר שימוש ערוץ לעומת הביטוי לקיבול

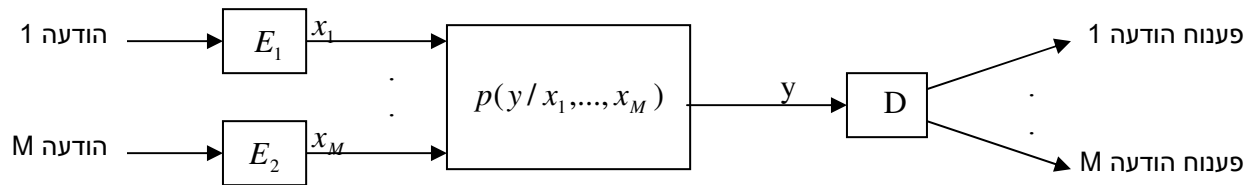
של ערוץ AWGN (ללא אות הפרעה). הפסד זה נובע כתוצאה ממעבר לשימוש בפילוג אחיד $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \right]$

בכניסה (המביא למקסימום אינפורמציה הודית בערוץ מודולו) במקום פילוג גאوسی. כדי ל "החזיר" הפסד זה יש להשתמש בקונסטלציות שידור רב מימדיות בכניסה, למשל ע"י שימוש בסריגים. ראשית, נראה מספר בעיות בתקשורת הקשורות לבעיית ה"כתיבה על נייר מלוכלך" הנותנות מוטיבציה לשימוש בסריגים ע"מ להגיע לקיבול גבוה יותר.

תורת אינפורמציה למערכות מרובות משתמשים

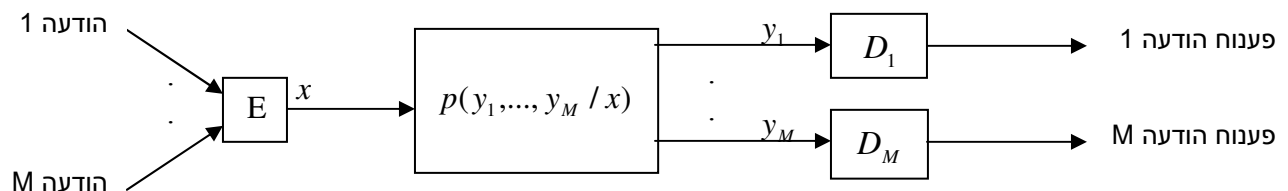
קידוד ערוץ

(1) M.A.C - מקלט אחד, ריבוי משדרים:



המטרה היא לפענח מתוך המוצא הבודד את כל M ההודעות באופן תוך שידור בקצבי שידור כמה שיותר גבוהים.

(2) B.C - משדר אחד, ריבוי מקלטים:

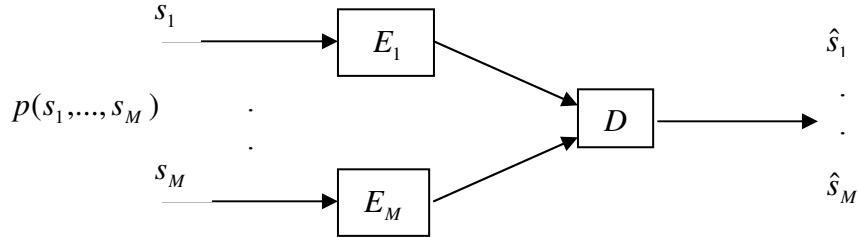


המטרה היא לפענח מתוך כל מוצא את ההודעה המיועדת לו תוך שידור בקצבי שידור כמה שיותר גבוהים.

קידוד מקור

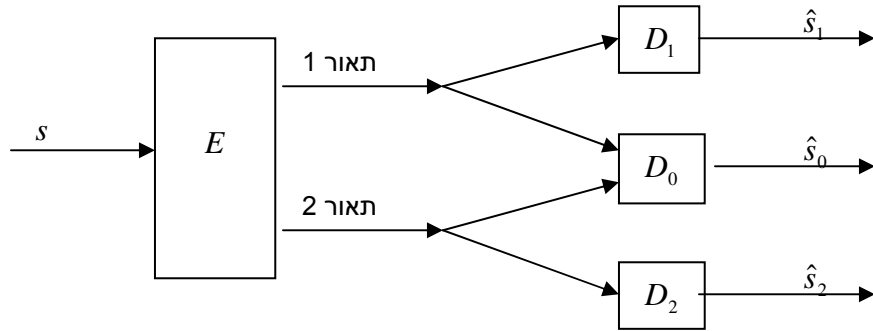
(1) בעיית קידוד מקור מבוזר:

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר



נתונים M מקורות. המטרה היא לשחזר (בד"כ עם עוות) מתוך אוסף הכניסות המקודדות את M המקורות, תוך ניצול ידיעת ההתפלגות המשותפת שלהן.

(2) ריבוי תאורים:



המטרה היא ליצור קידוד יעיל תוך שימוש במספר תאורים שונים של האות s כך שישוחזר במספר מקלטים נפרדים באופן האופטימלי (כלומר עם מינימום עוות).

ייצוג בעיות תקשורת כבעיות "כתיבה על נייר מלוכלך"

ניתן לייצג את בעיות ה- Broadcast Channel וקידוד מקור מבוזר כבעיות שחזור אות בהנתן אינפורמציות צד. נניח למשל כי בבעיית ה- B.C ישנם שני מוצאים, y_1, y_2 . ניתן לרשום $x = x_1 + x_2$ כך ש x_1 "מותאם" למקלט y_1 ו- x_2 "מותאם" למקלט y_2 . באופן זה, ניתן להתייחס לפענוח מתוך y_1 כערוץ בעל רעש ו"הפרעה"

בלתי-ידועה x_2 , ולפענוח מתוך y_2 כערוץ בעל רעש ו"הפרעה" ידועה x_1 .

עבור בעיית קידוד מקור מבוזר, ניתן לראות בפענוח של כל אחד מהאותות s_i כפענוח תוך שימוש באינפורמציות צד הכוללת את כל שאר הכניסות (המקודדות), תוך ניצול התלות ביניהן כפי שבאה לידי ביטוי בהסתברות המשותפת $p(s_1, \dots, s_M)$.

לסיכום, בעיית ה"כתיבה על נייר מלוכלך" מייצגת תחום נרחב של בעיות בעולם התקשורת. עובדה זו נותנת מוטיבציה לנסות להגיע לקיבול עבור סכימה זו. נושא זה יידון בהרחבה בסעיפים הבאים.

סריגים

מטרה – להתגבר על ההפסד של $\frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi e}{12}\right)$ הנגרם עקב שימוש במבוא בעל פילוג אחיד בסכימת ה

"כתיבה על נייר מלוכלך". מרויחים הפסד זה ע"י שימוש בקונסטלציות שידור רב מימדיות המדמות פילוג רצוי ולכן נקרא Shaping gain.

דרך נוספת להתבונן בבעיה היא אם נרשום את "נפח הרעש" לפי שאנון במונחי אנטרופיה כ-

$$h(z) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma_z^2) \text{ ואת גודל תא האות המשודר בפועל במונחים של אנטרופיה כ- } \log(\Delta). \text{ נגדיר}$$

"שולי רעש" (המציון פי כמה חזק הספק האות המשודר ביחס לרעש) כ- $\mu = \frac{\Delta^2}{\sigma_z^2}$ להשגת הסתברות שגיאה

מסויימת P_e עבור שידור לא מקודד בנוכחות רעש גאוס:

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

$$P_e = \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\infty} P_z(z) dz = Q\left(\frac{\Delta/2}{\sigma_z}\right) = Q(\sqrt{\mu}/2)$$

"הפער מהקיבול" של שידור אות לא מקודד ניתן לרישום כ- $h(z) - \log(\Delta) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\mu}{2\pi e}\right)$ ככל ש- μ גדל (כלומר נדרש Pe קטן יותר) כך גם גדל הפער. תוצאה זו נותנת מוטיבציה לפירוש התפלגות הרעש הגאוסית כבעל פילוג גיאומטרי "אופטימלי" במרחב.

משפט (שקילות רעש גאוסית לבן לפילוג אחיד על פני כדור)

א. אם $(x_1, \dots, x_n) = \underline{x}$ מתפלגים i.i.d $N(0, \sigma^2)$ אזי

$$\underline{x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{dist} Unif(n - \text{dim. Ball with } R = \sqrt{n\sigma^2})$$

ב. אם $(u_1, \dots, u_n) = \underline{u}$ מתפלג אחיד על פני n-dim. Ball ברדיוס $\sqrt{n\sigma^2}$ אזי הפילוג המשותף של כל קבוצה

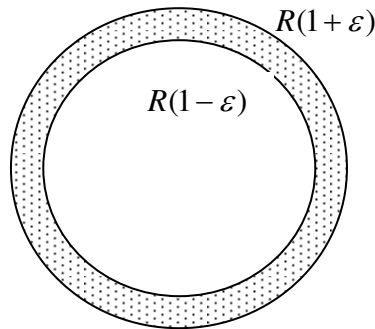
סופית של דגימות של \underline{u} שואף ל- i.i.d גאוסית עם שונות σ^2 עבור $n \rightarrow \infty$.

הוכחת א':

1. $f_x(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \cdot e^{-\frac{\|\underline{x}\|^2}{2\sigma^2}}$ היא צפיפות משותפת איזוטרופית (כלומר תלויה רק בנורמת הוקטור).

2. ע"פי חוק המספרים הגדולים $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2$ כאשר ההתכנסות היא במובן Mean $\|\underline{x}\|^2 \approx \sqrt{n\sigma^2} \Leftarrow \text{square}$

מ- 1 ו- 2 נובע כי עבור n גדול \underline{x} מתפלג בקירוב אחיד על פני קליפה כדורית ברדיוס $R = \sqrt{n\sigma^2}$.
 3. עבור n גדול, פילוג אחיד על פני קליפה כדורית \approx פילוג אחיד על פני הכדור כולו:
 נפח כדור n מימדי הוא $Vol(n - \text{dim Ball}) = V_n R^n$, כאשר V_n הוא נפח כדור עם רדיוס יחידה. נבנה כדור חיצוני ופנימי באופן הבא:



כאשר ε קטן כרצוננו, כך שמתקבלת קליפה כדורית דקה. היחס בין נפח הכדור הפנימי לחיצוני הוא:

$$\frac{[R(1 - \varepsilon)]^n V_n}{[R(1 + \varepsilon)]^n V_n} = \frac{(1 - \varepsilon)^n}{(1 + \varepsilon)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

עבור כל $\varepsilon > 0$

לכן, מבחינת תורת ההסתברות, עבור n מאוד גדול פילוג אחיד על פני כל הכדור שקול לפילוג על הקליפה. כיכום של 1, 2 ו- 3 נותן את התוצאה המבוקשת.
 להוכחה של חלק ב' ראה למשל מאמר "On Lattice Quantization Noise" מאת ד"ר זמיר ומאיר פדר, Transactions on Information Theory IEEE, 1996, ורשימת הביבליוגרפיה במאמר.

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

סריג Λ במרחב האוקלידי R^n הוא אוסף בדיד של נקודות $\underline{l}_i \in R^n$, $\Lambda = \{\underline{l}_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$. את נקודות הסריג ניתן ליצור בעזרת מטריצה יוצרת $\underline{G}(n \times n)$:

$$\Lambda = \left\{ \underline{G} \cdot \underline{i} : \underline{i} \in Z^n \right\}$$

ניתן גם לייצג כל נקודת סריג בתור $\underline{l}_i = \sum_{k=1}^n i_k \cdot \underline{g}_k$ כאשר \underline{g}_k העמודה ה-k של \underline{G} (אוסף העמודות הוא וקטורי הבסיס של הסריג).

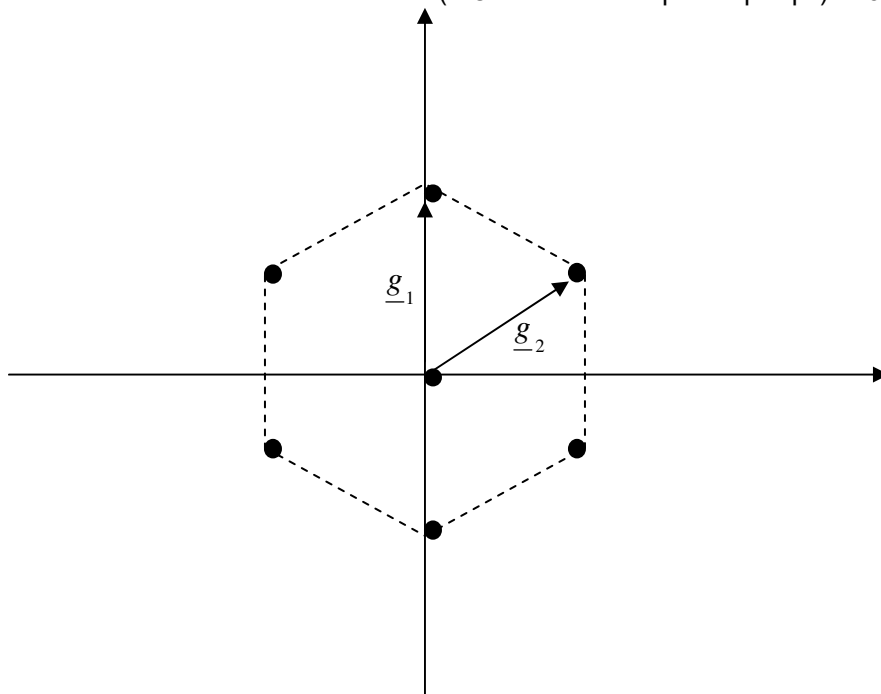
סריג הוא מרחב ליניארי דיסקרטי: $\underline{l}_i \in \Lambda, \underline{l}_j \in \Lambda \Rightarrow \underline{l}_i + \underline{l}_j \in \Lambda$, וכולל תמיד את האפס $\underline{l}_0 = \underline{0}$.

דוגמאות:

- סריג השלמים $\Lambda = Z^n \Leftarrow \underline{G} = \underline{I}_n$, מתקבל Cubic lattice. סריג שקול לסריג השלמים הוא הסריג $\Lambda = \{0, \pm\Delta, \pm 2\Delta, \dots\}$.
- סריג המשושה עבור $n=2$.

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

נתבונן בחלק מהסריג (רק הנקודות הקרובות ביותר לראשית):

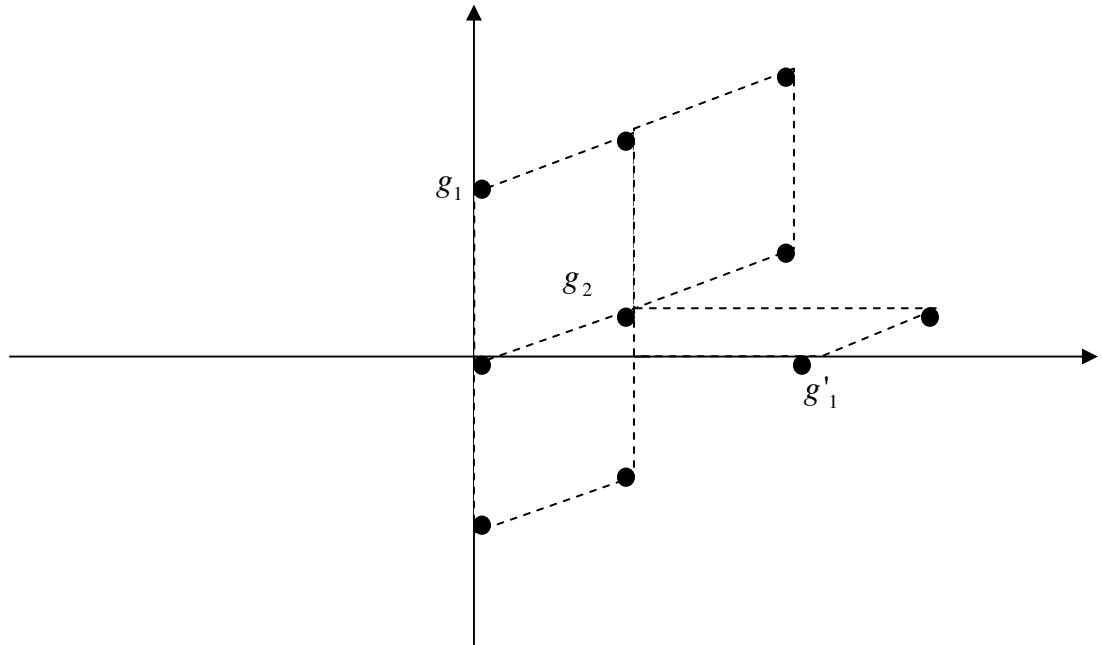


עבור כל סריג, ישנם אינסוף ייצוגים שקולים למטריצה היוצרת – כפל של המטריצה היוצרת במטריצת מספרים שלמים בעלת דטרמיננטה ± 1 , $\underline{G}' = \underline{G} \cdot \underline{J}$, נותנת את אותו הסריג. למשל

$$\underline{G}' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חלוקה סריגית של המרחב:

ניתן לחלק את המרחב R^n ע"י מקבילונים שצלעותיהם הם עמודות (וקטורי הבסיס) של המטריצה היוצרת. קיימות אינסוף חלוקות כאלה בהתאם למטריצה היוצרת איתה עובדים. שתי חלוקות כאלה עבור סריג המשושה הן כדלכמן:



כאשר שלושת המקבילונים הזהים מציינים חלוקת המרחב ע"י מטריצה יוצרת \underline{G} , והמקבילון הנוסף מחלק את המרחב כאשר משתמשים במטריצה יוצרת \underline{G}' .

הגדרה: חלוקה סריגית (lattice partition) של המרחב $\underline{p}_i = \underline{p}_0 + \underline{L}_i = \{ \underline{x} + \underline{L}_i : \underline{x} \in \underline{p}_0 \}$, כן ש \underline{p}_0 היא כל

צורה המאפשרת ריצוף מושלם של R^n (ללא חפיפות ו $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \underline{p}_i = R^n$). צורה כזאת נקראת

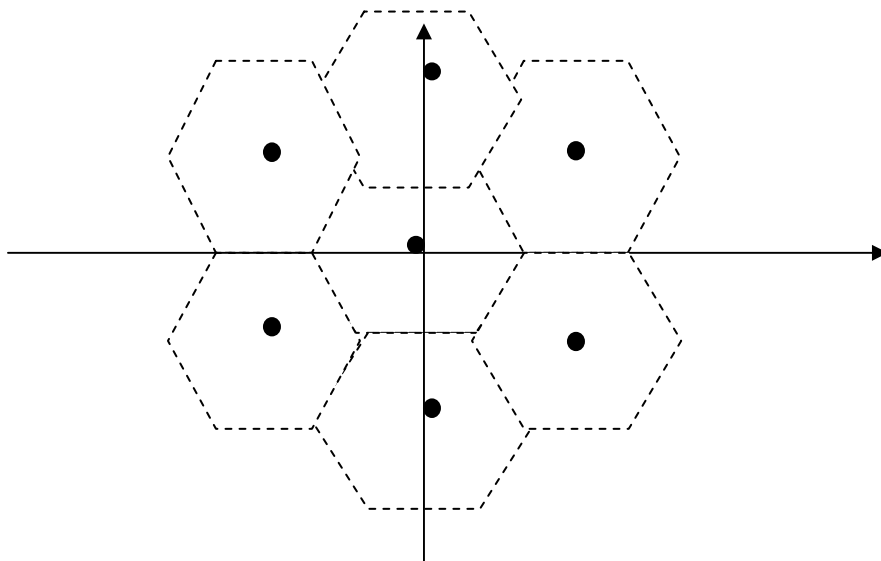
"space filling polytop".

חלוקה למקבילונים התחומים ע"י עמודות המטריצה היוצרת $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ נותנת \underline{p}_0 מהצורה

$$\left\{ \underline{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{g}_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

נפח המקבילון (וכל חלוקה סריגית אחרת) זהה בכל חלוקה אפשרית ושווה לערך המוחלט של דטרמיננט המטריצה היוצרת $Vol(\underline{p}_0) = Vol(\underline{p}_i) = Const = \det(\underline{G})$.

אוסף הנקודות הקרובות לנקודת האפס יותר מכל נקודת סריג אחרת נקרא תא וורוני. תא וורוני הוא "space filling polytop". חלוקת וורוני ניתנת לביטוי באופן $\| \underline{L}_i - \underline{x} \| \leq \| \underline{L}_j - \underline{x} \| \Rightarrow \underline{x} \in \underline{p}_i$ עבור כל j . למשל, עבור סריג המשושה חלוקת וורוני נראית באופן הבא:



מסמנים חלוקה זו ב- V_i , כאשר V_0 הוא תא וורוני בסיסי – אוסף הנקודות ב R^n הקרובות לראשית יותר מכל נקודת סריג אחרת.

חלוקת וורוני היא החלוקה היעילה ביותר, ובעזרתה מגדירים:
1. קוונטיזר סריג (ביחס למרחק אוקלידי):

$$\|x - l_i\| \leq \|x - l_j\| \text{ מתקיים } l_i, l_j \in \Lambda, i \neq j \text{ אם } Q_\Lambda(x) = l_i$$

$$. V_i = \{x : Q(x) = l_i\} - l_i \text{ תא וורוני של } l_i$$

3. נפח הסריג $\Delta V = |\det(\underline{G})| = \text{Vol}(\text{מקבילון}) = \text{Vol}(V_0)$.

4. מומנט שני (פר מימד) $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{V} \cdot \int_{x \in V_0} \|x\|^2 dx$

ניתן להגדיר את המומנט השני גם כ- $\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot E\|\underline{z}\|^2$ כאשר \underline{z} מתפלג אחיד על פני V_0 :

$$. f_{\underline{z}}(\underline{z}) = \begin{cases} \frac{1}{V}, & \underline{z} \in V_0 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

5. רדיוס חוסם וחסום:

רדיוס חוסם R_{out} הוא רדיוס הכדור המינימלי המכיל את V_0 .

רדיוס חסום R_{in} הוא רדיוס הכדור המקסימלי המוכל בתוך V_0 .

6. קל לראות ש- $\frac{1}{n} \cdot R_{in}^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{1}{n} \cdot R_{out}^2$.

ראוי לציין כי קיימות שיטות פענוח תת אופטימליות השקולות לחלוקות סריגיות שאינן תאי וורוני.

גורמי טיב לקידוד

1. לקוונטיזציה: מומנט שני מנורמל $G(\Lambda) = \frac{\sigma^2}{V^{2/n}}$. זהו גודל חסר יחידות שאינווריאנטי למתיחה,

סיבוב, שיקוף.

נגדיר $G_n = \inf_{\Lambda} G(\Lambda)$ כמומנט השני המנורמל המינימלי הניתן להשגה ב R^n . המוטיבציה להגדרה זו

היא

שעבור מקור המתפלג "אחיד במרחב" על פני נפח $V < V_0$, ו- V מוחזק קבוע (שקול לקצב קבוע), העיוות המתקבל

כתוצאה מהקוונטיזציה שווה בקירוב ל $\sigma^2 = V^{2/n} G(\Lambda)$, לכן מעוניינים ב $G(\Lambda)$ קטן.

אי-שיוויון איזו-פרימטרי: מבין כל הצורות במרחב עם נפח נתון, המומנט השני הכי קטן הוא של כדור.

$$G(\Lambda) \geq G_n^* = G(n - \dim. \text{Ball}) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{V_{\text{Ball}}} \cdot \int_{x \in \text{Ball}} \|x\|^2 dx}{V_{\text{Ball}}^{2/n}}$$

דוגמאות:

$$G_1 = G(Z) = \frac{1}{12}$$

עבור סריג המשושה הוכח בשנות ה-80:

$$G_2 = G(\text{hexa-lattice}) = \frac{5}{36 \cdot \sqrt{3}} \approx \frac{1}{12.5}$$

$$. G_n, G_n^* > \frac{1}{2\pi e}$$

משפט (סריגי קוונטיזציה טובים אסימפטוטית):

$$\Leftrightarrow G_n, G_n^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi e} \approx \frac{1}{17}$$

במובן קוונטיזציה תאי וורוני של סריגים אופטימליים שואפים לכדורים.

2. לקידוד ערוץ AWGN:

$$y = x + N, \quad N \text{ is } N(0, \sigma^2) \text{ distributed}$$

אם \underline{x} שייך לסריג לא מוגבל (ללא שפה) אזי:

$$\hat{\underline{x}}_{M.L} = \arg \max_{\underline{x} \in \Lambda} P(y / \underline{x}) \stackrel{\Delta}{=} \arg \min_{\underline{x} \in \Lambda} \|y - \underline{x}\|$$

$$\hat{\underline{x}}_{M.L} = Q_{\Lambda}(x)$$

שזה שקול לפעולת הקוונטיזר: הסתברות השגיאה לפענוח זה היא:

$$P_e = \Pr(N \notin V_0) = \oint_{\underline{x} \notin V_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot \exp\left(-\frac{\|\underline{x}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

שולי רעש (noise margin) של סריג Λ מוגדרים באופן:

$$\mu(\Lambda, P_e) = \frac{\Delta V^{2/n}}{\sigma^2} \Big|_{\Pr(N \notin V_0) = P_e}$$

ברור שעל מנת להשיג $P_e \rightarrow 0$ נדרש $\mu(\Lambda, P_e) \rightarrow \infty$.

נגדיר את החסם התחתון (עבור מימד ספציפי n) של $\mu(\Lambda, P_e)$ הנדרש להשגת P_e כלשהוא:

$$\mu_n(P_e) = \inf_{\Lambda} \mu(\Lambda, P_e)$$

$$\mu_n^*(P_e) = \mu(n - \dim. \text{ Ball}) \quad \text{מגדירים:}$$

$$\mu_n^*(P_e) < \mu_n(P_e) \quad \text{מתקיים:}$$

משפט (סריגים טובים לערוץ AWGN): עבור כל $P_e > 0$, $\mu_n(P_e), \mu_n^*(P_e) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi e$.

$$\frac{1}{n} \log(V) = \frac{1}{2} \log(\mu \cdot \sigma^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2) = h(N(0, \sigma^2)) \Leftarrow$$

$$R = \frac{1}{n} \log\left(\frac{\text{constellation volume}}{V}\right) \Leftarrow \text{סריגים טובים במובן הנ"ל}$$

מבטחים קצב שידור מקסימלי:

$$R = \text{const} \tan t(\text{transmitted power}) - \frac{1}{n} \log(V) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{const} \tan t - h(N) = C$$

סריגים מקוננים

הגדרה: סריגים Λ_1, Λ_2 הם סריגים מקוננים אם מתקיים $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$, כאשר $\underline{G}_2 = \underline{G}_1 \cdot \underline{J}$ מטריצה של

שלמים.

קבוצת הוקטורים המובילים את הקוסטים היחסיים של Λ_1 ביחס ל- Λ_2 מוגדרת באופן:

$$V_2 = \left\{ \underline{l} \bmod \Lambda_2 : \underline{l} \in \Lambda_1 \right\} \stackrel{\Delta}{=} \Lambda_1 \bmod \Lambda_2, \quad \text{כאשר } V_2 \text{ הוא תא הוורוני של סריג } \Lambda_2.$$

$$\underline{x} \bmod \Lambda = \underline{x} - Q(\underline{x}) \in V_0 \quad \text{פעולת "מודולו סריג" מוגדרת באופן:}$$

קוסט מוגדר כאוסף הנקודות של Λ_1 הנמצאות באותו מיקום יחסית ל- Λ_2 :

$$\text{coset}(\underline{v}) = \left\{ \underline{l} \in \Lambda_1 : \underline{l} \bmod \Lambda_2 = \underline{v} \right\}, \quad \text{כאשר } \underline{v} \in \Lambda_1 \bmod \Lambda_2$$

סריגים מקוננים טובים אסימפטוטית

אם Λ_2 הוא סריג קוונטיזציה עם מומנט שני σ_2^2 , $V_2^{2/n} = \sigma_2^2 / G(\Lambda_2)$, Λ_2 ייקרא "סריג גס" ו- Λ_1 הוא סריג לקידוד ערוץ AWGN עם שונות רעש σ_1^2 ושולי רעש $\mu(\Lambda_1, P_e)$, $V_1^{2/n} = \mu(\Lambda_1, P_e) \cdot \sigma_1^2$, Λ_1 ייקרא "סריג עדין" אזי מתקיים ש:

$$R = \frac{1}{n} \log |\Lambda_1 \bmod \Lambda_2| = \frac{1}{n} \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) - \frac{1}{2} \log (G(\Lambda_2) \cdot \mu(\Lambda_1, P_e))$$

כאשר הגודל $-\frac{1}{2} \log (G(\Lambda_2) \cdot \mu(\Lambda_1, P_e))$ הוא "הפסד הקיבול".

טענה: עבור כל $P_e > 0$, קיימים זוגות $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log (G(\Lambda_2) \cdot \mu(\Lambda_1, P_e)) \rightarrow 0$.

קיימת גם טענה למקרה ההפוך של דחיסת אות, כלומר Λ_2 סריג לקידוד ערוץ AWGN ו- Λ_1 סריג לקוונטיזציה – במקרה הזה איבר ההפסד עם סימן חיובי ולכן מציין הפסד דחיסה. מטענה זו נובע כי עבור כל קצב הקטן מהקיבול (או קצב הגדול מאנטרופיית המקור במקרה של קידוד מקור), ניתן למצוא צמדי סריגים (סריג קוונטיזציה וסריג לערוץ AWGN) כך שנקבל הסתברות שגיאה קטנה כרצוננו.

ביבליוגרפיה:

1. M.H.M. Costa. "Writing on dirty paper". IEEE Trans. Information Theory, IT-29:439-441, May 1983.
2. J.H. Conway and N.J.A. Sloane. "Sphere Packings, Lattices and Groups". Springer-Verlag, New York, N.Y., 1988.
3. R.Zamir, S.Shamai and U.Erez, "Nested Linear/Lattice Codes for Structured Multiterminal Binning", IEEE Transactions on Information Theory, pp. 1250-1276, June 2002.

הרצאה - 5

בעיית קידוד מקור עם אינפורמציות-צד למקרה הגאוס (Gaussian Wyner-Ziv)

סוכם ע"י אנטולי הינה

הבעיה:

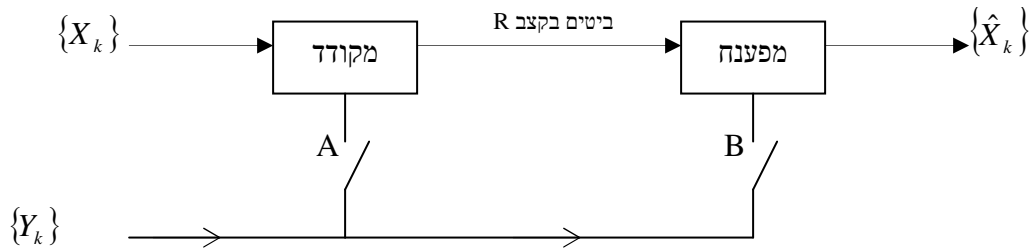
נניח $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של הגרלות בת"ס של משתנים גאוסיים במשותף קורלטיביים X, Y .

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2$$

נגדיר מדד עיוות ריבועי:

המטרה היא למצוא את הקצב המינימלי R בו ניתן לקודד את X כך ש: $E(X - \hat{X})^2 \leq D$ עבור D נתון.

נתבונן בשלושה מקרים:



1. מפסקים A, B פתוחים. כלומר אין אינפורמציות-צד "זמינה".

$$R_X(D) = \min_{p(x, \hat{x}) : E d(x, \hat{x}) \leq D} I(X; \hat{X})$$

הפיתרון במקרה זה הוא הפיתרון הרגיל מתורת שנון:

2. מפסקים A, B סגורים. כלומר הן המקודד והן המפענח בעלי גישה לאינפורמציות-הצד $\{Y_n\}$.

$$R_{X|Y}(D) = \min_{p(x, \hat{x}) : E d(x, \hat{x}) \leq D} I(X; \hat{X} | Y)$$

הפיתרון עבור מקרה זה יהיה:

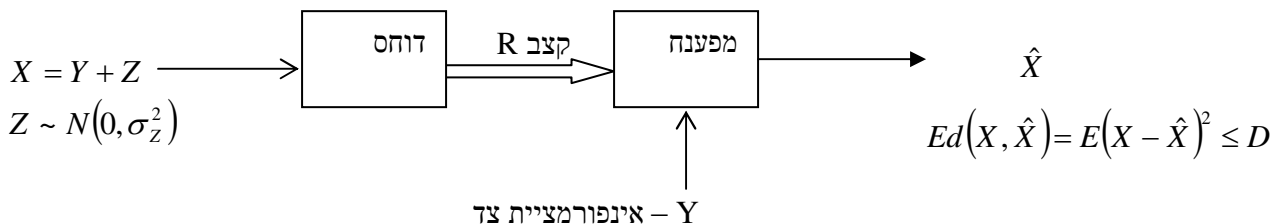
3. פתוח A, סגור B. כלומר רק המפענח יש גישה לאינפורמציות-הצד.

$$R^*(D) \equiv R_{X|Y}^{WZ}(D)$$

נסמן את הפיתרון עבור מקרה זה ב-

אנו נתמקד במקרה השלישי (שני המקרים הראשונים טריוויאליים).

היות ואנו מסתכלים על המקרה הגאוס, נתמקד בסכימה הבאה:



נשים לב כי סכימה זו תקפה עבור כל מקרה של (X, Y) גאואסיים במשותף. היות ונוכל להמיר מקרה זה תמיד לבעיית WZ שקולה שבה: $X = \tilde{Y} + \tilde{Z}$. לשם פשוטות נסתכל על המקרה שבו כל התוחלות הן אפס (אחרת בסכימת השידור נוכל להחסיר ולהוסיף את התוחלות המתאימות...).

עבור מקרה זה ידוע כי שיערוך אופטימלי במובן MMSE (אשר במקרה הגאואסי מזדהה עם שיערוך

$$\tilde{Y} \hat{=} \hat{X}(Y) = \alpha Y, \quad \alpha = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}$$

ומעיקרון האורתוגונליות מתקיים: $Z \hat{=} X - \hat{X} = X - \tilde{Y} \perp \tilde{Y}$, והיות וכל המ"א גאואסיים במשותף ובעלי תוחלת אפס, מתקיים כי Z, \tilde{Y} בת"ס וכן ש: $\sigma_Z^2 = E(X - \hat{X})^2 = E\{\text{Var}(X | \tilde{Y})\}$. וקיבלנו את הדרוש.

נראה כיצד ניתן להרוויח את ה-Shaping Gain בבעיה זו.

Wyner-Ziv (1976, 1978):

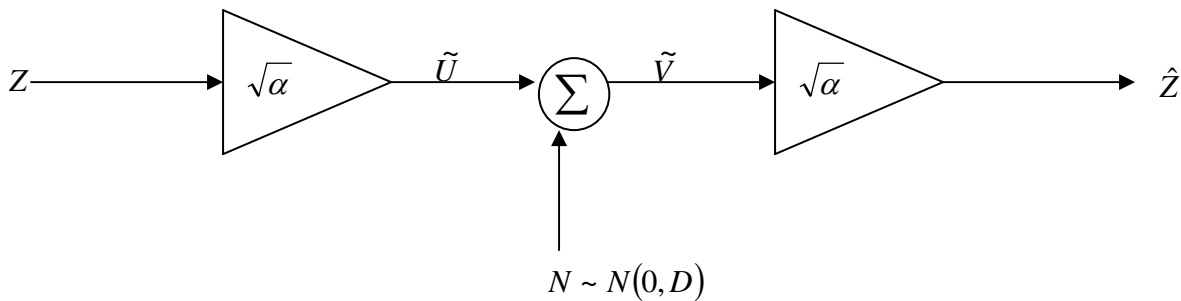
$$R^*(D) \hat{=} R_X^{WZ}(D) = R_{X|Y}(D) = R_Z(D) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_Z^2}{D} \right)$$

(הוכיחו משיקולי אינפורמציה בעזרת random binning).

נראה כי ניתן להגיע למה שמבטיחים WZ ע"י שריגים מקוננים (Nested Lattices).

פתרון ע"י שריגים מקוננים:

הערוץ (הקידומי) המגשים לפונקציית קצב-עיוות של $Z \sim N(0, \sigma_Z^2)$



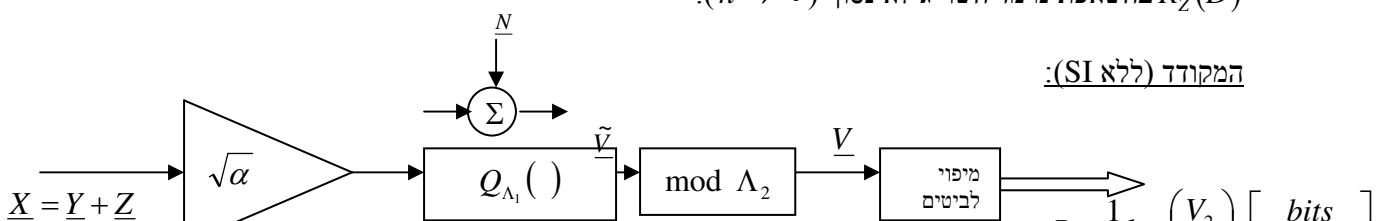
$$\alpha = \alpha_{opt} = 1 - \frac{D}{\sigma_Z^2}, \quad E(Z - \hat{Z})^2 = D, \quad I(Z; \hat{Z}) = R_Z(D) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_Z^2}{D} \right)$$

כאשר: $0 \leq D \leq \sigma_Z^2$ (אחרת אין טעם לדחוס)

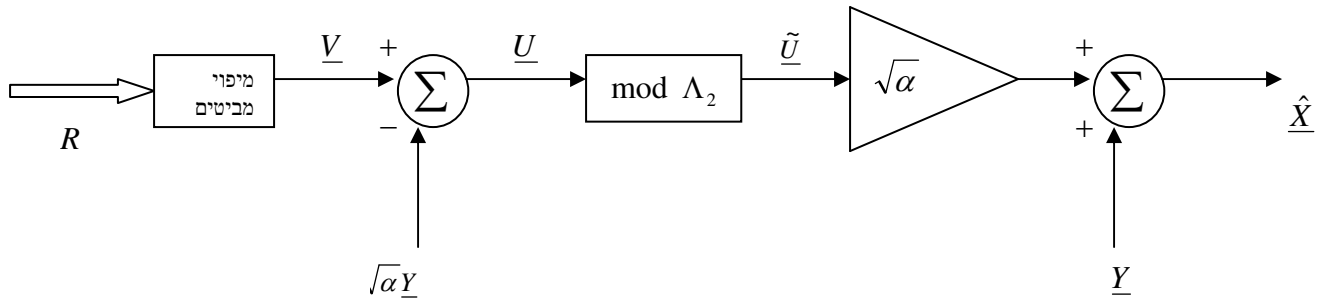
נשים לב גם כי מתכונות האינפורמציה ההדדית: $I(Z; \hat{Z}) = I(\tilde{U}; \tilde{V}) = I(\tilde{U}; \tilde{U} + N)$ (היות והכפלה בקבוע שונה מאפס אינה משפיעה על אינפורמציה הדדית)

נבנה דיאגרמה שמתבססת על הערוץ הנ"ל בשילוב עם שריגים מקוננים, ונראה כי אנו משיגים את $R_Z(D)$ בהשאפת מימד השריג לאינסוף ($n \rightarrow \infty$).

המקודד (ללא SI):



המפענח (עם SI):



לפי משפט, שריגי קוונטיזציה "טובים אסימפטוטית" ושואפים לכדורים עם נפח זהה לתאי הוורונוי של השריגים. יתר על כן, פילוג אחיד ע"פ כדור \Leftrightarrow רעש גאוסי i.i.d. ועל כן אסימפטוטית Q_{Λ_1} בעצם מבצע פעולה השקולה לתוספת רעש N אשר אסימפטוטית הינו רעש גאוסי "לבן".
נבחר את השריג Λ_1 ("השריג העדין") כך שיהיה שריג קוונטיזציה טוב לעיוות $D = \sigma_1^2$. כלומר, הרעש האפקטיבי N מתפלג לפי: $N \sim N(0, D \cdot I_n)$ (כאשר $n \rightarrow \infty$).

על מוצא הקוונטיזציה נבצע פעולת מודולו Λ_2 (כאשר $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$) $G_2 = G_1 J$, J – מטריצת שלמים. כלומר אנו מדברים על "שריגים מקוננים". פעולה זו בעצם אומרת כי אנו "עובדים" בתוך התא של השריג הגס, כאשר מתוך אינפורמציה הצד נדע במפענח באיזה תא של השריג הגס אנו נמצאים. ממשפט, "שריגים טובים לקידוד ערוץ AWGN", ידוע כי עבור כניסה גאוסי (וכאמור קודם, מוצא הקוונטיזציה Q_{Λ_1} הינו אסימפטוטית גאוסי) שימוש בשריג בתור ספר קוד אסימפטוטית שקול לתוספת רעש גאוסי לבן עם שונות σ_2^2 : $\frac{1}{n} \log(V_2) = \frac{1}{2} \log(\mu_n \sigma_2^2)$ (כאשר μ_n הינו "שולי הרעש").
אנו נבחר $\sigma_2^2 = \sigma_z^2$.

עבור שריגים מקוננים (טובים) ידוע כי, אם Λ_2 הוא שריג לקידוד ערוץ AWGN ("גס") עם מומנט שני σ_2^2 ו- Λ_1 הוא שריג קוונטיזציה ("עדין") עם שונות רעש σ_1^2 ושולי רעש

$$\mu(\Lambda_1, P_e) \text{ אזי, } \left(V_1^n = \frac{\sigma_1^2}{G_n(\Lambda_1)} \right)$$

$$R \triangleq \frac{1}{n} \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) + \frac{1}{n} \log(G_n \mu_n)$$

כאשר: $G_n \triangleq \inf_{\Lambda} G(\Lambda)$ הינו המומנט השני המנורמל המינימלי ברי-ההשגה ע"י שריג ב- \mathcal{R}^n ;

$\mu_n \triangleq \inf_{\Lambda} \mu(\Lambda, P_e)$ הינו שולי הרעש האופטימליים ברי-ההשגה ע"י שריג ב- \mathcal{R}^n עבור הסתברות שגיאה P_e .

האיבר $\frac{1}{n} \log(G_n \mu_n)$ הינו בעצם הפסד קצב דחיסה, כאשר לפי משפט: $\mu_n > 2\pi e$, $G_n > \frac{1}{2\pi e}$. אך

בגבול ($n \rightarrow \infty$): $\mu_n \rightarrow 2\pi e$, $G_n \rightarrow \frac{1}{2\pi e}$, ולכן: $\frac{1}{n} \log(G_n \mu_n) \rightarrow 0$ (לכל הסתברות שגיאה,

קטנה כרצוננו $P_e > 0$).

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

$$^3, R \triangleq \frac{1}{n} \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) - \frac{1}{n} \log(G_n \mu_n) \rightarrow \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right)$$

כך שבעצם משיגים אסימפטוטית את מה שמבטיחים WZ ע"י הסכימה שהצגנו מבחינת קצב.

$$\text{נסתכל עתה מה מתקבל בכל שלב בסכימה (ונראה שהעיוות הממוצע } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k - \hat{X}_k)^2 \text{ אכן שווה ל-} D \text{.)}$$

לאחר הכפלה ב- $\sqrt{\alpha}$ וקוונטיזציה (אשר כאמור שקולה לתוספת רעש גאוסי לבן במקרה זה), נקבל:

$$\tilde{V} = (\sqrt{\alpha} \underline{Y} + \sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N})$$

$$\text{נשים לב כי שונות החלק ה"מעניין" הינה: } \sigma_Z^2 = \left(1 - \frac{D}{\sigma_Z^2}\right) \sigma_Z^2 + D = \alpha \sigma_Z^2 + D$$

(N ו-Z רעשים בת"ס).

לאחר מודולו השריג הגס, נקבל: $\underline{V} = (\sqrt{\alpha} \underline{Y} + \sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}) \bmod \Lambda_2$. וזה גם האות שנמפה לביטים ונשלח למפענח.

במפענח אנו מבצעים החסרת מודולו של החלק ה"לא מעניין" ולפי חוקי מודולו⁴:

$$\tilde{U} = [(\sqrt{\alpha} \underline{Y} + \sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}) \bmod \Lambda_2 - \sqrt{\alpha} \underline{Y}] \bmod \Lambda_2 = [\sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N} - \sqrt{\alpha} \underline{Y}] \bmod \Lambda_2 = [\sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}] \bmod \Lambda_2$$

אך כבר ראינו כי שונות $\sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}$ הינה σ_Z^2 וכן קבענו את השריג הגס Λ_2 להיות שריג טוב לקידוד ערוץ AWGN עם מומנט שני $\sigma_Z^2 = \sigma_2^2$. ניזכר כי תא וורונוי של שריג (טוב לקידוד ערוץ AWGN)

שואף לכדור n-מימדי עם רדיוס $\sqrt{n\sigma^2}$ וכן רעש גאוסי שואף לפילוג אחיד בתוך כדור n-מימדי עם רדיוס $\sqrt{n\sigma^2}$ (הן במובן a.e. והן במובן m.s.). ולכן בגבול, פעולת המודולו לא תשפיע על $\sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}$,

$$\text{ולכן: } \tilde{U} = [\sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}] \bmod \Lambda_2 \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\alpha} \underline{Z} + \underline{N}$$

לאחר הכפלה (נוספת) ב- $\sqrt{\alpha}$ והוספת מידע הצד \underline{Y} נקבל (בגבול $n \rightarrow \infty$):

$$\hat{X} = \underline{Y} + \alpha \underline{Z} + \sqrt{\alpha} \underline{N} = \underline{Y} + \hat{Z}$$

וקיבלנו את אותה השר"מ כמו בערוץ (הקידמי) המגשים לפונקציית קצב-עיוות של $Z \sim N(0, \sigma_Z^2)$

$$\text{שאותו גם ניסינו בעצם לממש) } E(X - \hat{X})^2 = E(Z - \hat{Z})^2 = D$$

כלומר הצלחנו להעביר בקצב $R \triangleq \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right)$ ולשמור על עיוות שלא עולה על D. ובעצם השגנו

אסימפטוטית את מה שמבטיחים WZ.

הסבר אינטואיטיבי וגרפי לגבי בחירת השריגים:

בחרנו את השריג הגס בתור שריג לקידוד ערוץ AWGN, היות ו"לא נרשה" חפיפה/בילבול בין התאים של שריג זה. כי במקרה כזה תהיה טעות גדולה...

לעומת זאת, השריג העדין קובע לנו את העיוות, ולכן למשל "חפיפה" בין תאים עדינים לא תגדיל את העיוות אך תגרור כמוזן הפסד בקצב...

בפועל אנו משדרים את האינדקס של מוביל ה-coset, כאשר מידע הצד Y קובע את האיבר המדוייק

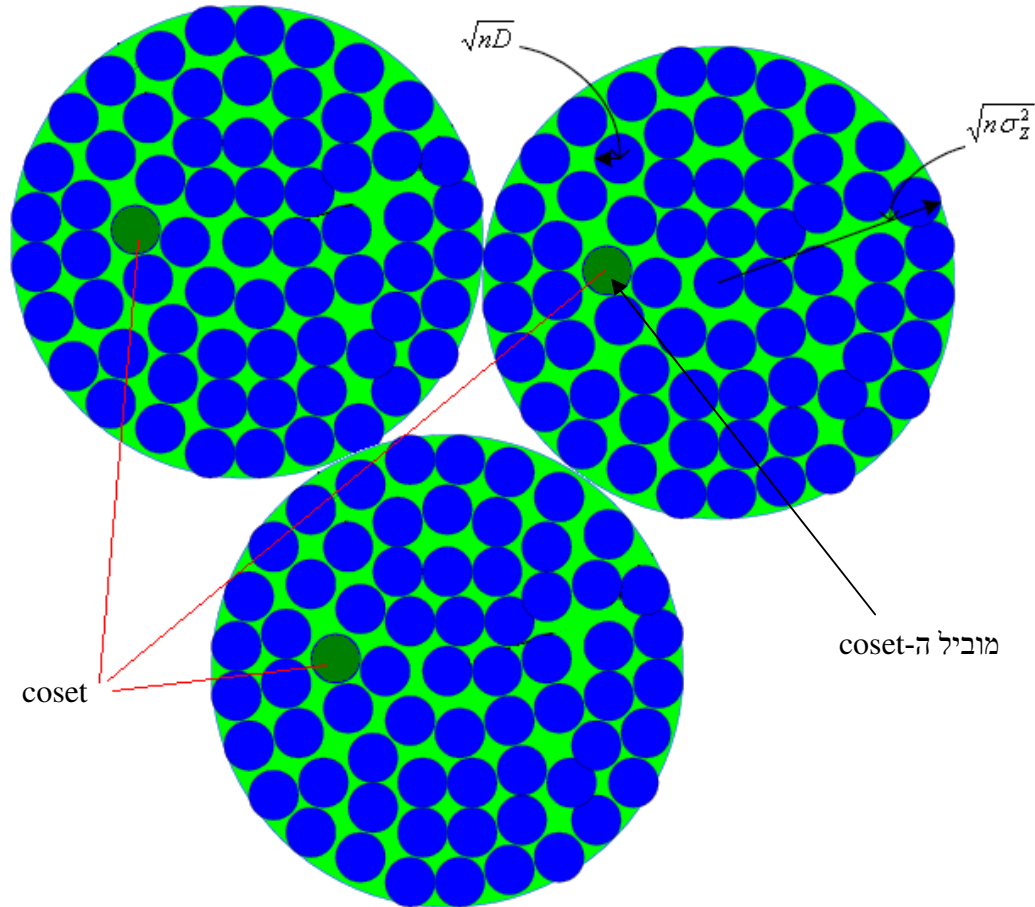
בתוך ה-coset. לשם שידור האינדקס דרושים [bits] $\log \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{n}{2} \log \left(\frac{\sigma_Z^2}{D} \right)$ ולכן הקצב פר מימד הינו:

³ לפי משפט: קיימים זוגות $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ כך ש: $\frac{1}{n} \log(G_n \mu_n) \rightarrow 0$

⁴ $[(A \bmod C) \pm B] \bmod C = [A \pm B] \bmod C$

$$\frac{1}{n} \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_z^2}{D} \right) [\text{bits}]$$

נוכל לחשוב על השריגים המקוננים גרפית בצורה הבאה:



הערות:

1. בשרטוט הכל משורטט בדו-מימד, אך בפועל אנו עובדים כמובן ב- $n \rightarrow \infty$. לכן גם המרווחים בין הכדורים לא קיימים במציאות...
2. השרטוט הנ"ל מתייחס לתמונה שאחרי ה-Pre Filter ולפני ה-Post Filter (כלומר לאחר ההכפלה הראשונה ב- $\sqrt{\alpha}$ - במשדר, ולפני ההכפלה השנייה ב- $\sqrt{\alpha}$ - במקלט).

דואליות:

בעיית WZ הגאוסית הינה הבעייה הדואלית לבעיית Costa, אשר הוצגה בפרק "קידוד ערוץ גאوسی עם אינפורמציה צד". בפרק המדובר, היה הפסד Shaping gain ממנו ניתן להיפטר בצורה זוהה כמעט לזו שהוצגה בפרק זה. בעייה הדואלית, המשדר והמקלט "מחליפים תפקידים" ובשריגים המקוננים השריג העדין הינו שריג טוב לקידוד ערוץ AWGN, בעוד שהערוץ הגס הינו ערוץ טוב לקוונטיזציה (בדיוק הפוך מבעיית WZ). וזאת היות ושם לא נרשה חפיפה/בילבול בין מילים/תאים של השריג העדין (אחרת נשגה בפיענוח). לעומת זאת, השריג הגס קובע לנו את ה-coset, כאשר אם מילה אחת תשווין ליותר מ-S אחד, זה ייצור יתירות בקצב (אם נסתכל על האינפורמציה ההדדית היא תגדל עקב החפיפה)...

קריאה נוספת:

- [1] A. D. Wyner, J. Ziv, "The Rate-Distortion Function for Source Coding with Side-Information at the Decoder", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 22, pp. 1-10, Jan. 1976.
- [2] A. D. Wyner, " The Rate-Distortion Function for Source Coding with Side Information at the Decoder II: General Sources", *Information and Control*, vol. 38, pp. 60-80, July 1976
- [3] R. Zamir, S. Shamai, U. Erez, "Nested Linear/Lattice Codes for Structured Multiterminal Binning", *IEEE Trans. Inform. Theory*, special A.D. Wyner issue, pp. 1250-1276, June 2002.
- [4] S.S. Pradhan, K. Ramchandran, "Distributed source coding using syndromes (DISCUS): design and construction", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, pp. 626-643, March 2003.
- [5] S.S. Pradhan, K. Ramchandran, "Distributed source coding using syndromes (DISCUS): design and construction", *IEEE DCC '99* , pp. 158-167, 29-31 March 1999.

הרצאה - 6

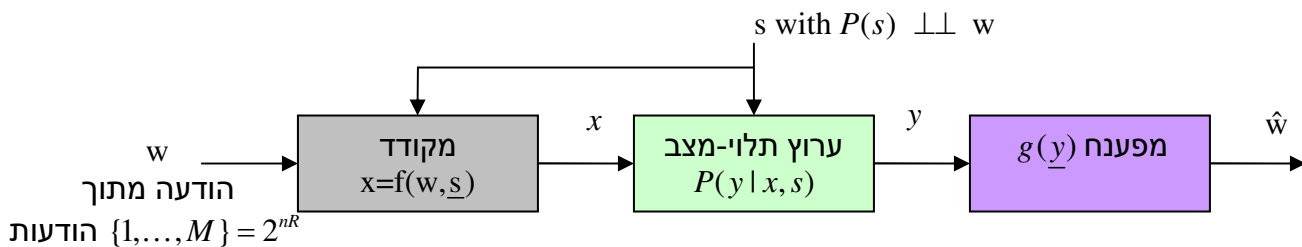
בעית גלפנד-פינסקר (Gel'fand-Pinsker):

קידוד עם אינפורמציה צד (לא סיבתית) במשדר

סוכם ע"י אורי שנטל

הגדרת הבעיה

נתון ערוץ כללי תלוי-מצב מהצורה (איור 1)



איור 1

אינפורמציה צד (Side Information) s מקורה "מהטבע" ואינה תלויה בהודעות w . נניח שאינפורמציה הצד המסופקת למקודד (המשדר) אינה סיבתית. כמו כן נניח שכל המידע בבלוק השידור ידוע למקודד. בנוסף ניתן (אופציונלי) לאלץ פונקציה מחיר לכניסה, $E\rho(x) \leq c$.

נשתמש בסימונים הבאים:

- n = אורך בלוק השידור
- R = קצב השידור (ביט לשימוש ערוץ)
- $f(\cdot)$ = פונקציה המקודד
- $g(\cdot)$ = פונקציה המפענח
- P_e = הסתברות השגיאה ($\Pr(\hat{w} \neq w)$)
- $C_{SI@Tx} = func(P(y|x,s), P(s), (\rho(\cdot), c))$ = הקצב R המקסימאלי (במובן סופרמום) כך שלכל $P_e > 0$ קיימת מערכת של $(u, R, f(\cdot), g(\cdot))$ הנותנת הסתברות שגיאה כזו.

רקע היסטורי

בעית גלפנד-פינסקר (להלן GP) הוצגה לראשונה ב-1980 [1] ומתבססת למעשה על בעיה שטופלה במקור ע"י שאנון עוד בשנת 1958 [2]. שאנון פתר את בעית הערוץ עם אינפורמצית צד סיבתית, דהיינו $x_i = \text{func}(w, s_1, \dots, s_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$. GP פתרו את

הבעיה למקרה הלא-סיבתי, כלומר x_i תלוי בכל הוקטור s . יש לציין שעבודתם המקורית של GP לא קושרה לזו של שאנון.

קיבולים נוספים - הגדרות

בנוסף לקיבול עבור אינפורמצית צד במשדר ניתן להגדיר גם:

- המקרה "הקלאסי": קיבול עם אינפורמצית צד במקלט בלבד (ז"א s הוא כמו כניסה

$$C_{SI@Rx} = \max_{P(x)} I(x; s, y) = I(x; y | s) \quad \text{נוספת למקלט (I)} \\ \text{I}(x, s) = 0 \\ \text{+chain rule for M.I.}$$

- קיבול עם אינפורמצית צד בשני צדי המערכת $C_{SI@Both} = \max_{P(x, s)} I(x; y | s)$

במקרה זה האופטימיזציה היא על פילוגי כניסה התלויים ב- s שידוע למשדר (סיבתית או לא-סיבתית), ולכן ניתן לקבל קיבול גבוה יותר מאשר במקרה הקודם.

- קיבול ללא אינפורמצית צד $C_{no\text{-}ISI} = \max_{P(x)} I(x; y)$. זהו הפתרון הקלאסי של

$$\text{שאנון עבור ערוץ המוגדר ע"י } P(y | x) = \sum_s P(s) P(y | x, s) = \sum_s P(s, y | x)$$

משפט GP (1980)

קיבול הערוץ תלוי-המצב, כפי שתואר לעיל, בהינתן אינפורמצית צד לא-סיבתית במשדר, $C_{SI@Tx}$, מתקבל ע"י

$$C_{SI@Tx} = \max_{u, x: u \leftrightarrow (s, x) \leftrightarrow y} [I(u; y) - I(u; s)] = \max_{u, x: u \leftrightarrow (s, x) \leftrightarrow y} [H(u | s) - H(u | y)]$$

כאשר $u \leftrightarrow (s, x) \leftrightarrow y$ מסמל שלשה מרקובית⁵, ואילו השוויון האחרון מניח בעיה דיסקרטית ומתקבל מפירוק לאנטרופיות וקיזוז אנטרופית u . המשתנה u הינו משתנה עזר מעל אלפבית כללי, כאשר הפילוג המשותף מקיים

$$P(u, s, x, y) = P(s, u, x) P(y | u, s, x) = P(s) P(u | s) P(x | u, s) P(y | s, x)$$

כאשר השוויון האחרון מתקבל בזכות המרקוביות. במקרה של אילוץ מחיר כניסה (cost function), דוגמת אילוץ על הספק השידור, אזי נדרוש גם $E\rho(x) \leq c$.

הערות על משפט GP

א. נשאלת השאלה מהי המשמעות הפיזיקלית של משתנה העזר u שאינו מופיע

בתיאור הבעיה המקורית.

ב. ניתן להראות שהפתרון האופטימלי, דהיינו זה שמביא את שמביא את קצב

השידור למקסימום, יהיה פונקציה דטרמיניסטית של u, s . ז"א x נקבע חד-ערכית ע"י u ו- s לפי פונקציה דטרמיניסטית $x = \varphi(u, s)$. הסבר היוריסטי ניתן למצוא

בכך שאם x האופטימלי יהיה תלוי במשתנה אקראי נוסף z שאינו משפיע על

⁵ $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \Rightarrow I(A; C | B) = 0, P(A | B, C) = P(A | B)$

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

- הערוץ, ז"א $x = \varphi(u, s, z)$, אזי אקראיות זו יכולה רק להקטין את האינפורמציה ההדדית. לפיכך, במקום מציאת מקסימום על פני (u, x) , מספיק לבצע מקסימיזציה ביחס ל- u בלבד שיקבע באופן דטרמיניסטי גם את x המיטבי.
- ג. נקודת אזהרה: ייתכן u "לא-טוב". בחירת u "לא-טוב" תגרור תוצאה לא פיזיקלית של "קיבול שלילי" $I(u; y) - I(u; s) < 0$.
- ד. במקרה של בעיה דיסקרטית ניתן להראות כי גודל האלפבית של u חסום ע"י סכום האלפבית של x ו- s , דהיינו $|u| \leq |x| + |s|$.
- ה. הקיבול של בעית הערוץ עם אינפורמציה צד סיבתית (שאנון, 1958) מתקבל ע"י משפט GP תחת האילוץ של u, s בת"ס $(u \perp\!\!\!\perp s)$. כלומר,

$$C_{SI(Causal)@Tx} = \max_{\substack{u: u \perp\!\!\!\perp s \\ x = \varphi(u, s)}} I(u; y)$$

יש לשים לב כי אין צורך באיבר השני של משפט GP משום ש- $u \perp\!\!\!\perp s$. במאמרו מ-1958, שאנון טען כי u יילקח מתוך תת-קבוצה של איחוד האלפבית של s ו- x , ולכן גודל האלפבית של u יהיה חסום ע"י $|u| \leq |x| + |s|$. ברור כי מתקיים $C_{SI(non-causal)@Tx} \geq C_{SI(causal)@Tx}$. אמנם במקרה הסיבתי איננו מפחיתים את $I(u; s)$ בביטוי הקיבול, אך מנגד אנו דורשים אופטימיזציה מעל $u \perp\!\!\!\perp s$, דרישה המגבילה את סוג התלויות u, s האפשריות.

דוגמאות למקרים פרטיים של בעית GP

ערוץ עם הפרעה אדיטיבית ידועה במשדר (Writing on Dirty Paper) או בעית [3] Costa

ערוץ מהצורה

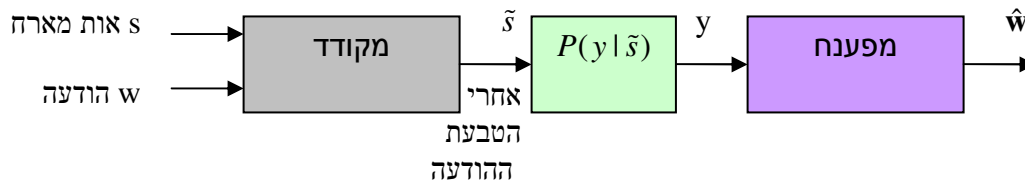
$$y = x + s + z$$

עם אילוץ הספק (פונקצית מחיר) $\frac{1}{n} E \|\underline{x}\|^2 \leq P$. ראינו לגבי בעיה זו כי מתקיים

$$C_{SI(non-causal)@Tx} = C_{SI@Both}$$

משפחה של בעיות "סימני מים" (digital watermarking)

נסתכל על המודל



איור 2

$$\text{ונדרוש עיוות ממוצע חסום } D \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \rho(s_i, \tilde{s}_i)$$

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

נסתכל על מקרה פרטי של $\frac{1}{n} E \| \underline{s} - \tilde{s} \|^2 \leq D$. אזי דוגמא זו (איור 2) מתלכדת עם הדוגמא הקודמת, משום שניתן להסתכל על \tilde{s} למעשה כעל $x + s$ בבעיית Costa.

ערוץ עם דעיכות (fading channel)

ערוץ מהצורה $y = x \cdot s + z$, כאשר s הן הדעיכות (flat fading). במקרה הוקטורי יכול להתקבל ערוץ עם זכרון (fast fading). עבור ערוץ זה ידוע כי

$$C_{SI @ Rx} = E_s \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P \cdot s^2}{\sigma_z^2} \right)$$

ערוץ עם רעש אימפולסיבי

מהצורה $y = x + s \cdot z$, כאשר s קובע אם הרעש חזק או חלש.

ערוץ קוסטה/שאנון בינארי

ערוץ זה זהה לערוץ Binary Symmetric Channel (BSC) עם סיכוי חילוף p . אולם במקרה זה המשדר יודע אם התרחש חילוף. אזי לכאורה זו בעיה טריוויאלית משום שהמשדר ישדר ביטים הפוכים במקרה של שגיאה. הבעיה הופכת למעניינת אם מוסיפים אילוץ על הכניסה כך שמספר ההיפוכים המותרים חסום. למשל, נדרוש שמספר האחדים בכניסה יהיה קטן ממספר האפסים. ידוע שבמקרה זה עבור אינפורמציה צד לא סיבתית ניתן עדיין לקבל $C_{SI @ Both} = H_B(x)$ בעזרת קוד. לעומת זאת במקרה של אינפורמציה צד סיבתית נפסיד קיבול.

"זיכרון עם תאים דפוקים"

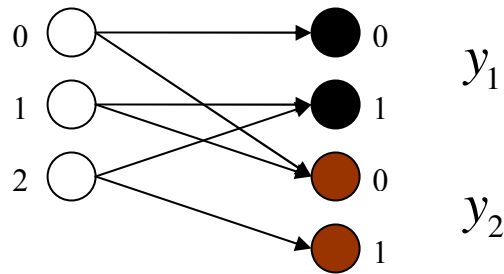
במודל זיכרון זה (המהווה אגב את המוטיבציה המקורית לפתרון בעיית GP) נתון זיכרון מגנטי עם תאים דפוקים. ראש הכתיבה יודע מראש אילו תאים דפוקים ושלא ניתן לאחסן בהם אינפורמציה. הקורא לעומת זאת לא יודע אילו תאים דפוקים ואילו תקינים. ז"א ניתן להסתכל על מודל זיכרון זה כמקיים

$$y = \begin{cases} x & \text{if } s = "ok" \\ 0 & \text{if } s = "stuck @ 0" \\ 1 & \text{if } s = "stuck @ 1" \end{cases}$$

במקרה והכותב והקורא שניהם יודעים את מיקום התאים התקולים, אזי קיבול הזיכרון יהיה בדיוק ההסתברות שיש לתא לא להיות תקוע (למשל, במקרה הבינארי, אם 90% מהתאים תקינים אזי הקיבול יהיה 0.9 ביט לתא זיכרון). מסתבר כי ניתן להגיע לקיבול זה גם עם ידע על מיקום התאים התקולים רק בכותב! ז"א

$$C_{SI (non-causal) @ Tx} = C_{SI @ Both} = \% \text{Good Cells}$$

ערוץ Blackwell (ערוץ Broadcast דטרמיניסטי)



איור 3

מה הקשר של ערוץ זה (איור 3) לערוץ עם אינפורמציה צד במשדר? ובכן, בעיה זו שקולה למודל הזיכרון עם התאים הדפוקים: נניח ש- x מיעד את השידור ל- y_1 ומשרת אותו בקצב מלא. אזי מבחינת המשתמש השני הוא מאולץ לקבל 0 במקרים בהם המשתמש הראשון מקבל 0, וחופשי לקבל 0 או 1 במקרים בהם המשתמש הראשון מקבל 1. זה בדיוק כמו תא תקול בבעיית הזיכרון שלעיל, וגם במקרה זה המשדר יודע מהו מצב "התא" בעוד שהמקלט (של y_2) אינו יודע זאת.

הוכחת המשפט הישר בעזרת Random Coding and Random Binning

כרגיל בהוכחות קלאסיות בתורת האינפורמציה, ההוכחה מתבססת על אוסף של קודים אקראיים ולא על קוד ספציפי. נניח שידוע לנו $P(u|s)$ ו- $\varphi(u, s)$, ונרצה להוכיח השגה של הקצב, ז"א עבור קצב R הנמוך מ- $I(u; y) - I(u; s)$ ניתן לקבל הסתברות שגיאה קטנה כרצוננו $P_e \rightarrow 0$. תחילה נגדיר שלושה שלבים:

שלב Offline

- נגדיר קוד אקראי $C = \{\underline{u}\}$ בגודל 2^{nR_1} לפי פילוג i.i.d. $P(u) = \sum_s P(u|s)P(s)$ (כאשר R_1 יוגדר בהמשך).
- נפזר את מילות הקוד בין 2^{nR} תאים (bins) בצורה אקראית אחידה.
- נגדיר מיפוי מהודעות לתאים $w \rightarrow \text{bin}$.

שלב הקידוד

- בהינתן ההודעה $w = i$, וקטור ה- \underline{s} וכן $\epsilon > 0$:
- מצא \underline{u} בתא i שהוא אופייני במשותף עם \underline{s} הנתון (ביחס לפילוג $(P(u, s) = P(s)P(u|s))$, ז"א $\underline{u} \in A_\epsilon^n(\underline{u} | \underline{s})$).
- שדר את $(x_i = \varphi(u_i, s_i))$, $i = 1, \dots, n$.

שלב הפענוח

- מצא $\hat{u} \in C$ (כאשר ספר הקוד ידוע למפענח משלב ה-offline) שאופייני במשותף עם \underline{y} שנקלט (ביחס לפילוג המשותף $P(u, y) = \sum_{x,s} P(u, s, x, y)$), ז"א $\hat{u} \in A_\varepsilon^n(\hat{u} | \underline{y})$.
- מצא לאיזה תא \hat{u} שייך, למשל התא j , והכרז על ההודעה המתאימה $\hat{w}=j$.

תהיות לגבי המנגנון ומקור לשגיאות:

- מה מבטיח שיהיה בתא ה- i לפחות u אחד מתאים? זהו מקור לשגיאת קידוד (זוהי שגיאה מבוקרת שניתן לזהות ולהכריז עליה במקודד).
- מה מבטיח ש- u האמיתי הוא אכן אופייני עם \underline{y} , ושכן יהיה יחיד (למרות שעקרונית ניתן להרשות u אחר אופייני, העיקר שיהיה באותו התא)?
- מה מבטיח שלא יהיו מתחרים ל- u האמיתי בתאים אחרים? זהו מקור לשגיאת פענוח משום שאם ה- u האמיתי אינו אופייני, וקיים u אחר אופייני, אזי לא נדע כי חלה שגיאה (במקרה של מספר u -ים אופייניים המפענח יכול להכריז לפחות על בעייה בפענוח).

ובחזרה להוכחה, נזהה תכונות האופייניות הבאות:

- א. u אופיינית במשותף עם \underline{s} ומשום ש- $x_i = \varphi(u_i, s_i) \quad i=1, \dots, n$, גם $(\underline{u}, \underline{s}, \underline{x})$ אופייניים במשותף ביחס ל- $P(u, s, x)$.
- ב. על סמך ה-A.E.P. ביחס לערוץ, נקבל כי, בהסתברות הגבוהה מ- $1-\varepsilon$, גם הם אופייניים במשותף ביחס לפילוג $P(x, s, y)$.

מתוך שני הסעיפים לעיל, בתוספת תכונת המרקוביות של $(\underline{u}, \underline{s}, \underline{x}, \underline{y})$, נסיק כי גם $(\underline{u}, \underline{s}, \underline{x}, \underline{y})$ אופייניים במשותף.

קעת נגדיר טענת עזר שתסייע בניתוח השגיאות.

טענת עזר: "אכספוננט סף ההצלחה" ([4])

אם הסיכוי ל-"הצלחה" הוא 2^{-nr} ומבצעים 2^{2R} ניסויים בת"ס, אזי הסיכוי שנקבל "הצלחה" בלפחות אחד מהניסויים הוא

$$P_{success} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & R > r \quad (I) \\ 0 & R < r \quad (II) \end{cases}$$

הוכחה:

נוכיח את (I) ע"י חישוב המשלים לסיכוי ל-"הצלחה" בלפחות מאחד הניסויים (ז"א הסיכוי ל-"אי-הצלחה" בכל הניסויים)

$$P_{\text{fail in all trials}} = (1 - 2^{-nr})^{2^{nR}} \stackrel{e^{-x} \geq 1-x}{\leq} (e^{-2^{-nr}})^{2^{nR}} = e^{-2^{n(R-r)}} \xrightarrow[\substack{R>r \\ n \rightarrow \infty}]{0}$$

ולגבי (II), לפי חסם האיחוד

$$P_{\text{success}} \leq \sum_{i=1}^{2^{nR}} \Pr(\text{success in trial } i) = 2^{nR} \cdot 2^{-nr} \xrightarrow[\substack{r < R \\ n \rightarrow \infty}]{0}$$

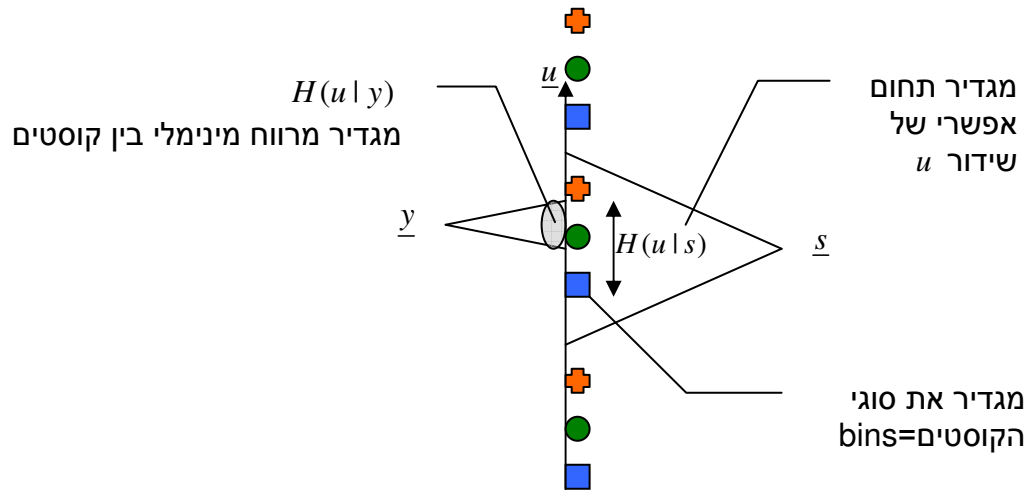
יש לשים לב שטענה (I) שקולה למעשה לקידוד מקור – רוצים שלפחות מילה אחת תכסה את המידע ומותר שיהיו יותר ממילה אחת כזו ("הצלחה"). לעומת זאת, טענה (II) שקולה לקידוד ערוץ – איננו רוצים שמילה מתחרה תצליח. (הערה: אנו כבר יודעים משעורים קודמים כי בבעיות של אינפורמציה צד "מתחבא" הן קידוד מקור והן קידוד ערוץ).

קעת נחזור ונתייחס לשלושת מקורות השגיאה שזיהינו לעיל (i-iii):

- אם (u, s, x, y) אופייניים במשותף, כפי שאכן ראינו, אזי בפרט גם u ו- y אופייניים במשותף, ולכן בהסתברות קרובה ל-1 u האמיתי הוא אכן אופייני עם y . מסקנה: **שגיאה ii** קטנה כרצוננו.
- כדי לאפס את **שגיאה iii** יש לדאוג שלא יהיה u אחר אופייני עם y (אין מתחרים), בדיוק כמו בקידוד ערוץ. לכן נדרוש ש- $R_1 < I(u; y)$, כך שיובטח (על סמך טענת העזר) שאין מתחרים בהסתברות שואפת ל-1.
- כדי לאפס את **שגיאה i** עלינו לנהוג כמו בבעית קידוד מקור. הסיכוי ש- u אקראי יהיה אופייני עם s שואף ל- $2^{-nI(u;s)}$. כמו כן, הסיכוי ש- u אקראי "ייפול" בתא i הוא 2^{-nR} . מכאן הסיכוי ש- u אקראי יהיה גם אופייני עם s וגם "ייפול" בתא i הינו (מאחר והמאורעות בלתי תלויים) \leq מכפלה של הסתברויות) $2^{-n[I(u;s)+R]}$. זהו הסיכוי ל-"הצלחה" ("ז"א 2^{-nr}). על סמך טענת העזר שהוכחנו, כדי שתהיה לפחות "הצלחה" אחת מתוך 2^{nR_1} ניסויים עבור s נתון, חייב להתקיים $R_1 > I(u; s) + R$
 מסיכום שלושת מקורות השגיאה הללו נקבל את התנאי לשגיאה השואפת לאפס:
 $R < I(u; y) - I(u; s)$

שמסכם את ההוכחה של החלק הישר של משפט GP.

הסתכלות גיאומטרית



איור 4

נרצה שבמניפה של u שאופייני עם y יהיה נציג אחד מקוסט אחד. תחום הקוסטים האפשריים מוגדר ע"י אי הוודאות $H(u|s)$. נזהה קוסט בודד מתוך הקבוצה ע"י y . מכאן שקצב השידור הוא $H(u|s) - H(u|y)$.

דוגמא לבעיית GP: קידוד לזיכרון עם תאים תקולים (defective cells)

כזכור במקרה זה

$$y = \begin{cases} x & \text{if } s = "ok" \\ 0 & \text{if } s = "stuck @ 0" \\ 1 & \text{if } s = "stuck @ 1" \end{cases}$$

והרחבה ברורה למקרה של אלפבית שאינו בינארי $|X| > 2$.

ראינו כי במקרה של אינפורמציה צד בשני צדי המערכת $|X| \log_2 |X| \cdot \Pr(s = "ok") = C_{SI@Both}$.

נזכיר כי עבור ערוץ זה מתקיים $C_{GP} = C_{SI@Both}$

ננחש $u = y$, ו- x האופטימלי להשגת $C_{SI@Both}$. זוהי בחירה לגיטימית משום ש- y הוא

פונקציה דטרמיניסטית עם בחירת x ולכן מתקיים הקשר המרקובי הרצוי

$$u \leftrightarrow (s, x) \leftrightarrow y$$

עבור בחירה זו

$$C_{GP} = \max_{P(x)} H(y|s) = \max_{P(x)} \Pr(s = "ok") \cdot H(x) + \max_x \Pr(s = "stuck @") \cdot 0$$

לפיכך נחפש את $P(x)$ שמביא למקסימום את אנטרופיית הכניסה, דהיינו $H(x) = \log |X|$.

$$C_{GP} = \Pr(s = "ok") \cdot \log |X| = C_{SI@Both}$$

דוגמא לקוד עבור זיכרון עם תאים תקולים⁶:

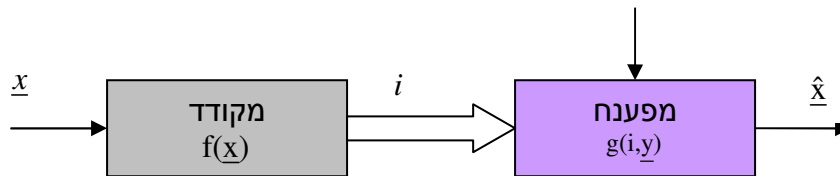
למשל קוד ממשפחת קודי MDS (קודי R-S). נסתכל על בלוק קוד באורך n המחולק ל- k ביטי אינפורמציה ו- $n-k$ ביטי יתירות (בדיקת זוגיות). בבניית הקוד לזיכרון נאכנס את המידע דווקא ב- $n-k$ "ביטי היתירות", בעוד יתר k הביטים יתארו את התאים התקולים. לפיכך, ניקח $n-k$ ביטי מידע (הודעות) שברצוננו לאכנס בזיכרון. ביטים אלו ניתן לשייך ל- 2^{n-k} קוסטים של קוד מהצורה $C_w = \{x : Hx = w\}$. דהיינו, כל הודעה מיוצגת ע"י קוסט

(סינדרום) מתאים. בכל קוסט ישנן 2^k מילות קוד.

נרצה להראות כיצד ניתן למצוא בקוסט נתון מילת קוד שמתלכדת עם תכולת התאים התקולים. ובכן, מאחר ולמשדר אינפורמציה צד על מיקום התאים התקולים, ניתן לבחור מילת קוד כלשהי x באורך n בתוך הקוסט ולבצע XOR עם מילה באורך n , נסמנה s , המציינת את ערכי k התאים התקולים (ב- k ביטים שונים). אזי $\tilde{e} = x \oplus s$ היא ההבדל בין x ו- s . מתוך תכונות הקוד בהכרח קיימת מילה \tilde{x} בקוסט האפס המתלכדת עם \tilde{e} ב- k התאים התקולים. נבחר לאחסן את \tilde{x} , ולכן מובטח ש- \tilde{x} מתלכד עם ערכי המקומות התקולים. המפענח יחשב (ללא אינפורמציה צד) $H\tilde{x} = H(x + \tilde{e}) = Hx = w$ (שמייצג את ההודעה שנשלחה. יש לשים לב כי במקרה זה פעולת המקודד היא קשה בעוד פעולת המפענח קלה יותר (בשונה מבדר"כ בקידוד ערוץ).

הדואליות לבעיית Wyner-Ziv

y אינפורמציה צד קורלטיבית עם המקור



איור 5

$$R_{WZ}(D) = R_{SI @ Rx}(D) = \min_u I(x; u | y)$$

$$\begin{aligned}
 &u \\
 &u \leftrightarrow x \leftrightarrow y \\
 &\text{exists } \hat{x} = \varphi(u, y) \\
 &\text{under } \varphi(x, \hat{x}) \leq D \\
 &(\text{e.g. } \varphi(x, \hat{x}) = E(x - \hat{x})^2)
 \end{aligned}$$

בגלל התנאי המרקובי, ניתן לרשום גם

$$R_{WZ}(D) = \min_u [I(x; u) - I(y; u)]$$

⁶ חלק זה בהרצאה ניתן ע"י מר אלי חיים.

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

פונקציית הקצב-עיוות $R_{wz}(D)$ בצורתה זו דומה מאוד למשפט GP. גם במקרה זה u הוא משתנה עזר והפתרון מקיים דואליות עם הפתרון לבעיית GP:
יש קוד בקצב גבוה עם ספר קוד C_1 של מילות u ($|C_1| = 2^{nR_1} \approx 2^{nI(x;u)}$), המפוזרות אחיד ל- 2^{nR} תאים (bins).
הקידוד מתבצע באופן הבא: מצא u בתוך C_1 שאופייני עם x , שלח את האינדקס i של התא אליו שייך u . הפענח מתבצע באופן הבא: מצא \hat{u} בתוך התא i שאופייני במשותף עם אינפורמציות הצד y , ומכאן $\hat{x}_i = \varphi(\hat{u}_i, y_i)$ $i=1, \dots, n$.
סכימת עבודה זו היא דואלית (רק הפוך) להליך המקביל לבעיית GP. לדוגמא, בבעיה זו C_1 הוא קוד מקור (קוד כיסוי) טוב, בעוד C_1 המקביל לו לבעיית GP הוא קוד ערוץ טוב.

ביבליוגרפיה

- [1] C. E. Shannon, "Channels with side information at the transmitter", IBM Journal, pp. 289--293, October, 1958. 33.
- [2] S. Gel'fand and M. Pinsker, "Coding for channel with random parameters," Problems of Control and Information Theory 9(1), pp. 19--31, 1980.
- [3] M.H.M. Costa, "Writing on dirty paper", IEEE Trans. Information Theory, IT-29, pp. 439—441, May 1983.
- [4] Cover & Thomas Book.

7 - הרצאה

ערוצי MAC ו BC וקטוריים - ערוצי MIMO (Multiple Input Multiple Output)

סוכם ע"י אבינועם לוי על פי הרצאה של טל פילוסוף מה-30/05/06.

ערוץ MIMO כללי נתון ע"י:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{nr} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n_t} \\ h_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ h_{nr,1} & & & h_{nr,n_t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{nr} \end{bmatrix}$$

כאשר:

$\underline{\underline{Y}}$ - וקטור מוצא מהערוץ (כניסה למקלט) במימד n_r (מס' אנטנות קליטה).

$\underline{\underline{X}}$ - וקטור כניסה לערוץ (מוצא משדרים) במימד n_t (מס' אנטנות שידור).

$\underline{\underline{Z}}$ - וקטור רעש גאוס לכן במימד n_r , $z \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$.

$\underline{\underline{H}}$ - מטריצת מעבר ערוץ. h_{ij} מייצג השפעת ערוץ על כניסה i למוצא j .

הערה: כל רכיב במטריצות שהוגדרו יכול להיות ממשי או קומפלקסי. אנו נניח בניתוח הנוכחי, ללא הגבלת הכלליות, רכיבים ממשיים.

ניתן לחלק בעיות MIMO לבעיות P2P, MAC, BC ע"פ מס' המקלטים והמשדרים הבאים לידי ביטוי בקשרים המתקיימים בין הכניסות למוצאים דרך מטריצת מעבר ערוץ $\underline{\underline{H}}$:

א. MIMO P2P – מקלט אחד ומשדר אחד.

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Z}}$$

כאשר המשתנים הם כפי שהוגדרו במקרה הכללי. כל הכניסות לערוץ (אנטנות שידור) יוצאות ממשדר אחד וכל n_r היציאות מהערוץ (אנטנות קליטה) נכנסות למקלט אחד. הקיבול נתון ע"י:

$$C_{p2p} = \max_{\substack{S_{\underline{\underline{x}}} \\ tr(S_{\underline{\underline{x}}}) \leq P}} I(\underline{\underline{y}}; \underline{\underline{x}}) = \max_{\substack{S_{\underline{\underline{x}}} \\ tr(S_{\underline{\underline{x}}}) \leq P}} \frac{1}{2} \log \left(\frac{|HS_{\underline{\underline{x}}}H^T + \sigma^2_z \mathbf{I}|}{\sigma^2_z |\mathbf{I}|} \right)$$

כאשר:

$$S_{\underline{\underline{x}}} = E\{\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}^T\}$$

א. - אופרטור דטרמיננטת מטריצה.

ב. MIMO MAC – מס' כלשהו n_t (מס' משתמשים) של משדרים ומקלט בודד:

לדוגמא עבור 2 משדרים:

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{h}_1 & \underline{h}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underline{z} = \underline{h}_1 \cdot x_1 + \underline{h}_2 \cdot x_2 + \underline{z}$$

כאשר באופן כללי כל משדר i מתוך n_u יכול לשדר ל- n_{ti} אנטנות שידור שממופות ל- n_r אנטנות הקליטה דרך מטריצת מעבר ערוץ h_i ממימד $n_{ti} \times n_r$. כל אנטנות הקליטה נכנסות למקלט בודד.

$$C_{MAC}^{SUM} = \max_{\substack{tr(S_{x1}) \leq P1 \\ tr(S_{x2}) \leq P2}} I(\underline{y}; \underline{x}_1, \underline{x}_2) = \max_{\substack{S_{\underline{x}} \\ tr(S_{\underline{x}}) \leq P}} \frac{1}{2} \log \left(\frac{|HS_{\underline{x}}H^T + \sigma^2_z I|}{\sigma^2_z |I|} \right) \leq C_{p2p}$$

כאשר:

$$\underline{S}_{x1} = E\{X_1 \cdot X_1^T\} - \text{מטריצת קרוס קורלציה רכיבי שידור משדר 1 ממימד } n_{t1} \times n_{t1}$$

$$\underline{S}_{x2} = E\{X_2 \cdot X_2^T\} - \text{מטריצת קרוס קורלציה רכיבי שידור משדר 2 ממימד } n_{t2} \times n_{t2}$$

$$\underline{S}_{\underline{x}} = E\{\underline{X} \cdot \underline{X}^T\} - \text{מטריצת קרוס קורלציה כל רכיבי השידור ממימד } (n_{t1} + n_{t2}) \times (n_{t1} + n_{t2})$$

הקיבול הכולל נמוך מקיבול $p2p$ כתוצאה מחוסר שיתוף פעולה במשדר - $S_{\underline{x}}$ - אלכסונית (חוסר תלות בין הכניסות ב MAC).

ג. MIMO BC – משדר בודד ומספר כלשהו n_u של מקלטים:

לדוגמא עבור 2 מקלטים:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

כאשר באופן כללי המשדר משדר דרך n_t אנטנות שידור שממופות ל- n_{ti} אנטנות קליטה דרך מטריצת מעבר ערוץ h_i ממימד $n_{ti} \times n_t$. כל מקלט i מתוך n_u מקבל n_{ti} אנטנות קליטה. שוב, הקיבול הכולל נמוך מקיבול $p2p$ כתוצאה מחוסר שיתוף פעולה במקלט.

1. GDFE – Generalized Decision Feedback Equalizer (P2P)

בדומה לערוץ ISI, עבורו ניתן להגיע לקיבול עם הפרדה בין קוד לאפנון (הורדת סיבוכיות) באמצעות שימוש בתצורת DFE, נשתמש בתצורת GDFE עבור בעיות MIMO P2P.

נתון ערוץ P2P ווקטורי:

$$\underline{Y} = \underline{H} \cdot \underline{X} + \underline{Z}$$

כאשר:

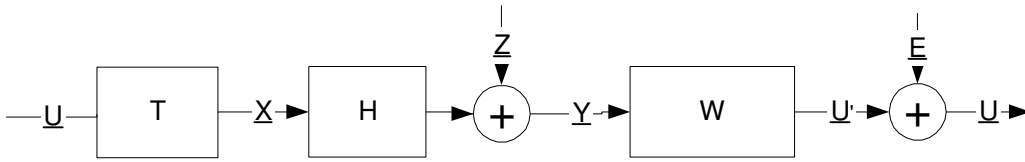
$$\underline{X} \sim N(0, S_{xx}) \text{ ממימד } n_t$$

$$\underline{Z} \sim N(0, I) \text{ ממימד } n_r$$

$$\underline{Y} \text{ ממימד } n_r$$

המטרה: לאפשר לפענח כל הודעה בנפרד (הורדת סיבוכיות) בלי לפגוע בקיבול. נניח ללא הגבלת כלליות שתי כניסות סקלריות ($n_t=2$).

שערוך MMSE לינארי:



כאשר:

\underline{U} – וקטור הודעות גאוסי בת"ס ממימד n_t .
 \underline{X} – וקטור שידור גאוסי כללי לא בהכרח בת"ס ממימד n_t המתקבל מ- \underline{U} ע"י $\underline{X} = T\underline{U}$ כאשר T מטריצת מיפוי ממימד $n_t * n_t$.
 \underline{W} – מטריצת שערוך MMSE ממימד $n_t * n_r$.
 $\underline{E} = \underline{U} - \underline{U}'$ – שגיאת השערוך, ניצבת למדידות \underline{Y} ולמשערוך \underline{U}' (ע"פ עקרון האורתוגונליות של משערוך ה- MMSE וגאוסיות) בעלת מטריצת אוטוקורלציה S_E ולכן הערוך $\underline{U} = \underline{U}' + \underline{E}$ אדיטיבי עם רעש גאוסי בת"ס.
 \underline{U} הינו משתנה עזר שמאפשר להתייחס להודעות כוקטור בת"ס בעל מטריצת קורלציה $S_U = E\{\underline{U}\underline{U}^T\}$ אלכסונית. מאחר ו- $\underline{U}, \underline{X}$ קשורים באמצעות מטריצת מיפוי T דטרמיניסטית הערוך קיבול ערוך עבור פענוח משותף של כל ההודעות:
 $\underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ שקול לערוך $\underline{U} \rightarrow \underline{Y}$ כאשר $\underline{H} \rightarrow \underline{H}' = \underline{H}T$.

$$I(\underline{U}; \underline{U}') = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_U|}{|S_E|} \right)$$

$$I(\underline{Y}, \underline{U}) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_Y|}{|S_Z|} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} I(\underline{U}; \underline{U}') \\ I(\underline{Y}, \underline{U}) \end{array} \right\} \xrightarrow{MMSE} I(\underline{U}; \underline{U}') = I(\underline{Y}, \underline{U}) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_U|}{|S_E|} \right)$$

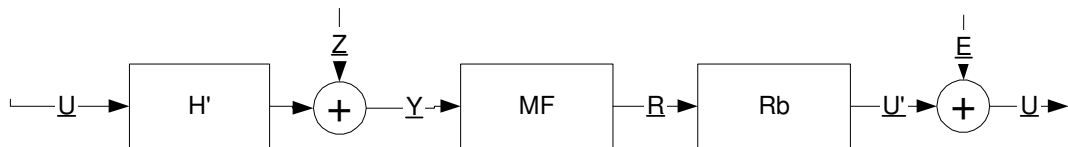
סכום הקצבים (עבור פיענוח כל הודעה בנפרד):

$$I(u_1; u'_1) + I(u_2; u'_2) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_{u1}|}{|S_{e1}|} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_{u2}|}{|S_{e2}|} \right) \leq \frac{\text{hadamard inequality}}{|S_U| = S_{u1} S_{u2}} \rightarrow \frac{1}{2} \log \left(\frac{|S_U|}{|S_E|} \right)$$

שוויון מתקבל רק כאשר השגיאות בת"ס S_E אלכסונית (עבור המונה הראינו כי ניתן לעבוד עם S_U אלכסונית ללא הגבלת הכלליות) לכן עבור המקרה הכללי עבורו השגיאות לא בת"ס קיים הפסד בקצב בפענוח כל הודעה בנפרד.

ננסה לשפר את הסכימה:

$$W = S_{\underline{U}\underline{Y}} S_{\underline{Y}\underline{Y}}^{-1} = S_U H^T (H^T S_U H^T + I)^{-1} \xrightarrow{MIL} = \underbrace{(H^T H^T + S_U^{-1})^{-1}}_{Rb} \underbrace{H^T}_{MF}$$



$$\underline{R} = \underbrace{H^T H}_{R_f} \underline{U} + \underbrace{H^T \underline{Z}}_{\underline{Z}'} = R_f \underline{U} + \underline{Z}'$$

$$\underline{U} = \underbrace{(H^T H + S_U^{-1})^{-1}}_{R_b} \underline{R} + \underline{E} = R_b \underline{R} + \underline{E}$$

$$\begin{aligned} S_{\underline{E}} &= E\{\underline{E}\underline{E}^T\} = E\{(\underline{U} - \underline{U}')(\underline{U} - \underline{U}')^T\} = E\{(\underline{U} - S_{UY} S_Y^{-1} \underline{Y})(\underline{U} - S_{UY} S_Y^{-1} \underline{Y})^T\} = \\ &= S_U - S_{UY} S_Y^{-1} S_{YU} - S_{UY} S_Y^{-1} S_{UY} + S_{UY}^2 S_Y^{-1} = S_U - S_U H^T (H^T S_U H^T + I)^{-1} H^T S_U \\ &= \xrightarrow{ML} R_b \end{aligned}$$

המטרה היא להגיע למטריצת רעש אלכסונית ע"מ להגיע לסכום קצבים מקסימלי לכן נעשה שימוש בפירוק cholesky:

$$R_b = G^{-1} \Delta^{-1} G^{-T}$$

$$G \equiv \begin{bmatrix} I & G_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Delta \equiv \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ 0 & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

ונגדיר:

$$\underline{E}' \equiv G \underline{E}$$

$$S_{\underline{E}'} = G R_b G^T = \Delta^{-1}$$

$$|S_{\underline{E}'}| = |S_{\underline{E}}|$$

כלומר קיבלנו מטריצת רעש אלכסונית בעלת דטרמיננטה זהה למטריצה המקורית. נבנה סכימה שקולה העושה שימוש בוקטור הרעש החדש:

$$\underline{U} = R_b \underline{R} + \underline{E} = G^{-1} \Delta^{-1} G^{-T} \underline{R} + \underline{E}$$

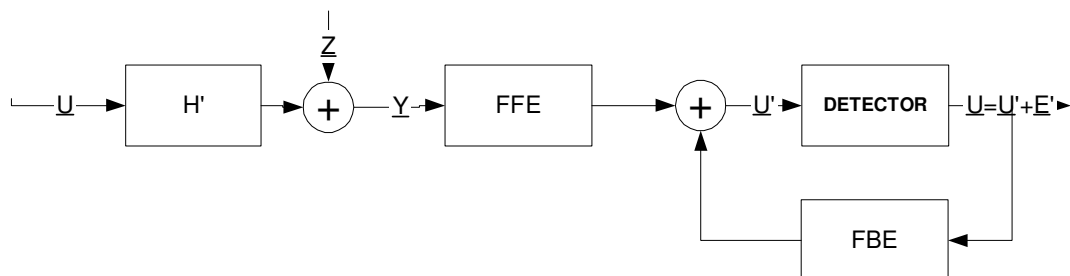
$$G \underline{X} = \Delta^{-1} G^{-T} \underline{R} + G \underline{E} \quad / + (I - G) \underline{U}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \underbrace{\Delta^{-1} G^{-T} \underline{R} + (I - G) \underline{U}}_{\underline{X}'} + \underline{E}'$$

$$FFE \equiv \Delta^{-1} G^{-T} H^T$$

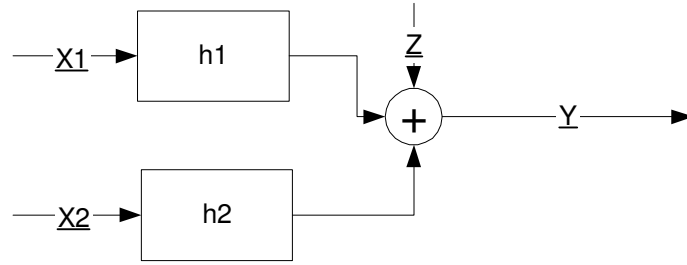
$$B = FBE \equiv I - G$$

כלומר קיבלנו תצורת DFE:



ומאחר ותצורה זו מבטיחה וקטור רעש אדיטיבי בת"ס בעל רכיבים בת"ס אי שוויון הזמרה מתקיים בשוויון וניתן להגיע לקיבול מקסימלי ע"י פענוח כל הודעה בנפרד.

נניח ערוץ MAC בעל 2 כניסות וקטוריות.



כאשר:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &\sim N(0, S_Z) \\ S_1 &= E\{\underline{X}_1 \underline{X}_1^T\} \\ S_2 &= E\{\underline{X}_2 \underline{X}_2^T\} \\ \text{tr}(S_1) &\leq P_1 \\ \text{tr}(S_2) &\leq P_2 \\ \underline{Y} &= \underline{h}_1 \cdot \underline{X}_1 + \underline{h}_2 \cdot \underline{X}_2 + \underline{Z} \end{aligned}$$

תחום הקיבול נתון ע"י:

$$R_1 \leq I(\underline{X}_1; \underline{Y} | \underline{X}_2) = h(\underline{Y} | \underline{X}_2) - h(\underline{Y} | \underline{X}_1, \underline{X}_2) = h(\underline{X}_1 \cdot \underline{H}_1) - h(\underline{Z}) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{|h_1 S_1 h_1^T + S_Z|}{|S_Z|} \right)$$

$$R_2 \leq I(\underline{X}_2; \underline{Y} | \underline{X}_1) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{|h_2 S_2 h_2^T + S_Z|}{|S_Z|} \right)$$

$$R_1 + R_2 \leq I(\underline{X}_1, \underline{X}_2; \underline{Y}) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{|h_1 S_1 h_1^T + h_2 S_2 h_2^T + S_Z|}{|S_Z|} \right)$$

הקצב המקסימלי עבור כל משדר מתקבל כאשר המשדר השני מנוון. שוויון אחרון מתקבל עבור כניסה גאוסית.

תחום הקיבול הינו איחוד כל הפנטגונים המתקבלים ע"י כל וקטורי הכניסה המקיימים אילוץ הספק.

נשים לב שערוץ MAC מתאים בדיוק למבנה ה-GDFE שהוצג ותחום הקיבול זהה מאחר וניתן להציג את פענוח ההודעות בתצורת GDFE, בדומה לבעיית MAC, בצורה עוקבת:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G_{22}^T & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -G_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \Delta_{22}^{-1} (-G_{22}^T \cdot r_1 + r_2) + e'_2$$

$$u_1 = \Delta_{11}^{-1} \cdot r_1 - G_{22} \cdot u_2 + e'_1$$

כלומר בשלב ראשון פענוח u_2 (נחשב כרעש) ולאחר מכן שימוש בשערוך של u_2 בפענוח u_1 ומתקבל כי:

$$\begin{cases} R_1 = I(u'_1, u) = I(u_1; \underline{Y} | u_2) \\ R_2 = I(u'_2, u_2) = I(u_2; \underline{Y}) \\ R_1 + R_2 = I(u_1, u_2; \underline{Y}) \end{cases}$$

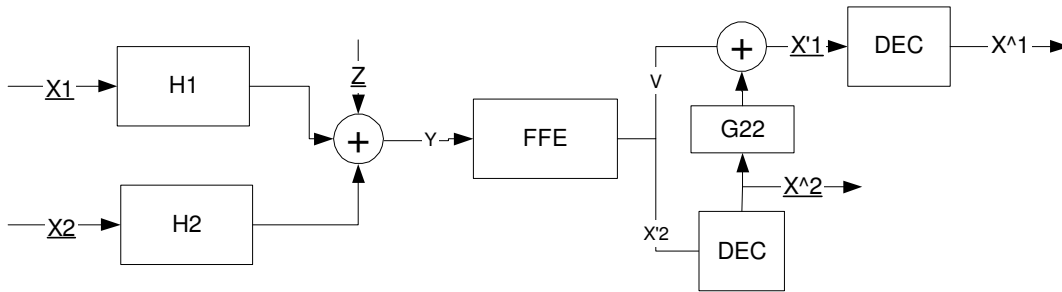
ערוץ BC וקטורי

3.

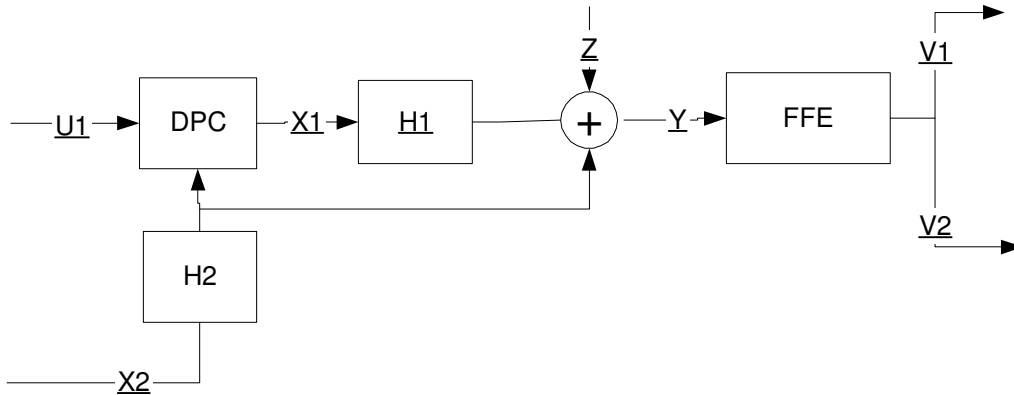
דואליות בין GDPE ל- DPC

באופן דומה לדואליות בין DFE ל- Tomlinson Precoder, ניתן להראות כי ישנה דואליות דומה בין GDPE ל- DPC.

סכימת GDPE:

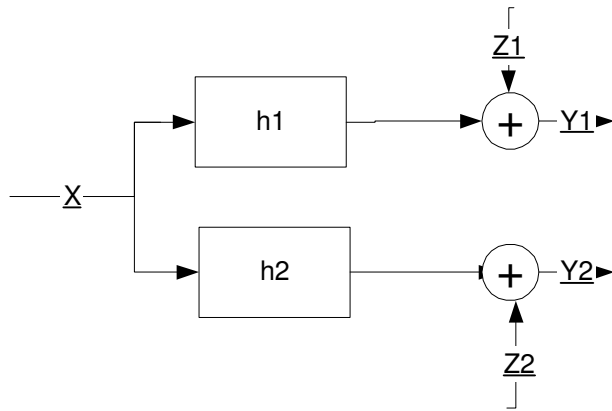


סכימת PDC הדואלית:



כאשר ע"מ שיהיה ניתן להפריד בין המשתמשים ב-BC נדרש כי FFE יהיה אלכסוני.

נניח עתה ערוץ BC בעל 2 מקלטים.



כאשר נניח ללא הגבלת הכלליות:
 \underline{X} – וקטור עמודה דו מימדי ממשי ($n_t=2$).
 y_1, y_2 – סקלרים ממשיים ($n_{r1}=n_{r2}=1$).
 $\underline{h}_1=[h_{11} \ h_{12}], \underline{h}_2=[h_{21} \ h_{22}]$ – וקטורי שורה דו מימדיים ממשיים.
 z_1, z_2 – מ"א סקלרים ממשיים מפולגים גאוסית.

$$E\{z_1^2\} = E\{z_2^2\} = \sigma_z^2$$

$$S_z = E\{\underline{Z}\underline{Z}^T\} = \sigma_z^2 \cdot I$$

$$S_x = E\{\underline{X}\underline{X}^T\}$$

$$tr(S_x) \leq P$$

$$\underline{Y} = \underline{H}\underline{X} + \underline{Z} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + z_1$$

$$y_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + z_2$$

מאחר ולא ניתן להביא לצורה של degraded BC (אפילו לא statistically degraded) לא ניתן להשתמש בתחום הקיבול הידוע עבור ערוץ degraded BC אך עבור פילוג כניסה גאוסית קיים חסם עבור סכום הקצבים.

מציאת סכום הקצבים:

הוכחת המשפט ההפוך:

ע"פ חסם סאטור:

$$R_1 + R_2 \leq \min_{\substack{S_z \geq 0 \\ S_{zii} = \sigma_z^2}} I(\underline{X}; y_1, y_2) = \min \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\underline{H}S_x\underline{H}^T + S_z|}{|S_z|} \right)$$

הוכחת השגה:

טענה: עבור פילוג כניסה גאוסית ($\underline{X} \sim N(0, S_x)$) הרעש הגרוע ביותר (LFN – Least Favorable Noise) מקיים:

$$S_z^{-1} = (\underline{H}S_x\underline{H}^T + S_z)^{-1} \quad \text{diagonal}$$

הוכחה: באמצעות KKT.

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

טענה: עבור פילוג כניסה גאוסי $X \sim N(0, S_{xx})$ ורעש LFN קיימת מטריצת שידור $X=BU$ ($U \sim N(0, I)$) כך שה-FFE (ביחס לערוץ HB) בסכימת ה-PDC הינו אלכסוני.
הוכחה: אלגברית.

מסקנות:

- עבור פילוג כניסה גאוסי החסם העליון עבור סכום הקצבים מקבל מינימום עבור רעש LFN.
- במצב זה ה-FFE אלכסוני בסכימת ה-DPC ולכן ניתן להשיג את סכום הקצבים המקסימלי האפשרי (אין פגיעה בסכום הקצבים כתוצאה מהפרדת ההודעות בפענוח).
- מאחר והנ"ל נכון עבור כל S_x ובפרט עבור S_x שמביא למקסימום את סכום הקצבים לכן:

$$C_{SUM} = \max_{\substack{S_{xx} \\ tr(S_{xx}) \leq P}} \min_{\substack{S_{zz} \\ S_{zi} = \sigma_z^2 \\ S_{zz} \geq 0}} \frac{1}{2} \log \left(\frac{|HS_x H^T + S_z|}{|S_z|} \right)$$

בבליוגרפיה:

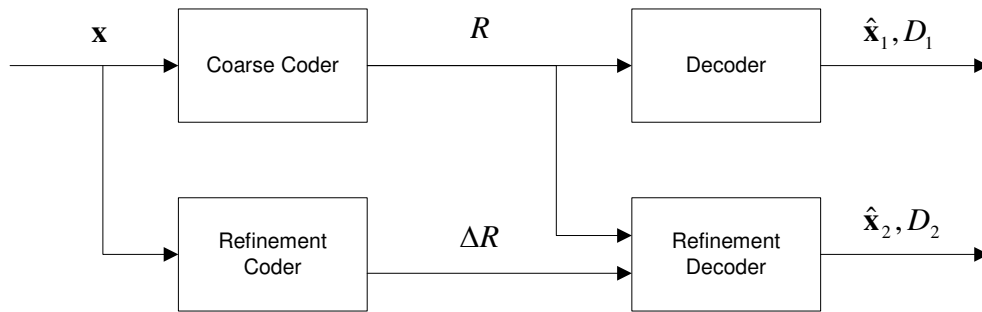
- [1] Wei Yu; Cioffi, J.M.
Sum capacity of Gaussian vector broadcast channels
Information Theory, IEEE Transactions on
Volume 50, Issue 9, Sept. 2004 Page(s): 1875 – 1892
- [2] G. Caire and S. Shamai,
[On the achievable throughput of a multi-antenna Gaussian broadcast channel](#)
IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 49, No. 7, pp. 1691--1706, July 2003.
- [3] S. Vishwanath, N. Jindal, and A. Goldsmith,
[Duality, Achievable Rates, and Sum-Rate Capacity of Gaussian MIMO Broadcast Channels](#)
IEEE Trans. on Information Theory, Volume 49, Issue 10, pp. 2658-2668, Oct. 2003.
- [4] P. Viswanath and D. Tse, IEEE
"Sum capacity of the vector Gaussian broadcast channel and uplink-downlink duality,"
Trans. Info Theory, pp. 1912.
- [5] R. S. Cheng, S. Verdú,
"Gaussian Multiple-Access Channels with Intersymbol Interference: Capacity Region and Multiuser Water-Filling,"
IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-39, pp. 773-785, May 1993.
- [6] W. Yu, W. Rhee, S. Boyd, and J. Cioffi,
"Iterative water-filling for Gaussian vector multiple access channels,"
in Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Seattle, WA, 2001, p. 322.

הרצאה - 8

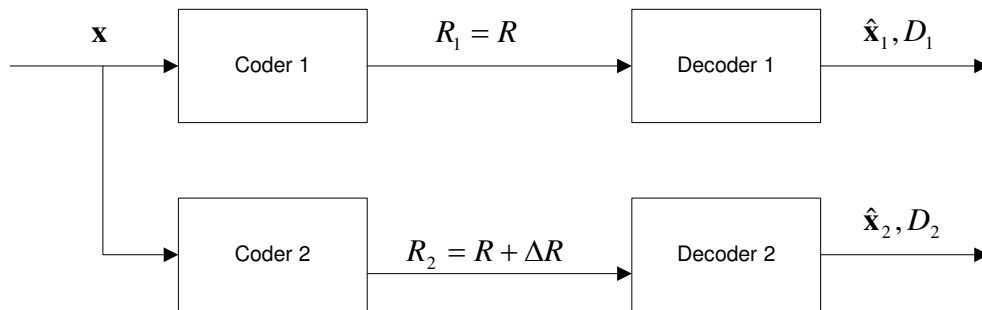
קידוד מקור עם עיוות בשלבים (SR - Successive Refinement)

סוכם ע"י נדב פיין

מערכת SR נראית כדלקמן (מוצג עיוות שני שלבים) –



במערכת זו מקודד המקור עבור משתמש איכותי (2) ועבור משתמש פחות איכותי (1). נשווה את ביצועי המערכת (מידת העיוות) למערכת ייחוס, בה הקידוד מתבצע בנפרד לשני המשתמשים:



במערכת הייחוס מושגת פונקצית קצב-עיוות $R(\cdot)$ במובן $R_1=R(D_1)$, $R_2=R(D_2)$, כאשר $D_2 < D_1$. אם נחזור למערכת המקורית, אין זה ברור (ולרוב זה לא מתקיים), שאם $R=R(D_1)$ אזי ניתן להשיג $\Delta R=R(D_2)-R$.

הגדרה: [1] תחום קצב עיוות במערכת SR עבור מקור כלשהו –

$$R(D_1, D_2) = \text{convex closure of } \{(R_1, R_2); (D_1, D_2) \text{ can be obtained with } (R_1, R_2)\}$$

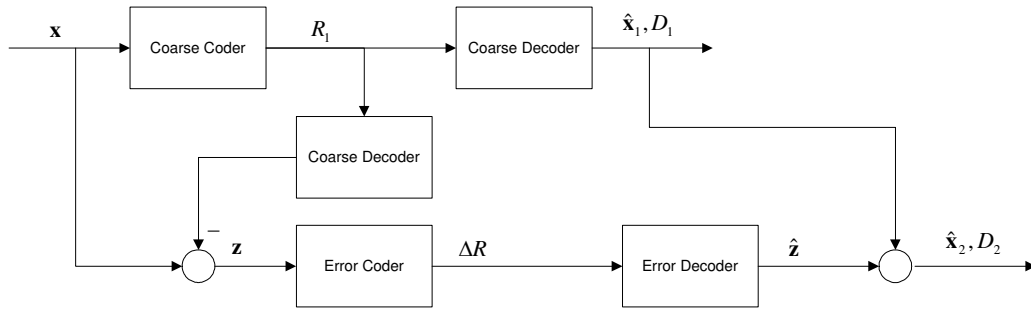
הגדרה: מקור בר עידון הינו מקור שמקיים –

$$(R(D_1), R(D_2)) \in R(D_1, D_2)$$

משפט 1: מקור גאומטרי עם עיוות ריבועי הוא בר-עידון.

משפט 2: במקור כלשהו עם עיוות ריבועי ניתן להתקרב עד כדי $1/2$ ביט מפונקצית קצב-עיוות.

הוכחת 1: באופן קונסטרוקטיבי, דרך לפי המערכת הבאה –



מתקיים –

$$\hat{x}_2 - x = \hat{x}_2 - (\hat{x}_1 + z) = (\hat{x}_2 - \hat{x}_1) - z = \hat{z} - z$$

יוצא שהשגיאה בקידוד העדין היא השגיאה בקידוד z. בדחיסה (גסה) אופטימלית של x מתקיים –

$$R_1 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_x^2}{D_1} \right)$$

בדחיסה אופטימלית של z מתקיים –

$$\Delta R \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{D_1}{D_2} \right)$$

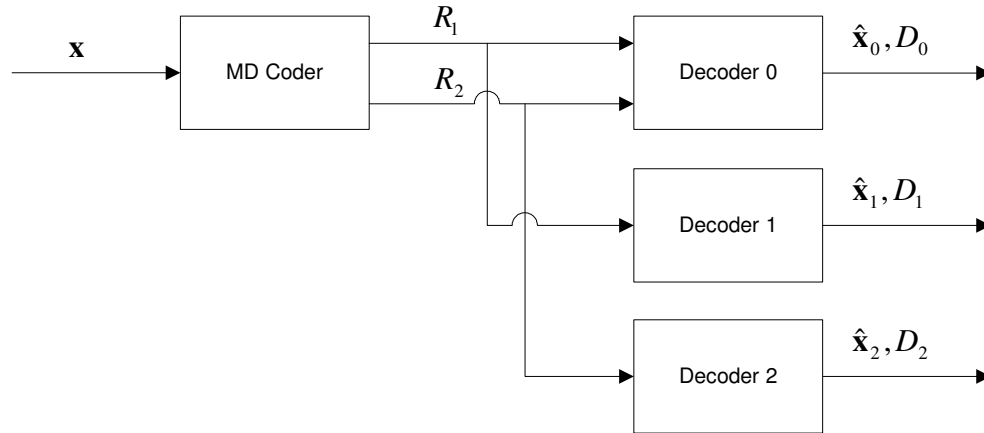
כי השונות של z היא D_1 , ושוויון מושג עבור z נורמלי. מסיכום המשוואות מתקבל שהדחיסה העדינה אופטימלית –

$$R + \Delta R = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma_x^2}{D_2} \right)$$

□

קידוד מקור בריבוי תיאורים (Multiple Descriptions)

ניתן להגדיר בעיה כללית יותר, בעיית קידוד בריבוי תיאורים (Multiple Descriptions). כאן אין סדר בין הקידודים. המערכת מתוארת להלן (כאן שני תיאורים) –



ניתן לחשוב על קידוד מעל רשת האינטרנט, שם כל אחד מהמצבים (קליטה של כל צירוף של תיאורים) אפשרית. אם נדרוש $D_2 = \sigma_x^2$ נחזור למצב של Successive Refinement. אם נדרוש D_1 ו- D_2 קטנים מ- σ_x^2 , אז ניתקל בבעיה בהשגת אופטימליות עבור D_0 (במובן פונקצית קצב-עיוות) משום שההודעות (והמשערכים) יהיו קורלטיביים (וקצב 'יתבונז').

משפט [2]: בהינתן חסמים על מידת עיוות D_0, D_1, D_2 , ניתן להשיג כל זוג קצבים מהצורה –

$$\begin{aligned} R_1 &> I(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}_1) \\ R_2 &> I(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}_2) \\ R_1 + R_2 &> I(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + I(\hat{\mathbf{x}}_1; \hat{\mathbf{x}}_2) \end{aligned}$$

כאשר קיימת פונקצית פילוג מהצורה $p(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2 | \mathbf{x})$ עבורה מתקיימות מידות העיוות.

בתנאי השלישי מצויה הדגרדציה בביצועים במקרה של MD. עם זאת, ב-[1] מראים כיצד במקרה הנורמלי עם עיוות גבוה, ניתן להשיג את פונקצית קצב-עיוות עבור כל אחד משלושת התיאורים.

משפט [2]: עבור $\mathbf{x} \sim N(0, 1)$ ועבור $D_1 + D_2 - D_0 \geq 1$ ניתן להשיג כל זוג קצבים מהצורה –

$$\begin{aligned} R_1 &> \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{D_1} \right) \\ R_2 &> \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{D_2} \right) \\ R_1 + R_2 &> \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{D_0} \right) \end{aligned}$$

כמו כן נתון ב-[2] הפתרון למקרה של עיוות לא גבוה (שם לא מושגת פונקצית קצב-עיוות עבור D_0).

נושאים מתקדמים בתורת האינפורמציה, סמסטר ב' 2006, פרופ' רם זמיר

[2] – El Gamal, Cover, “Achievable Rates for Multiple Descriptions”, IEEE Transactions on Information Theory, VOL IT-28, No. 6, November 1982, pages 851-

857